وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة

قسم علوم المالية والمحاسبة

الفصيلة الرابعة

محاضرات موجهة لطلبة السنة أولى علوم اقتصادية

مقياس : الرياضيات-2-

الجزء الأول

إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى

السنة الجامعية: 2019 / 2020

الفهرس

1- البنى الجبرية .

1-1 عملية التركيب الداخلي:

E مجموعة، عملية تركيب داخلي في المجموعة E هي تطبيق معرف من الجداء $E \times E$ نحو E حيث يرفق بكل زوج مرتب $(a, b) \epsilon E \times E$ عنصرا $c \epsilon E$.

ونرمز لعملية التركيب الداخلي بـ $*$ أي :

$$*: E \times E \rightarrow E$$

$$(a, b) \longmapsto a * b = c$$

مثال-1- :

-عمليتي الجمع + و الضرب × هما عمليتي تركيب داخليتين في مجموعة الأعداد الطبيعية IN.

- العملية $*$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{Z}$ بـ : $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a*b = a^2 - 2b$

خواص:

لتكن المجموعة E المزودة بعملية التركيب الداخلي $*$.

-نقول أن العملية $*$هي عملية تبديليه إذا كان: $\forall a, b \epsilon E \quad : a * b = b * a$

مثال-2- :

الجمع عملية تبديليه في المجموعة IN لكن القسمة غير تبديليه في المجموعة IR^*

نقول أن العملية $*$ هي عملية تجميعية إذا كان $\forall a, b, c \epsilon E \quad : a * (b * c) = (a * b) * c$

- نقول أن العنصر $e \epsilon E$ هو عنصر *حيادي للعملية $*$ في المجموعة E إذا كان :*

$$\forall a \epsilon E \quad : a * e = e * a = a$$

مثال-4- :

الصفر هو العنصر الحيادي للجمع في $\mathbb{N}$ و الواحد هو العنصر الحيادي للضرب في $\mathbb{N}^*$

-نقول أن العنصر $a \epsilon E$ يقبل نظير في المجموعة وفق العملية $*$ إذا وجد العنصر $a^{-1} \epsilon E$ بحيث:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

مثال-5- :

نظير العنصر $a \epsilon IR$ بالنسبة للجمع هو العنصر $a^{-1} = -a$ *ونضير العنصر* $a \epsilon IR^*$

بالسبة للضرب هو العنصر $a^{-1} = \frac{1}{a}$

الزمرة :

نقول أن المجموعة G المزودة بعملية التركيب الداخلي $*$ هي زمرة إذا كان :

- العملية $*$ تجميعية على المجموعة G
- المجموعة G تحتوي على عنصر حيادي وفق العملية $*$
- لكل عنصر من G نظير في G وفق العملية $*$

ملاحظة : إذا كانت العملية $*$ تبديلية نقول أن $(G,*)$ هي زمرة تبديلية .

الحقل :

نقول أن المجموعة A المزودة بعملية تركيب داخلي نرمز لها ب $(+)$ و $(.)$ هي حقل إذا حققت :

- $(A,+)$ زمرة تبديلية .
- العملية الثانية$(.)$ تجميعية .
- العملية الثانية $(.)$ توزيعية على العملية الأولى $(+)$ أي :

$$\forall a,b,c \epsilon A : a.(b+c) = (a.b)+(a.c) \wedge (a+b).c = (a.c)+(b.c)$$

- *كل عنصر من A يختلف عن العنصر الحيادي لعملية الجمع 0_+ , يقبل نظير بالنسبة للعملية الثانية* $(.)$.

ملاحظة : *إذا كانت العملية الثانية* $(.)$ *تبديليه نقول أن الحقل* $(A,+,.)$ *تبديلي* .

1-2- الفضاءات الشعاعية.

تعريف الفضاء ألشعاعي:

ليكن IK حقل و E مجموعة غير خالية نقول أن E فضاء شعاعي على الحقل $IK = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ إذا تحقق:

- *$(E,+)$ زمرة تبديليه .*
- *إذا وجد تطبيق من $IK \times E$ نحو E نرمز له ب $(.)$ أي :*

$$(.): IK \times E \to E$$

$$(\propto, x) \longmapsto \propto . x$$

ويحقق الخواص التالية: $\forall \propto, \beta \in IK \quad \forall x, y \in E:$

$$\propto.(x+y) = \propto.x + \propto.y \quad , \quad (\propto + \beta).x = \propto.x + \beta.x$$

$$1.x = x \quad , \quad \propto.(\beta.x) = (\propto.\beta).x$$

حيث 1 هو العنصر الحيادي لعملية الضرب في الحقل IK.

تسمى عناصر الفضاء E بالأشعة وعناصر الحقل IK بالسلميات , ونكتب اختصارا E هو

IK-ف – ش.

