# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف ـ المسيلة-

**كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير وعلوم المحاسبة**

**قسم علوم المالية والمحاسبة**

**الفصيلة الرابعة**


## محاضرات موجهة لطلبة السنة أولى علوم اقتصادية

# مقياس : الرياضيات-2-

الجزء الثاني


**إعداد الأستاذ : ديلمي مصطفى**



السنة الجامعية: 2019 / 2020

## الفهرس

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2/3x - y = 0 \ \wedge 2y - x = 0\}$$
$$= \{(x,y)\epsilon IR^2/\ x = 0 \wedge y = 0\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(0,0)\}$$

بما أن: $Ker(f) = \{(0,0)\} = \{O_{IR^2}\}$ فإن التطبيق $f$ متباين

لدينا : $Im(f) = \{(\alpha,\beta) \in IR^2/\ \exists(x,y) \in IR^2 : (\alpha,\beta) = f(x,y)\}$

$$\Leftrightarrow Im(f) = \{(a,b) \in IR^2/\ \exists(x,y) \in IR^2 : (a,b) = f(3x - y, 2y - x)\}$$

$$\Leftrightarrow Im(f) = \{(3x - y, 2y - x) \in IR^2/\ \ (x,y) \in IR^2\} = IR^2$$

بما أن: $Im(f) = IR^2$ فإن التطبيق $f$ غامر ومنه التطبيق $f$ تقابلي .

****************************

# الفصل الثالث

**3-المصفوفات و المحددات**

**3-1 المصفوفات:**

**- تعاريف :**

- ليكن IK حقل والعناصر $a_{ij} \in \text{IK},\ i = 1:m \ \ , j = 1:n$

تعرف المصفوفة بأنها مجموعة مربعة أو مستطيلة من الأعداد منتظمة بشكل سطور و أعمدة.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{i} = \text{سطر} \ , \qquad \mathbf{j} = \text{عمود}}$

إذن الشكل التالي: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة ذات $m$ سطر و $n$ عمود ونقول

أيضا مصفوفة من النوع $(m,n)$ ونرمز بـ : $A \in IK^{m.n}$

حيث السطر الأول هو: $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ \dots a_{1n})$

والعمود الأول هو: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

كما نرمز للمصفوفة بـ :

$A = (a_{ij})\ i = 1{:}m\ ,\ \ j = 1{:}\mathrm{n}$ مع $a_{ij}$ هو العنصر الذي يقع في السطر i والعمود j .

و بصفة عامة نكتب : $A \in M_{m,n}\ (IK)$

- نقول أن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متساويتين اذا كان :

$\forall i = 1{:}m, \forall j = 1{:}\mathrm{n}{:}\ a_{\mathrm{ij}} = \mathrm{b}_{\mathrm{ij}}$

- نقول أن المصفوفة $A = (a_{ij})$ معدومة اذا كان : $a_{\mathrm{ij}} = 0$ : $\forall i = 1{:}n$

- نقول أن المصفوفة $A = (a_{ij})$ مربعة اذا كان : n=m

- نقول عن المصفوفة $A = (a_{ij})$ المربعة أنها :

* مثلثية سفلى إذا كان : $a_{\mathrm{ij}} = 0$ $\forall j > i$ :

* مثلثية علوية إذا كان : $a_{\mathrm{ij}} = 0$ $\forall j < i$ :

*قطرية إذا كان : $a_{\mathrm{ij}} = 0$ : $\forall j \neq i$

- المصفوفة الحيادية هي المصفوفة القطرية مع كل عناصر القطر تساوي 1 ونرمز لها بـ:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- منقول المصفوفة $A = (a_{ij})$ هي المصفوفة المرموز لها بـ $A^t$ والمعرفة ب $A^t = (a_{ji})$

**مثال-1- :**

منقول المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

- نقول أن المصفوفة $A = (a_{ij})$ تناظرية اذا كان : $A = A^t$ .

وضد التناظرية إذا كان : $A = -A^t$ .

