

Chapitre II

MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES CONTINUS.

II.1 Introduction

Pour pouvoir analyser le comportement des systèmes asservis, il est intéressant de disposer d'un modèle mathématique permettant de décrire leurs comportements dynamiques. En effet, l'étude des systèmes dynamiques revient à étudier les relations mathématiques qui les gouvernent (en l'occurrence des équations différentielles). La manipulation d'équations différentielles étant complexe. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant, qui est la transformation de Laplace.

Le but de ce chapitre n'est pas d'étudier en détails la modélisation des systèmes dynamiques. On se contentera donc de savoir modéliser rapidement et simplement le système (modèles élémentaires) et d'apprendre à écrire à partir des équations différentielles, les fonctions de transfert pour différents types de systèmes : électriques, mécaniques, ou électromécaniques...etc, et d'établir par la suite leurs schémas fonctionnels et/ou leurs graphes de fluences de signaux adéquats.

II.2 Modélisation mathématique des systèmes

II.2.1 Définition : Le modèle mathématique d'un système dynamique peut être défini comme étant un ensemble d'équations représentant le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. Il est obtenu en écrivant les lois de la physique qui régissent le comportement du système (lois de Kirchhoff, lois fondamentales de la dynamique, bilan des forces, de matière, ...etc.).

II.2.2 Étapes d'obtention du modèle de comportement :

La démarche globale pour établir le modèle comportemental d'un système donné peut se résumer de la manière suivante.

- Définir le système étudié et ses composants élémentaires ;
- Formuler le modèle mathématique idéal (modèle de connaissance) et dresser la liste des hypothèses simplificatrices à retenir ;
- Écrire les lois de la physique régissant le comportement du système et les équations différentielles et algébriques associées.
- Définir le modèle dédié à l'automatique (fonction de transfert) : modèle de comportement.

Remarque : Le modèle mathématique devra être suffisamment précis pour refléter le comportement réel du système. On voit donc apparaître un compromis précision/complexité dans l'étape de modélisation. De plus, étant donné le caractère non-linéaire des processus réels, on est naturellement amenés à faire des simplifications telles que la linéarisation autour d'un point de fonctionnement (développement en série de Taylor).

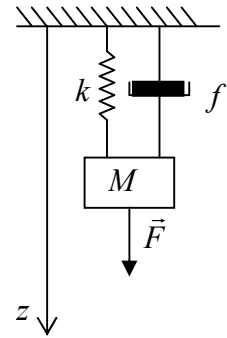
Exemple:

On considère les deux systèmes physiques suivants :

- a) Une masse M , retenue à un mur par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux f et un ressort d'amortissement k que l'on tire par une tension F vers le bas.

Entrée : Force appliquée à la masse (F).

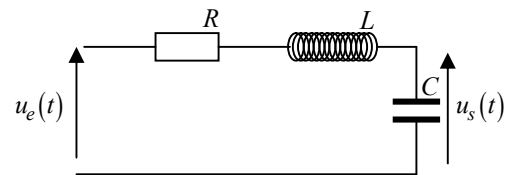
Sortie : Position de la masse (z).



- b) Un circuit RLC série.

Entrée : Tension aux bornes du circuit $u_e(t)$.

Sortie : Tension aux bornes du condensateur $u_s(t)$.



Écrire les équations différentielles régissant la dynamique des sorties de ces 2 systèmes.

Solution:

Cas du système (a) :

Par application de loi fondamentale de la dynamique (Mouvement de translation) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F - k.z(t) - f.\dot{z}(t) = M\ddot{z}(t) \text{ Qu'on peut écrire :}$$

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f \frac{dz(t)}{dt} + k.z(t) = F, \text{ Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de second ordre.}$$

Cas du système (b) :

Par application de la deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles) on obtient :

$$\sum u_i = 0 \Rightarrow u_e(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - u_s(t) = 0$$

$$\text{avec } u_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow i(t) = C \frac{du_s(t)}{dt}$$

D'où l'équation mathématique qui lie l'entrée et la sortie du circuit s'écrit :

$$LC \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t), \text{ Il s'agit aussi d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de second ordre.}$$

II.2 Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est l'une des outils mathématiques qui permet de résoudre aisément les équations différentielles dès que le système étudié devient complexe, c.à.d. lorsqu'il s'agit d'équations différentielles d'ordre assez élevé (ordre > 2). En d'autres termes, c'est un moyen de ramener l'étude et l'analyse d'un système asservi du domaine temporel (où la variable est le temps) au domaine fréquentiel ou symbolique (où la variable est complexe dépendant de la fréquence). Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Le diagramme de la figure 2.1 ci-dessous illustre bien ce concept.