تعميم الفضاء الشعاعي IR^n:

يمكن تعميم المثال السابق للحصول على الفضاء الشعاعي IR^n المعرف ب :

$$IR^n = IR \times IR \times \ldots \times IR = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1, x_2, \ldots, x_n \in IR\}$$

ونعرق قانون تركيب داخلي هو الجمع $+$ ب :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n$$

ونعرف قانون التركيب ثاني هو الجداء $\times$ ب :

$$\lambda \times (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \ldots, \lambda.x_n)$$

ملاحظة :

نرمز بـ O_E للعنصر الحيادي في الزمرة $(E,+)$ و بـ $O_{\mathbb{K}}$ للعنصر الحيادي لعملية الجمع في الحقل IK.

3-1 الفضاء الشعاعي الجزئي :

ليكن E ف – ش و F مجموعة جزئية من E , نقول أن F هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي E إذا تحقق :

- $O_E \epsilon F$.
- $\forall v,w \epsilon F \quad : v+w \epsilon F$
- $\forall v \epsilon F \quad , \quad \forall \lambda \epsilon IK \quad : \quad \lambda . v \epsilon F$

أو التعريف المكافئ لـ :

$$O_E \epsilon F$$
$$\forall \alpha, \beta \epsilon IK, \forall v,w \epsilon F \ : (\alpha . v)+(\beta . w) \epsilon F$$

مثال-1-:

في فضاء شعاعي $\mathbb{R}^3$ المجموعة : $F=\{(x.y.z) \epsilon IR^3 / \ x>0\}$

-. ليست فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي IR^3 لأن : $\propto . v \notin F$ وذلك عند أخذ مثلا $\propto = -1$ نجد:

$$\propto (x,y,z)=(-x,-y,-z), -x \ngtr 0$$

تمرين : ليكن $H=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=0\}$ - بين أن H فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟

جمع الفضاءات الشعاعية:

ليكن $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ n فضاء شعاعي جزئي من E إذن :

$$F=F_1+F_2+\cdots+F_n=\{x_1+x_2+\cdots+x_n \ , x_i \in F_i\}$$

هو كذلك ف . ش . ج من E يسمى مجموع الفضاءات الشعاعية الجزئية .

وإذا كان :

$$\begin{cases} 1) F = F_1 +_2 + \cdots + F_n \\ 2)\ F_i \cap (\sum_j F_j) = 0_E \ , \forall\, i, j \end{cases}$$

نقول أن E هو مجموع مباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية ونكتب : $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$

4-1 الارتباط الخطي و الاستقلال الخطي :

ليكنE ف – ش ولتكن $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ جملة أشعة في الفضاء E نقول عن عنصر V من E أنه مزج (تركيب) خطي لجملة الأشعة إذا أمكن كتابته على الشكل :

$$V = (\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + (\lambda_3 . V_3) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{i}} \mathrm{V}_{\mathrm{i}}$$

خلاصة :

الجملة $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ تولد E $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \forall \mathrm{V} \in \mathrm{E},\ \exists \lambda_i \epsilon IK\ / \\ V = (\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + (\lambda_3 . V_3) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{i}} \mathrm{V}_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

ليكنE ف – ش ولتكن $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ أشعة في الفضاء E

-. نقول أن الأشعة $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ مستقلة خطيا إذا كان :

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \epsilon IK$ بحيث:

$$(\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = O_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = O_{\mathbb{K}}$$

-. ونقول أن الأشعة $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ مرتبطة خطيا إذا كان :

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \epsilon\ IK$ ليست كلها معدومة بحيث:

$$(\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2) + (\lambda_3 . V_3) + \cdots + (\lambda_n . V_n) = O_E$$

مثال-1-:

الشعاعين $V_1 = (-1,1)$ و$V_2 = (1,2)$ مستقلين خطيا لأن :

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \epsilon\ IR$:

$$(\lambda_1.V_1) + (\lambda_2.V_2) = O_{IR^2} \Leftrightarrow \big(\lambda_1.(-1,1)\big) + \big(\lambda_2.(1,1)\big) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (-\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

أي أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

تمرين : لتكن الأشعة الثلاثة من IR^3 : $V_1 = (0,1,1)\ , V_2 = (-1,0,1)\ , V_3 = (1,-1,0)$

- هل هذه الأشعة مستقلة خطيا مثنى مثنى ؟

5-1 الأساس والبعد:

ليكنE ف – ش نقول عن جملة الأشعة $B = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$ أنها تشكل أساس لـ : E إذا تحقق:

1- B مستقلة خطيا.

2- B تولد E أي كل عنصر من E يكتب مزجا خطيا لـ E .

مرتبة جملة أشعة:

ليكنE ف – ش نسمي مرتبة جملة الأشعة $A = (V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\ )$ من E بعد الفضاء الشعاعي الجزئي من E المولد والمستقل بالجملة A .

وهي أكبر جملة مستقلة خطيا التي يمكن استخراجها من A ونرمز لهاب : $rang(A)$.