### 3-1-1 عمليات على المصفوفات :

- **الجمع :**

جمع أو طرح المصفوفتين $A = (a_{ij})_{m,n}$ و $B = (b_{ij})_{m,n}$ هي المصفوفة المعرفة بـ :

$$c = A \mp B \quad \text{حيث} \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

**مثال-2- :** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

- **جداء مصفوفة بعدد:**

جداء المصفوفة $A = (a_{ij})_{m,n}$ بالعدد الحقيقي $\lambda$ هي المصفوفة المعرفة بـ :

$$\lambda . A = (\lambda . a_{ij})_{m,n}$$

**مثال-3- :** $2.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

- **جداء مصفوفتين :**

جداء مصفوفتين $A=(a_{ij})_{m,n}$ , $B=(b_{ij})_{n,p}$ هي المصفوفة $C=(c_{ij})_{m,p}$ المعرفة بـ :

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,.\,b_{kj}$$

**مثال-4- :**

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\2&7\end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\7&6\end{pmatrix}$$

عموما لدينا: $A.B\neq B.A$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\2&1\\1&4\end{pmatrix}$$ لكن في هذه الحالة الجداء $A.B$ غير معرف

**خواص :**

$$(A+B)^t=A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}=B^{\mathrm{t}}+A^{\mathrm{t}}\ ,\qquad (\lambda.\mathrm{A})^{\mathrm{t}}=\lambda.A^{\mathrm{t}}\ \forall\lambda\in\mathrm{IR}\ ,$$

$$(\mathrm{A.B}).\mathrm{C}=\mathrm{A}.(\mathrm{B.C})$$

$$(A.B)^t=B^{\mathrm{t}}.A^{\mathrm{t}},\quad A.(B+C)=A.B+A.C\quad ,\quad (B+C).A=B.A+C.A$$

**مثال-5- :**

لتكن المصفوفتين : $B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}$ , $A=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$

أحسب $(A+B)^t$ , $A+B$ , $B.A$ , $A^{\mathrm{t}},A.B$ و هل المصفوفة $A$ هي تناظرية

لدينا : المصفوفة $A$ ليست تناظرية $\neq A\Rightarrow$ $A^{\mathrm{t}}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{pmatrix}$

**- مرتبة المصفوفة :**

لتكن المصفوفة $A \in M_{m,n}$ نسمي مرتبة المصفوفة ونرمز لها بـ $rg(A)$ عدد أعمدة أو أسطر المصفوفة $A$ المستقلة خطيا

**2-1-3 مقلوب مصفوفة مربعة :**

يقصد به المعكوس للمصفوفة بحيث يكون حاصل ضرب المصفوفة في معكوسها يساوى مصفوفة الوحدة أي أن المصفوفة المربعة $A$ قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة مربعة نرمز لها بـ $A^{-1}$ بحيث :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

**مثال-7- :**

أوجد مقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

نضع: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ومنه لدينا :

$$\mathrm{A.A^{-1} = I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1, b = -1, c = 0, d = 1$$

ومنه : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لتكن المصفوفتين $A$ و $B$ القابلتين للقلب , لدينا الخواص التالية :

$$(A^{-1})^t = (A^{\mathrm{t}})^{-1} \quad ,(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A} \quad ,(\mathrm{A.B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}^{-1} \;, \qquad \mathrm{I}^{-1} = I$$

**2-3 المحددات :**

**1-2-3 تعريف المصفوفة المستخرجة :**

لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_m$ , نرمز بـ $A_{\mathrm{ij}}$ للمصفوفة المستخرجة من المصفوفة $A$ من خلال حذف السطر رقم $i$ و العمود $j$.

**مثال-1- :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ , $A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

**2-2-3 تعريـف المحدد :**

لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$

- من أجل $m=1$ فان محدد المصفوفة $A$ هو العدد المرموز له بـ :

$$\det(A) = |A| = a_{11}$$

- من أجل $m=2$ فان محدد المصفوفة $A$ هو العدد المرموز له بـ :

$$\det(A) = |A| = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$$

- من أجل $m > 2$ فان محدد المصفوفة $A$ هو العدد المرموز له بـ :

$$\det( A) = |A| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j0}\ a_{ij0} . |A_{ij0}|$$

حيث $j_0$ هو عمود مختار عشوائيا من بين أعمدة المصفوفة A

**مثال-2- :**

أحسب المحددات التالية : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 4.1 = 0$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +1. (1 - 0) - 2. (0 - 2) + 1. (0 - 1) = 4$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = +0. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} - (-1). \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -18$$

**خواص :**

إذا كانت A مصفوفة مثلثيه سفلية أو علوية أو قطرية فان محددها يساوي جداء عناصرها القطرية

**مثال-3- :**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.4.3.2 = 24 \text{ و } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