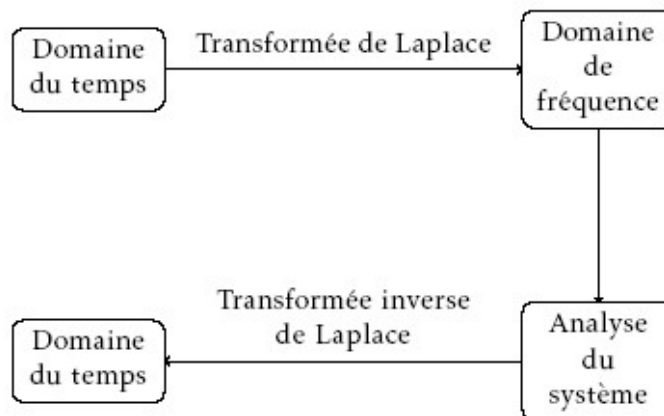


Figure 2.1 Étapes d'analyse d'un système avec la transformée de Laplace

L'intérêt fondamental de la transformée de Laplace (calcul opérationnel) s'explique par la facilité de résoudre un système d'équations différentielles puisqu'elle permet de transformer ce dernier en un système d'équations algébriques. En effet, elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques.

II.2.1 Transformée de Laplace (directe)

A toute fonction du temps $f(t)$ nulle pour $t < 0$ (fonction causale), on lui associe une fonction $F(p)$ de la variable complexe p , [où $p = \delta + j\omega$ (δ et ω sont des variables réelles et $j = \sqrt{-1}$)] qu'on appelle la transformée de Laplace de $f(t)$ et qu'on note :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

On dit que $F(p)$ est l'image de $f(t)$.

N.B/ L'existence de cette transformée est soumise à la convergence de l'intégrale qui la définit. Dans ce manuscrit nous n'insisterons pas sur ce point car les fonctions ou les signaux que nous sommes susceptibles de rencontrer remplissent cette condition.

Exemple 1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction échelon unité (ou la fonction Heaviside) notée $u(t)$ définie par : $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$$L(u(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} ; \quad \text{Avec } \Re_e(p) > 0$$

Exemple 2.

Calculer la transformée de Laplace de la fonction causale suivante :

$$e^{-at}u(t) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$L(e^{-at}u(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-at}u(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt = -\frac{1}{p+a} e^{-(p+a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a} ;$$

Avec $\Re_e(p) > -\Re_e(a)$

II.2.2 Transformée de Laplace inverse

D'une manière réciproque, il existe une transformation inverse qui permet de retrouver la fonction originale $f(t)$ à partir de sa transformée $F(p)$. Cette dernière est donnée par :

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (2.2)$$

On dit que $f(t)$ est l'origine de $F(p)$.

N.B/ Il est rare dans la pratique d'avoir recours à cet intégrale de contour définie par la relation (2.2). En effet, la correspondance entre $f(t)$ et $F(p)$ se fait grâce à des tableaux appelés : Tableaux des transformées (voir annexe1)

II.3 Propriétés des Transformées de Laplace

L'utilité de la transformée de Laplace dans l'étude des systèmes linéaires analogiques apparaîtra à la découverte de ses propriétés, que nous allons évoquer dans ce qui suit.

II.3.1 Linéarité

La transformation de Laplace est linéaire c'est-à-dire que quelles soient les fonctions f, g et deux nombres complexes a et b :

$$L[a.f(t) + b.g(t)] = a.L[f(t)] + b.L[g(t)] = a.F(p) + b.G(p) \quad (2.3)$$

Cette linéarité se démontre de façon évidente, et découle de celle de l'intégrale.

De même on a : $L^{-1}[a.F(p) + b.G(p)] = a.L^{-1}[F(p)] + b.L^{-1}[G(p)] = a.f(t) + b.g(t)$

Remarque : Le produit de deux fonctions du temps $f(t)$ et $g(t)$ n'a pas pour transformée le produit de $F(p)$ et $G(p)$ et vice versa.