مثال-1-:

لتكن الجملة: $V_1 = (3,3,3)\ , V_2 = (4,5,6)\ , V_3 = (1,2,3)$

لدينا $V_2 - V_1 = V_3$ ومنه الجملة مرتبطة خطيا إذن ندرس الاستقلال الخطي لـ $V_1\ , V_2$ أي :

$\alpha V_1 + \beta V_2 = (0,0,0)$ ومنه $(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (4\beta, 5\beta, 6\beta) = (0,0,0)$ وعليه

$$\alpha = \beta = 0$$

أي أن V_1 , V_2 مستقلين خطيا وبالتالي مرتبة الجملة هي: $rang(A)$ =2 .

****

الفصل الثاني

1- التطبيقات الخطية :

ليكن F و E فضائين شعاعيين على نفس الحقل IK و $f: E \to F$ تطبيق

نقول أن f تطبيق خطي من E نحو F إذا كان :

$$1)\ \forall V_1, V_2 \epsilon\ E : f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$$

$$2)\ \forall\ V \epsilon\ E\ \forall, \lambda \epsilon\ IK\ :\ f(\lambda . V) = \lambda . f(V)$$

أو التعريف المكافئ التالي :

$$\forall V_1, V_2 \epsilon\ E , \forall \lambda_1, \lambda_2, \epsilon\ IK: f[(\lambda_1 . V_1) + (\lambda_2 . V_2)] = [\lambda_1 . f(V_1)] + [\lambda_2 . f(V_2)]$$

ملاحظة: إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F فإنه لدينا :

$$f(O_E) = O_F \quad \wedge \quad \forall\ V \in E : f\ (-V) = -f(V)$$

مثال -1-:

بين أن التطبيق التالي خطي , حيث : $f : IR \to IR$

$$x \longmapsto f(x) = 3 . x$$

لدينا :

$$\forall x_1, x_2 \epsilon IR \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \epsilon IR :$$

$$f[(\lambda_1 . x_1) + (\lambda_2 . x_2)] = f[\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2] = 3 . (\lambda_1 . x_1 + \lambda_2 . x_2)$$
$$= (3 . \lambda_1 . x_1 + 3 . \lambda_2 . x_2)$$

$$= [\lambda_1.(3.x_1)] + [\lambda_2.(3.x_2)] = [\lambda_1.f(x_1)] + [\lambda_2.f(x_2)]$$

**هل التطبيق التالي خطي , حيث :

$$f : IR^2 \to IR$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x.y$$

$$\forall\lambda\epsilon IR \quad , \quad \forall(x,y)\epsilon IR^2$$

لدينا:

$$f[\lambda.(x,y)] = f[(\lambda.x,\lambda.y)] = \lambda.x.\lambda y = \lambda^2.x.y$$

$$\neq \lambda.f(x,y) = \lambda.(x.y) = \lambda.x.y$$

ومنه f ليس تطبيق خطي .

النواة و الصورة :

ليكن fتطبيق خطي من E نحو F

- نسمي **نواة** التطبيق f المجموعة المرموز لها ب $\boldsymbol{Ker}(f)$ و المعرفة بـ :

$$\boldsymbol{Ker}(f) = \{x\epsilon E \ / \ f(x) = O_F\}$$

- نسمي **صورة** التطبيق f المجموعة المرموز لهابـ $\boldsymbol{Im}(f)$ و المعرفة بـ :

$$\boldsymbol{Im}(f) = \{y\epsilon F \quad / \ \exists x\epsilon E \ : \ y = f(x)\}$$

مثال-4- :

أحسب نواة التطبيق التالي :

$$f : IR^3 \to IR^2$$

$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x - y, y - z)$

$Ker(f) = \{(x, y, z)\epsilon IR^3 / \, f(x, y, z) = O_{IR^2}\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x, y, z)\epsilon IR^3 / \, f(x, y, z) = (0,0)\}$
$= \{(x, y, z)\epsilon IR^3 / (x - y, y - z) = (0,0)\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x, y, z)\epsilon IR^3 / x - y = 0 \ \wedge \ y - z = 0\}$
$= \{(x, y, z)\epsilon IR^3 / x = y \ \wedge \ y = z\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x, y, z)\epsilon IR^3 / \ x = y = z\}$

ومنه: $Ker(f) = \{(x, x, x)\epsilon IR^3 / \ x\epsilon IR\}$

نظرية: إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F , فإنه لدينا :

- f تطبيق غامر $\Leftrightarrow Im(f) = F$
- f تطبيق متباين $\Leftrightarrow Ker(f) = E$

تمرين-1- :

ليكن التطبيق الخطي المعرف بـ :

$f: IR^2 \rightarrow IR^2$

$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (3x - y, 2y - x)$

احسب $Ker(f)$ و $Im(f)$ واستنتج أن التطبيق f تقابلي

الحل:

لدينا :

$Ker(f) = \{(x, y)\epsilon IR^2 / \, f(x, y) = \ O_{IR^2}\}$

$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x, y)\epsilon IR^2 / \, f(x, y) = (0,0)\}$
$= \{(x, y)\epsilon IR^2 \ / (3x - y, 2y - x) = (0,0)\}$