**خواص :**

- إذا كانت المصفوفة B هي حاصل ضرب سطر أو عمود واحد من المصفوفة A بالعدد $\lambda$ فان :

$$|B| = \lambda.|A|$$

- وبصفة عامة إذا كانت المصفوفة B هي حاصل ضرب المصفوفة $A \epsilon M_m$ بالعدد $\lambda$ فان :

$$|B| = \lambda^m.|A|$$

- إذا بدلنا ترتيب سطرين أو عمودين في المصفوفة A فان : $|B| = -|A|$

**مثال-4- :**

لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$|A| = -2 \ , |B_1| = 5.|A| = -10 \ , \ |B_2| = 2^2.|A| = -8 \ , \ |B_3| = -|A| = +2$$

- إذا كان في المصفوفة $A$ سطر أو عمود معدوم فان : $|\mathrm{A}| = 0$

$$|A.B| = |A|.|B| \qquad , \qquad |A| = |A^t|$$

**مثال-5- :**

من أجل $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ لدينا : $A.B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ومنه : $|A| = -1 \ , \ |B| = 2 \Rightarrow |A.B| = |\mathrm{A}|.|\mathrm{B}| = (-1).2 = -2$

**تعريف :**

نقول أن المصفوفة A نظامية إذا كان : $|A| \neq 0$

**نظرية :**

إذا كانت المصفوفة A مربعة فانه لدينا :

A مصفوفة قابلة للقلب $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = m$

**نتيجة:** $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

**3-2-3 تعريف المصفوفة المرافقة :**

لتكن $A \in M_m$ مصفوفة مربعة

نسمي مصفوفة مرافقة لـ A المصفوفة المعرفة بـ : $C^t = (c_{ij})^t$ حيث كل :

$c_{ij} = (-1)^{i+j} . |A_{i\,j}|$ و $A_{ij}$ هي مصفوفة مستخرجة من A وذلك بحذف السطر i والعمود j.

**نظرية :** إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب فان : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} . C^t$

**مثال-6-:**

من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ لدينا $|A| = 64 \neq 0$ ومنه A قابلة للقلب

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{11} = (-1)^{1+1} . |A_{11}| = 12$ , $c_{12} = (-1)^{1+2} . |A_{12}| = 6$ ,

$c_{13} = (-1)^{1+3} . |A_{13}| = -16$

$c_{21} = (-1)^{2+1} . |A_{21}| = 4$ , $c_{22} = (-1)^{2+2} . |A_{22}| = 2$ ,

$c_{23} = (-1)^{2+3} . |A_{23}| = 16$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}.|A_{13}| = 12 \ ,$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}.|A_{32}| = -10 \ , c_{33} = (-1)^{3+3}.|A_{33}| = 16$$

إذن $$C^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

**مثال-7-:**

من أجل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ لدينا $|A| = 1 \neq 0$

ومنه A قابلة للقلب لنحسب عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$

لدينا : $C_{11} = (-1)^{1+1}.|A_{11}| = 2 \ , \quad c_{12} = (-1)^{1+2}.|A_{12}| = -1$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}.|A_{21}| = -1 \ , \quad c_{22} = (-1)^{2+2}.|A_{22}| = 1$$

إذن $$c^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{1}.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## سلسلة تمارين

**التمرين الأول:** لتكن المصفوفتين: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

1. أوجد كلا من $A^t + B^t, (A+B)^t, B^t, A^t$ .
2. أوجد $B^t.A^t$ ثم $(A.B)^t$ ماذا تستنتج قارن بين $A, (A^t)^t$ .
3. أحسب $B^{-1}, A^{-1}$ ثم $B^{-1}.A^{-1}$ و $(A.B)^{-1}$ ماذا تستنتج.

**التمرين الثاني:** لتكن : $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. أحسب $A - B, 3A, -B, B^t, A^t$ .
2. هل يمكن حساب $A.B$ أحسب $A.B^t$ .

**التمرين الثالث:** لتكن المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1-أحسب محدد $A$.

2-أوجد مرتبة $A$ .

3-أوجد $A^{-1}$ .

**التمرين الرابع:** لتكن المصفوفة التالية : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1- أثبت أن : $A^2 = 2I + A$ ثم استنتج أن $A$ قابلة للقلب .

2- عبر عن $A^{-1}$ بدلالة $A$ .