À titre indicatif $L^{-1}(F(p).G(p))$ peut être calculée par l'intégrale de convolution comme suit :

$$L^{-1}(F(p).G(p)) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(t) * g(t)$$

Le symbole (*) représente le produit de convolution (voir cours de théorie et traitement du signal)

II.3.2 Théorème de la valeur finale et initiale

Il est possible d'obtenir les valeurs initiale et finale de la fonction causale $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace directe $F(p)$ comme suit :

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (2.4)$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (2.5)$$

Exemple :

Soit la fonction : $f(t) = (1 + e^{-3t})u(t)$

Déterminer la valeur initiale et finale de $f(t)$

Solution :

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+3}\right) = 2$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+3}\right) = 1$$

II.3.3 Théorème de dérivation

Soit la fonction $f(t)$ définie pour $t > 0$ et qui admet une transformée de Laplace $F(p)$ alors :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0) \quad (2.6)$$

Où $f(0)$ est la valeur initiale de $f(t)$

Démonstration :

D'après la définition de la transformée de Laplace on a :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \quad \text{Si on pose } du = \frac{df(t)}{dt} dt \Rightarrow u = f(t) \text{ et } v = e^{-pt} \Rightarrow dv = -pe^{-pt} \text{ alors}$$

$$\text{l'intégrale par parties nous donne : } \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = p.F(p) - f(0)$$

Généralisant ce théorème pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= p.F(p) - f(0) \\
L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= p^2.F(p) - p.f(0) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} \\
L\left[\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right] &= p^3.F(p) - p^2.f(0) - p\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right|_{t=0} \text{ et ainsi de suit jusqu'à l'obtention du cas général} \\
&\vdots \\
L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] &= p^n.F(p) - p^{n-1}.f(0) - p^{n-2}.\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} - \dots - \left.\frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}
\end{aligned}$$

II.3.4 Théorème de l'intégration

Soit la fonction $f(t)$ définie pour $t > 0$ et qui admet une transformée de Laplace $F(p)$ alors :

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{\int_0^t f(t)dt|_{t=0}}{p} \quad (2.7)$$

Remarque :

Lorsque les conditions initiales sont nulles :

- Dériver dans le domaine temporel, revient à multiplier par p dans le domaine complexe (domaine de Laplace).

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$$

- Intégrer dans le domaine temporel, revient à diviser par p dans le domaine complexe (domaine de Laplace).

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

II.3.5 Théorème de retard (translation des temps)

Soit $f(t)$ une fonction du temps définie pour $t > 0$, ait une transformée de Laplace $F(p)$. Considérons une fonction $f(t-T)$ obtenue en décalant $f(t)$ d'un temps égale à T , vers les temps positifs. On obtient alors :

$$L[f(t-T)u(t-T)] = e^{-pT}.F(p) \quad (2.8)$$

Démonstration :

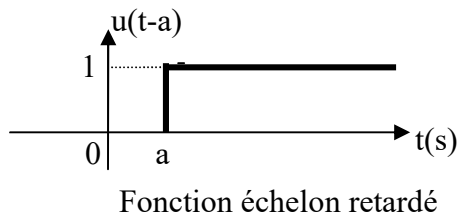
$$L[f(t-T)u(t-T)] = \int_0^{+\infty} f(t-T).u(t-T).e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t-T).e^{-pt} dt$$

Si on pose $\alpha = t - T \implies t = T + \alpha$ alors on aura :

$$L[f(t-T)u(t-T)] = \int_0^{+\infty} f(\alpha).e^{-p(T+\alpha)} d\alpha = e^{-pT} \int_0^{+\infty} f(\alpha).e^{-p\alpha} d\alpha = e^{-pT}.F(p) \quad \text{C.Q.F.D}$$

Exemple :

Calculer la transformée de Laplace de la fonction échelon retardée suivante :

**Solution**

Selon le théorème de retard on a :

$$L[u(t-a)] = \int_0^{+\infty} u(t-T).e^{-pa} dt = e^{-pa}U(p) = \frac{e^{-pa}}{p}$$

II.3.6 Théorème de décalage fréquentiel

Soit $f(t)$ une fonction du temps définie pour $t > 0$ et qui admet une transformée de Laplace $F(p)$ alors :

$$L[f(t).e^{\pm at}] = F(p \mp a) \quad (2.9)$$

Où : a peut-être réel ou complexe.