*********************************

# الفصل الرابع

## 1- جملة المعادلات الخطية:

من بين أهم تطبيقات المحددات هو حل جملة المعادلات الخطية من الشكل **A.X=b** حيث **A** مصفوفة من النمط ***(m،n)*** قابلة للقلب و **b** شعاع من $\mathbb{R}^m$ و **X** شعاع مجهول من $\boldsymbol{R}^m$.

### 1-4 طريقة كرامر:

تعطى مركبات الشعاع **X** بالعبارة التالية: $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ حيث $A_i$ هي المصفوفة **A** مع تعويض العمود رقم **i** بالشعاع **b**.

**حل جملة المعادلات باستخدام المحددات ( كرامر ) :**

**مثال-1- :**

أوجد حلول جملة المعادلات

$$\begin{cases} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = 29 \end{cases}$$

**الحل :**

1- نقوم بحساب المحدد :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-6) = 20 + 18 = 38$$

2- نحسب $\det(A_1)$ :

نعوض عن العمود x في المحدد بالشعاع $(15\,,\,-29)^{\perp}$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix} = 15(4) - (-29)(-6) = -114$$

$$x = \frac{-114}{38} = -3$$

3- نحسب $\det(A_2)$ :

نعوض عن العمود y في المحدد بالشعاع $(15\,,\,-29)^{\perp}$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix} = 5(-29) - 3(15) = -190$$

$$y = \frac{-190}{38} = -5$$

**مثال-2- :**

أوجد حلول جملة المعادلات :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

**الحل :**

1- نحسب $\det(A)$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [(1 \times 5 \times -1) + (2 \times 3 \times 2) + (1 \times 3 \times 7)]$$
$$- [(2 \times 5 \times 1) + (7 \times 3 \times 1) + (-1 \times 3 \times 2)] = 3$$

-2 نحسب $|A_1|$ :

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -87$$

$$x = \frac{-87}{3} = -29$$

-3 نحسب $|A_2|$ :

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$$

$$y = \frac{33}{3} = 11$$

-4 نحسب $|A_3|$ :

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

$$z = \frac{33}{3} = 11$$

**مثال-3-:** حل الجملة الخطية **A.X=b** حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix} \ , \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ ,$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix}$$

لدينا الجملة **A.X= b** تملك حل وحيد لأن $\boldsymbol{|A| = 6 \neq 0}$ اذن :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 15 & 3 & 8 \\ 21 & 3 & 11 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 15 & 8 \\ 1 & 21 & 11 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 3 & 21 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

**ومنه حل الجملة هو:** $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

2-4 **طريقة استعمال المقلوب:**

نقوم بحساب مقلوب المصفوفة A فيعطى الحل بالشكل التالي: $X = A^{-1}.b$

**مثال-4-:** حل الجملة التالية: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ إذن يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نحسب أولا: $\boldsymbol{A^{-1}}$ فنجد: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ومنه حل الجملة هو:

$$X = A^{-1}.b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

******************************************

**امتحان السداسي الثاني – مقياس الرياضيات -02-    العام الدراسي: 2018/2017**

**التمرين الأول(6 نقاط):** H مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ حيث:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \leq 0 \}$$

1- هل H فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$ .

2- أوجد العدد الحقيقي k حتى يكون الشعاع c تركيب خطي للشعاعين v,w

$$c = (1, -2, k)\ ,\ v = (1,1,1)\ ,\ w = (1,2,3)$$

**التمرين الثانى(8نقاط):** لتكن المصفوفة A حيث : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

لتكن المصفوفة B حيث : $B^t = 4.A^t$

1- أحسب $\det(B)$ .

2- أوجد العدد الحقيقي $\propto$ حيث : $A^3 - 4A + \propto I_3 = 0_3$

3- استنتج أن A قابلة للقلب ثم أوجد $A^{-1}$ .

4- باستعمال $A^{-1}$ حل المعادلة $A.X = b$ حيث :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ ,\ b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**التمرين الثالث (6نقاط):** ليكن التطبيق الخطي التالي حيث :

$$f : IR^2 \to IR^2$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$$

1- عين : $Im(f)\ ,ker(f)$ .

2- أحسب: $dimIm(f)\ ,dim\ ker(f)$

كلية العلوم الاقتصادية السنة الجامعية : 2021/2020

**سنة أولى جذع مشترك LMD.**

قسم علوم المالية و المحاسبة ( الفصيلة الرابعة)

## سلسلة تمارين الفصل الثانى مع الحلول

### التمرين الأول:

في الفضاء الشعاعي $IR^2$ نعتبر المجموعة الجزئية.

$$F = \{(x,y)\epsilon IR^2 / \ x + y = 0\}$$

بين أن $F$ هو فضاء جزئي من الفضاء الشعاعي$IR^2$ .

الحل

$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)\epsilon F$ لأن: $0 + 0 = 0$

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)\epsilon F : x_1 + y_1 = 0 \ \wedge \ x_2 + y_2 = 0$$

لدينا : $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\epsilon F$ لأن:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

ومنه: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\epsilon F$

$$\forall (x_1, y_1)\epsilon F \quad , \quad \forall \lambda \ \epsilon IR : x_1 + y_1 = 0$$

لدينا : $\lambda.(x_1, y_1) = (\lambda.x_1, \lambda.y_1)\epsilon F$ لأن :

$$(\lambda.x_1) + (\lambda.y_1) = \lambda.(x_1 + y_1) = \lambda.0 = 0$$

ومنه:

$$\forall (x_1, y_1)\epsilon F \quad , \quad \forall \lambda \ \epsilon IR : \ \lambda.(x_1, y_1)\epsilon F$$

## التمرين الثاني:

في الفضاء الشعاعي $IR^3$ الأشعة $V_1 = (1,3,1)\,, V_2 = (0,1,-1)\,, V_3 = (2,5,3)$

هل هي مرتبطة خطيا .

## الحل

لدينا : $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon\ IK$ :

$$(\lambda_1.V_1) + (\lambda_2.V_2) + (\lambda_3.V_3) = O_{IR^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$$

ومنه بوضع $\lambda_3 = 1$ نجد $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_1 = -2$ , أي انه لدينا :

$$\exists \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1\ \epsilon \mathrm{IR} :$$

$$-2.V_1 + 1.V_2 + 1.V_3 = O_{IR^3} = (0,0,0)$$

## التمرين الثالث:

بين أن التطبيق التالي خطي , حيث : $f : IR^2 \to IR^2$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x - y, x + y)$$

## الحل

لدينا:

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\epsilon IR^2$$

$$f[(x_1,y_1) + (x_2,y_2)] = f[(x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

$$= \big(2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\big)$$

$$= \big((2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\big)$$

$$= \big((2x_1 - y_1), (x_1 + y_1)\big) + \big((2x_2 - y_2), (x_2 + y_2)\big)$$

$$= f\big((x_1, y_1)\big) + f\big((x_2, y_2)\big)$$

لدينا من جهة أخرى :

$\forall (x,y) \epsilon IR^2 \quad , \forall \lambda \epsilon IR$

$$f[\lambda.(x,y)] = f[(\lambda.x, \lambda.y)] = (\lambda.2x - \lambda.y, \lambda.x + \lambda.y) = \lambda.(2x - y, x + y)$$
$$= \lambda. f(x,y)$$

ومنه $f$ تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $IR^2$

**التمرين الرابع:**

ليكن التطبيق التالي حيث :

$f: IR^2 \to IR$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = x - y$

1- بين أنه خطي
2- أوجد $Im(f), ker(f)$
3- هل هو تقابلي

**الحل:**

1- تبيان أن التطبيق خطي

لدينا:

$\forall (x,y) \epsilon IR^2 \quad , \quad \forall \lambda \epsilon IR :$

$$f[v + w] = f[(x,y) + (x',y')] = f[(x + x', y + y')] = (x + x') - (y + y')$$

$$= (x - y) + (x' - y') = f(v) + f(w)$$

$$f[\lambda . v] = f[(\lambda . x, \lambda . y)] = \lambda . x - \lambda y = \lambda(x - y) = \lambda f(v)$$

ومنه $f$ تطبيق خطي.

إيجاد الصورة والنواة:

**1) النواة:**

$$\boldsymbol{Ker}(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2 / f(x,y) = O_{\mathbb{R}}\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2 / f(x,y) = 0\} = \{(x,y)\epsilon IR^2 /(x - y) = 0\}$$

$$\Leftrightarrow Ker(f) = \{(x,y)\epsilon IR^2 / x = y\} = \{(x,x) = x(1,1) , x\epsilon\mathbb{R}\}$$

$Ker(f)$ مولدة بـ $(1,1)$ وهو مستقل خطيا إذن $\{(1,1)\}$ أساس لـ $ker\ (f)$

ومنه $dimker(f) = 1 \neq 0$ وبالتالي $f$ ليس متباين .