Exemple :

Calculer la transformée de Laplace de la fonction : $g(t) = e^{-2t}\sin(t)$

Solution :

Selon le théorème de décalage fréquentiel ci-dessous on a :

$$L[\sin(t).e^{-2t}] = F(p+a) = \frac{1}{(p+2)^2 + 1} \text{ puisque } F(p) = L(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

II.3.7 Changement d'échelle du temps

Si la fonction causale $f(t)$ admet une transformée de Laplace $F(p)$ et si la variable t est changée en t/a , où a est une constante positive, alors $f(t)$ est changée au $f(t/a)$.

On peut démontrer alors que :

$$L[f(t/a)] = a.F(a.p) \quad (2.10)$$

D'une manière analogue on peut facilement démontrer que :

$$L[f(a.t)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (2.11)$$

II.3.8 Quelques opérations dans le domaine complexe**a) Translation**

Soit α un nombre complexe à partie réelle positive. Calculons l'original de $F(p+\alpha)$ en connaissant $F(p)$.

$$\text{On a : } [F(p+\alpha)] = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} [e^{-\alpha t} f(t)] dt = L[e^{-\alpha t} f(t)]$$

Comme la transformation de Laplace est réversible c'est-à-dire $e^{-\alpha t} f(t) \xleftrightarrow{\text{TL}} F(p + \alpha)$ alors :

$$L^{-1}[F(p + \alpha)] = e^{-\alpha t} f(t) \quad (2.13)$$

Donc la translation dans le domaine complexe se traduit sur l'original par la multiplication par $e^{-\alpha t}$.

b) Dérivation dans le domaine complexe

La dérivée par rapport à p de la fonction $F(p)$ qui est la transformée de $f(t)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dp} F(p) = -L[t.f(t)] \quad (2.14)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{dF(p)}{dp} &= \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [e^{-pt} f(t)] dt = \int_0^{+\infty} -t.e^{-pt} f(t) dt = L[-t.f(t)] = -L[t.f(t)] \\ &\Rightarrow \frac{d}{dp} F(p) = -L[t.f(t)] \quad \text{C.Q.F.D} \end{aligned}$$

c) Intégration dans le domaine complexe

L'intégral par rapport à p la fonction $F(p)$ qui est la transformée de $f(t)$ est donnée par :

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp = L\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad (2.15)$$

Démonstration

$$\text{On a } \int_p^{+\infty} F(p) dp = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_p^m F(p) dp \quad \text{tel que } \int_p^m F(p) dp = \int_p^m \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt dp$$

Si on inverse l'ordre des intégrations on aura :

$$\int_p^m \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt dp = \int_0^{+\infty} f(t) \left[\int_p^m e^{-pt} dp \right] dt = \int_0^{+\infty} f(t) \left[-\frac{e^{-pt}}{t} \right]_p^m dt = \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{e^{-pt} - e^{-mt}}{t} \right] dt$$

$$\Rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_p^m F(p) dp = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{e^{-pt} - e^{-mt}}{t} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt$$

$$\text{d'où } \int_p^{+\infty} F(p) dp = L\left[\frac{f(t)}{t}\right] \quad \text{C.Q.F.D}$$

TABLEAU 2.1 : RECAPITULATIF DES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

1	$L[af(t)] = a.L[f(t)]$ où $a=c^{te}$
2	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)]$
3	$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = pF(p) - f(0)$
4	$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = p^2F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
5	$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = p^nF(p) - \sum_{k=1}^n p^{(k-1)} f^{(k-1)}(0)$ where $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{p}$
7	$L\left[\int\int f(t)dtdt\right] = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{p^2} + \frac{[\int\int f(t)dtdt]_{t=0}}{p}$
8	$L\left[\int\cdots\int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(p)}{p^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{p^{n-k+1}} [\int\cdots\int f(t)(dt)^k]_{t=0}$
9	$L[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$
10	$L[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap}F(p)$
11	$L[tf(t)] = -\frac{dF(p)}{dp}$
12	$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_p^\infty F(p)dp$
13	$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(ap)$