**2)الصورة:**

لدينا : $\boldsymbol{Im}(f) = \{a \in \mathbb{R}/ \exists(x,y) \in IR^2 : a = f(x,y)\}$

$$\Leftrightarrow Im(f) = \{a \in \mathbb{R}/ \exists(x,y) \in IR^2 : a = x - y\}$$

$$\Leftrightarrow Im(f) = \{a \in \mathbb{R}/ \ a = x - y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

ومنه : $dimIm(f) = 1$

بما أن $Im(f) = \mathbb{R}$ فإن التطبيق $f$ غامر ومنه التطبيق $f$ ليس تقابلي .

**التمرين الخامس:** *لتكن المصفوفتين* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

1- أوجد: $A^t, B^t, (A+B)^t, A^t + B^t$ ؟ ثم أوجد: $(A.B)^t, B^t.A^t$ وماذا تستنتج ؟

الحل

إيجاد $A^t, B^t, (A+B)^t, A^t + B^t$

ومنه $A+B=\begin{pmatrix}3 & 6\\3 & 9\end{pmatrix}$ ثم لدينا $B^t$ نفس الشيء بالنسبة ل $A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}3 & 3\\6 & 9\end{pmatrix}\ ,A^t+B^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\6 & 9\end{pmatrix}$$

إيجاد: $(A.B)^t$ نحسب أولا $A.B$ نجد :. $A.B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\6 & 14\end{pmatrix}$

وعليه نجد : $(A.B)^t=\begin{pmatrix}5 & 6\\12 & 14\end{pmatrix}$

إيجاد: $A^t.B^t$ مما سبق نجد : $A^t.B^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\12 & 17\end{pmatrix}$

لكن $B^t.A^t=\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\12 & 14\end{pmatrix}$

نستنتج أن : $(A.B)^t=B^t.A^t$

**التمرين السادس**: *لتكن المصفوفتين* $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\1 & 5 & 0 & 3\\2 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ و $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\4 & 0 & 2 & 1\\2 & -5 & 1 & 2\end{pmatrix}$

-أحسب: $A^t,B^t,-B,A+B,A-B,3.A$ ؟ هل يمكن حساب $A.B$ ؟ أحسب : $A.B^t$ ؟

## الحل

$$A^t=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\-4 & 5 & 2\\1 & 0 & 3\\2 & 3 & -1\end{pmatrix},B^t=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 0 & -5\\-1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix},-B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\-4 & 0 & -2 & -1\\-2 & 5 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2 & 2\\-3 & 5 & -2 & 2\\0 & 7 & 2 & -3\end{pmatrix},A+B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0 & 2\\5 & 5 & 2 & 4\\4 & -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

$$3.A=3.\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\1 & 5 & 0 & 3\\2 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -12 & 3 & 6\\3 & 15 & 0 & 9\\6 & 6 & 9 & -3\end{pmatrix}$$

لا يمكن حساب $A.B$ لأن عدد أعمدة $A$ لا يساوي عدد أسطر $B$

$$A.B^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1+(-4).2+1.(-1)+2.(0) & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

هذا العنصر موجود في السطر الأول العمود الأول وبالتالي نقوم بضرب السطر الأول من $A$ في العمود الأول من $B$ مع الجمع و نكمل بنفس الطريقة لإيجاد باقي العناصر.

**التمرين السابع**: *لتكن المصفوفتين:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1- هل $A, B$ قابلتين للقلب ؟ ثم أحسب مقلوبيهما في حالة الوجود مستعملا المصفوفة المرافقة؟

2- لتكن المصفوفة $C$ حيث : $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ أوجد مرتبة $C$ ؟

## الحل

1- لكي نثبت أن $A, B$ قابلتين للقلب أم لا يجب حساب المحدد أولا فإذا كان المحدد يختلف على الصفر فهي قابلة للقلب و ان كان يساوي الصفر فهي غير قابلة للقلب. =0.(-1)-1.(-1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

ومنه المصفوفة $A$ قابلة للقلب

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ وبالتالي $B$ غير قابلة للقلب.