II.4 Décomposition en fractions simples

Pour la plupart des problèmes rencontrés en théorie de la commande des systèmes linéaires, la fonction $F(p)$ est souvent donnée sous la forme d'un rapport entre deux polynômes dépendant de la variable complexe p , qui peut être exprimé comme suit : $F(p) = N(p)/D(p)$. En général, le degré de numérateur $N(p)$ est toujours inférieur ou égale à celui de dénominateur $D(p)$. Notons que les racines de $N(p)=0$ sont appelées les zéros de $F(p)$ et celles de $D(p)=0$, sont appelés les pôles de $F(p)$.

Alors, pour pouvoir calculer la transformée inverse de la fonction $F(p)$, on doit tout d'abord décomposer cette dernière en une somme de termes de fonctions simples. Ensuite grâce aux tableaux des transformées (voir annexe 1) on en déduit les fonctions originaux de ces termes simples.

Si on suppose que $F(p)$ est décomposée en termes simples telle que :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$$

et si la transformée inverse de chaque terme existe alors :

$$f(t) = L^{-1}[(F(p))] = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad \text{où } f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t) \text{ , sont respectivement les transformées de Laplace inverses des termes : } F_1(p), F_1(p), \dots, F_n(p).$$

Il est à noter que la décomposition de $F(p)$, dépend particulièrement des pôles de la fonction $F(p)$ obtenue, d'où on en distingue trois cas :

a) Cas où $F(p)$ admet des pôles réels distincts

Supposant que $F(p)$ possède n pôles réels distincts (p_1, p_2, \dots, p_n) , alors on peut écrire cette fonction sous la forme suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Pour cela, on peut faire appel à des techniques de décomposition des résidus. Alors on écrit :

$$F(p) = \frac{a_1}{p - p_1} + \frac{a_2}{p - p_2} + \dots + \frac{a_n}{p - p_n} + E(p) \quad (2.16)$$

Le plus souvent, le degré de $N(p)$ est inférieur à celui de $D(p)$ alors $E(p)=0$.

Pour déterminer le coefficient a_1 on multiplie les deux membres de l'équation (2.16) par $(p - p_1)$ puis on fait tendre p vers p_1 . On procède de la même manière pour déterminer les autres coefficients.

$$\lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1)F(p) = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{a_1}{p - p_1} + \frac{a_2}{p - p_2} + \dots + \frac{a_n}{p - p_n} \right] (p - p_1) \quad \text{On obtient donc : } a_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1)F(p), \quad a_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2)F(p), \dots, a_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p - p_n)F(p) \text{ d'où}$$

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1} \left[\frac{a_1}{p - p_1} \right] + L^{-1} \left[\frac{a_2}{p - p_2} \right] + \dots + L^{-1} \left[\frac{a_n}{p - p_n} \right] = (a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \dots + a_n e^{p_n t}) u(t) \\ \Rightarrow f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^n a_k e^{p_k t} u(t)$$

Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

Exemple : Soit à déterminer la transformée inverse de la fonction : $F(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}$

$$\text{On peut écrire alors : } F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2} \quad \text{où}$$

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1)F(p) = \frac{p+3}{p+2} \Big|_{p=-1} = 2 \quad \text{et} \quad a_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2)F(p) = \frac{p+3}{p+1} \Big|_{p=-2} = -1$$

$$\text{d'où } f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1} \left[\frac{2}{p+1} \right] + L^{-1} \left[\frac{-1}{p+2} \right] = 2 \cdot e^{-t} - e^{-2t}$$

b) Cas où $F(p)$ admet des pôles réels multiples

Si on considère que $F(p)$ admet un pôle réel multiple (p_0) de multiplicité égale à (q), le reste des pôles sont supposés réels distincts. Alors $F(p)$ peut être écrit sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_0)^q \prod_{j=q+1}^n (p-p_j)} = \frac{N(p)}{(p-p_0)^q (p-p_{q+1})(p-p_{q+2}) \dots (p-p_n)}$$

D'après la technique de décomposition des résidus on écrit :

$$F(p) = \frac{b_q}{(p-p_0)^q} + \frac{b_{q-1}}{(p-p_0)^{q-1}} + \dots + \frac{b_1}{p-p_0} + \frac{a_{q+1}}{p-p_{q+1}} + \frac{a_{q+2}}{p-p_{q+2}} + \dots + \frac{a_n}{p-p_n}$$

Où les résidus $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \dots, b_1$ se calcule comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_q = \lim_{p \rightarrow p_0} (p-p_0)^q F(p); \\ b_{q-1} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{d}{dp} [(p-p_0)^q F(p)]; \\ b_{q-2} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} [(p-p_0)^q F(p)]; \\ \vdots \\ b_{q-j} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dp^j} [(p-p_0)^q F(p)]; \\ \vdots \\ b_1 = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dp^{q-1}} [(p-p_0)^q F(p)]; \end{array} \right.$$

El les coefficients a_i seront déterminés comme pour le premier cas(a):

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1)F(p), \quad a_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} (p-p_2)F(p), \dots, a_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p-p_n)F(p)$$

Exemple :

Soit à déterminer la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

$$\text{On peut écrire alors : } F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{b_2}{(p+1)^2} + \frac{b_1}{p+1} + \frac{a_1}{p+2}$$

$$\text{Où } b_2 = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1)^2 F(p) = \frac{1}{p+2} \Big|_{p=-1} = 1 \text{ et}$$

$$b_1 = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} [(p+1)^2 F(p)] = \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p+2} \right] \Big|_{p=-1} = \frac{1}{(p+2)^2} \Big|_{p=-1} = 1$$

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2)F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \Big|_{p=-2} = 1$$

$$\text{D'où } f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1} \left[\frac{1}{(p+1)^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{p+2} \right] = t.e^{-t} + e^{-t} + e^{-2t}$$

c) Cas où $F(p)$ admet des pôles complexes conjugués

Considérons que $F(p)$ admet deux pôles complexes conjugués (p_1 et $p_2 = \bar{p}_1$), bien que le reste des pôles sont supposés réels distincts. Alors $F(p)$ peut être écrit sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-\bar{p}_1)\prod_{j=3}^n (p-p_j)} = \frac{\alpha}{(p-p_1)} + \frac{\bar{\alpha}}{(p-\bar{p}_1)} + \frac{a_3}{p-p_3} + \dots + \frac{a_n}{p-p_n}$$

Où : Les coefficients $\alpha, \bar{\alpha}$ et a_j se calculent de la même façon que dans le cas (II.4a). Notons que $\bar{\alpha}$ et le conjugué de α

Exemple :

Soit à déterminer la fonction originale $f(t)$ de la transformée $F(p) = \frac{p+5}{p^2+4p+13}$

On remarque que la $F(p)$ admet deux pôles complexes conjugués p_1 et $p_2 = \bar{p}_1$: avec $p_1 = -2+3j$ et $p_2 = \bar{p}_1 = -2-3j$

Or selon la technique de décomposition des résidus $F(p)$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{p+5}{p^2+4p+13} = \frac{p+5}{[p-(-2+3j)][p-(-2-3j)]} = \frac{\alpha}{p-(-2+3j)} + \frac{\bar{\alpha}}{p-(-2-3j)}$$

On procède de la même façon que le cas (a) précédent on trouve :

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1)F(p) = \left. \frac{p+5}{[p-(-2-3j)]} \right|_{p=-2+3j} = \frac{(-2+3j)+5}{(-2+3j)+2+3j} = \frac{(j+1)}{2j} = \frac{1}{2}(1-j)$$

et on en déduit son conjugué : $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(1+j)$ alors la transformée inverse de $F(p)$ sera alors :

$$f(t) = \frac{1}{2}(1-j)e^{(-2+3j)t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{(-2-3j)t} = \frac{1}{2}e^{-2t} \left[(1-j)e^{j3t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{-j3t} \right]$$

Nous pouvons appliquer les formules d'Euler on obtient:

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} \left[(1-j)(\cos 3t + j \sin 3t) + \frac{1}{2}(1+j)(\cos 3t - \sin 3t) \right] = \frac{1}{2}e^{-2t} [2(\cos 3t + \sin 3t)]$$

Ainsi vous pouvez écrire comme suit :

$$f(t) = \sqrt{2}e^{-2t} \sin(3t + \phi) \quad \text{où } \phi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ (soit } 45^\circ)$$