إذن يمكن حساب مقلوب $A$ باستعمال المصفوفة المرافقة وعليه:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times C^t$$

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{12} = (-1)^{1+2}.|A_{12}| = 2$ ، $c_{11} = (-1)^{1+1}.|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ ،

$$c_{13} = (-1)^{1+3}.|A_{13}| = -1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}.|A_{21}| = 1 \quad , \quad c_{22} = (-1)^{2+2}.|A_{22}| = -1 \ ,$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}.|A_{23}| = 2$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}.|A_{31}| = 1 \ ,$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}.|A_{32}| = -1 \ , c_{33} = (-1)^{3+3}.|A_{33}| = -1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن
$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**-2 مرتبة $C$** : نلاحظ أن $C$ تحتوي على أربعة أسطر وثلاث أعمدة وعليه فإن مرتبتها هي أكبر عدد من الأشعة السطرية أو العمودية المستقلة خطيا وبالتالي فمرتبتها $rang(C) \leq 4$.

بأخذ الأشعة السطرية نجد أنها مرتبطة خطيا وبالتالي $rang(C) \leq 3$

نحسب محدد المصفوفة المستخرجة ولتكن: $C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ومنه نجد : $|C_1| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$

بما أن محدد $C_1$ يختلف عن الصفر فإن : $rang(C_1) = 3$ وبالتالي مرتبة $C$ من مرتبة $C_1$

إذن : $rang(C) = 3$.

**التمرين الثامن**: *لتكن المصفوفتين:* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

- أحسب محددي $A, B$ ؟ ثم تأكد من أن $|B| = 4^3|A|$ ولماذا ؟

**الحل**

**حساب محددي $A, B$** : نلاحظ أن كل من $A, B$ عبارة عن مصفوفتين مثلثيتين علويتين وبالتالي كما أخذنا في الدرس أن محدديهما عبارة عن جداء عناصر القطر الرئيسي وعليه نجد:

$|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6, \ \ |B| = 4 \times 8 \times 12 = 384$

التأكد من أن : $|B| = 4^3|A|$ بالفعل $|B| = 384 = 4^3.|A| = 4^3 \times 6 = 384$

السبب لأن $A, B$ كلاهما من النمط $(3, 3)$ بالإضافة إلى أن $B = 4 \times A$.

**التمرين التاسع:** لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

1- أحسب محدد A ثم أوجد $A^{-1}$؟

باستعمال $A^{-1}$ أوجد حلا للجملة $A.X = b$ حيث: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ؟

**الحل**

1-حساب المحدد ل: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

نتبع نفس الطريقة في حلول التمارين السابقة نجد أن : $|A| = 64 \neq 0$ ومنه A قابلة للقلب

**إيجاد المقلوب (المعكوس) ل: $A$**

إذن يمكن حساب مقلوب $A$ باستعمال المصفوفة المرافقة وعليه:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times C^t$$

لنحسب الآن عناصر المصفوفة $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$

لدينا : $c_{11} = (-1)^{1+1}.|A_{11}| = 12 \ , \ \ c_{12} = (-1)^{1+2}.|A_{12}| = 6 \ ,$

$c_{13} = (-1)^{1+3}.|A_{13}| = -16$

$c_{21} = (-1)^{2+1}.|A_{21}| = 4 \ , \ \ c_{22} = (-1)^{2+2}.|A_{22}| = 2 \ ,$

$c_{23} = (-1)^{2+3}.|A_{23}| = 16$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}.|A_{13}| = 12\ ,$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}.|A_{32}| = -10\ , c_{33} = (-1)^{3+3}.|A_{33}| = 16$$

إذن $C^t = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C^t = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

باستعمال $A^{-1}$ إيجاد حلا للجملة $A.X = b$ حيث: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$A^{-1}.A = I$

نعلم أن ( أنظر الدرس) $A.X = b \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.b \Rightarrow X = A^{-1}.b$

مصفوفة الوحدة $I$

وبالتالي نحصل على : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{64}.\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{16} \\ \frac{-15}{32} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

<u>التمرين العاشر</u>: حل الجملة التالية:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

## <u>الحل</u>

1) حل الجملة: $\begin{cases} 1.x_1 + 1.x_3 = 1 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 2 \\ 1.x_2 + 1.x_3 = 3 \end{cases}$ إذن يمكن كتابة هذه الجملة على الشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نحسب أولا: $\boldsymbol{A^{-1}}$ (أنظر التمارين السابقة كيفية إيجاد $A^{-1}$) فنجد: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ومنه حل الجملة هو:

$$X=A^{-1}.b=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

2) حل الجملة الثانية إما بنفس الطريقة أو إستعمال طريقة كرامر رأينا في حل الجملة الأولى طريقة المقلوب وبالتالي نستعمل طريقة كرامر لحل الجملة الثانية وعليه:

من الجملة $\begin{cases}2x+1.y-3z=5\\3x-2y+2z=5\\5x-3y-z=16\end{cases}$ نجد: $b=\begin{pmatrix}5\\5\\16\end{pmatrix}$ , $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ , $A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\3&-2&2\\5&-3&-1\end{pmatrix}$

طريقة كرامر تعتمد على العبارة التالية: $x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ حيث $A_i$ هي المصفوفة **A** مع تعويض العمود رقم **i** بالشعاع **b.**

1- نحسب $\det(A)$ :

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-3\\3&-2&2\\5&-3&-1\end{vmatrix}=26$$

2- نحسب $|A_1|$ :

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}5&1&-3\\5&-2&2\\16&-3&-1\end{vmatrix}=26\Rightarrow x=\frac{26}{26}=1$$

3- نحسب $|A_2|$ :

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}2&5&-3\\3&5&2\\5&16&-1\end{vmatrix}=-78\Rightarrow y=\frac{-78}{26}=-3$$

4- نحسب $|A_3|$ :

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}2&1&5\\3&-2&5\\5&-3&16\end{vmatrix}=-52\Rightarrow z=\frac{-52}{26}=-2$$

**ومنه الحل هو** : $X=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

***)التمرين الحادي عشر:** هل الشعاع $c=(3,-5,2)$ هو تركيب خطي للشعاعين :

$$w=(2,0,-1)\ ,\ v=(1,5,0)$$

من أجل أي قيمة ل : $k$ يكون الشعاع $c=(1,-2,k)$ عبارة خطية للشعاعين:

$a = (1,-1,1), b = (1,2,3)$

***)التمرين الثاني عشر:** ليكن التطبيق الخطي التالي حيث :

$f : IR^2 \to IR^2$

$(x,y) \mapsto f(x,y) = (2x-4y, x-2y)$

1- عين : $Im(f)$ , $ker(f)$ .

أحسب: $dimIm(f)$ , $dim\, ker(f)$

***)التمرين الثالث عشر:** لتكن الأشعة : $a = (1,2,3), b = (4,5,6), c = (3,3,3)$

أوجد مرتبة الجملة : $X = \{a,b,c\}$

هل الأشعة : $\{a,b,c\}$ تولد $\mathbb{R}^3$.

***)التمرين الرابع عشر:** لتكن المجموعتين:

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z = 0\}$$

$$H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 0\}$$

برهن أن $H_1, H_2$ فضاءين شعاعيين جزئيين.

استخرج أساس لكل من $H_1, H_2$ .

حدد بعدي $H_1, H_2$.

**ملاحظة: التمارين ذات العلامة (* توجه للطلبة**

**التمرين الخامس عشر**:** موجه للطلبة

لتكن المصفوفات : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

و المصفوفة C حيث : $C = \begin{pmatrix} \frac{\propto}{2} & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2\propto & -2 \end{pmatrix}$ و $\propto$ عدد حقيقي.

1- أوجد كلا من $A^t, B^t, (A+B)^t, A^t + B^t$ , $A+B$ ؟

2 - أحسب $A.B$ أحسب $A.B^t$ . ؟

3- أحسب محدد $A$. ؟

4- أوجد مرتبة $A$ . ؟

5- أثبت أن : $A^2 = 2I + A$ ثم استنتج أن $A$ قابلة للقلب . ؟

6- عبر عن $A^{-1}$ بدلالة $A$ . ؟

7- أوجد المصفوفة D حيث : $D = 2C$ . ؟

8- أحسب $\det(\mathrm{D})$ وأستنتج $\det(\mathrm{C})$ . ؟

9- أوجد قيم $\propto$ حتى تكون D قابلة للقلب. ؟

10- أوجد المصفوفة $\mathrm{D}^{-1}$ من أجل $\propto = 0$ . ؟

11- حل الجملة الخطية **A.X=b** حيث: $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$؟

12- عين كلا من $a, b, c$ التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للجملة :

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}$$