Remarque :

En pratique, on utilise rarement la technique de décomposition en fractions simples dans le cas où $F(p)$ admet deux pôles complexes conjugués (comme dans l'exemple ci-dessus). On peut trouver la fonction originale $f(t)$ après avoir réorganiser le dénominateur de la fonction $F(p)$ de la manière suivante : $p^2 + 4p + 13 = (p+2)^2 + 9 = (p+2)^2 + 3^2$

$$\text{Ensuite, on écrit } F(p) \text{ comme suit : } F(p) = \frac{p+5}{p^2+4p+13} = \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} + \frac{3}{(p+2)^2+3^2}$$

On se sert des tables de Laplace (voir annexe), on obtient : $f(t) = e^{-2t} \cos 3t + e^{-2t} \sin 3t$

II.5 Représentation des systèmes linéaires continus

Dans cette partie on s'intéresse à l'explication de la fonction de transfert et le schéma fonctionnel ainsi que le graphe de fluence des signaux comme outils de représentation d'un système linéaire continu invariant (SLCI). On donnera leur définition, techniques de réalisations ou d'élaboration suivi d'exemple d'application.

II.5.1 Fonction de transfert

a) Définition

Considérons un système asservi linéaire continu régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants donnée par :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_0 x(t)$$

Où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement le signal d'entrée et de sortie.

Supposons que les conditions initiales sont nulles (c'est-à-dire le système part du repos). Si on calcule les transformées de Laplace des deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0) Y(p) = (a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p)$$

$$\text{Soit } Y(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} X(p) = G(p) \cdot X(p)$$

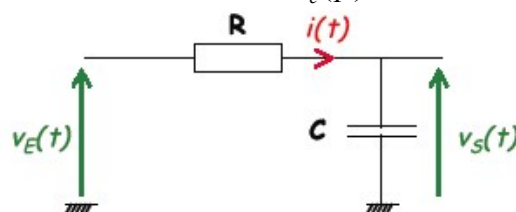
Où la fonction $G(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$ qui caractérise le système, on

l'appelle la fonction du transfert du système ou sa transmittance.

- La fonction de transfert étant le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et celle du signal d'entrée quand toutes les conditions initiales sont nulles.
- La fonction de transfert caractérise la dynamique du système. Elle ne dépend que de ses caractéristiques physiques. Ainsi, dorénavant, un système sera décrit par sa fonction de transfert et non par l'équation différentielle qui le régit.
- Notons enfin, que cette fonction de transfert est aussi appelée transmittance par analogie avec l'impédance dans les systèmes électriques.

Exemple :

Soit à déterminer la fonction du transfert $G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$ du circuit électrique suivant :



Circuit électrique (Filtre RC)

Selon la loi des mailles (2^{ème} loi de Kirchhoff) on a :

$$v_e(t) = Ri(t) + v_s(t) \quad \text{où} \quad i(t) = C \frac{dv_s(t)}{dt} \quad \text{Si on remplace l'expression de } i(t) \text{ dans l'équation}$$

on aura: $v_e(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$ le calcul de la transformée de Laplace des deux membres

de l'équation résultante nous permet d'écrire : $V_e(p) = RCpV_s(p) + V_s(p)$ d'où la fonction de

$$\text{transfert : } G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

b) Formes générales d'écriture d'une fonction de transfert

$$\text{Soit } G(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Si le numérateur N(p) et le dénominateur D(p) ont des racines, alors :

$$N(p) = a_m (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m) \quad \text{ou} \quad N(p) = a_m \prod_{i=1}^m (p - p_i)$$

$$D(p) = b_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \quad \text{ou} \quad D(p) = b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)$$

$$G(p) \text{ s'écrit donc : } G(p) = \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)} \quad \text{on a toujours } m < n \text{ (pour un système réel)}$$

- Les racines (z_i) du numérateur N(p) sont appelées « **les zéros** de la fonction de transfert »
- Les racines (p_j) du dénominateur D(p) sont appelées « **les pôles** de la fonction de transfert »

$$\text{Si on pose } k = \frac{a_m}{b_n} \quad \text{et} \quad K = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \quad \text{on obtient alors } G(p) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \frac{p}{z_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - \frac{p}{p_j})}$$

K est appelé le gain du système ou le gain de la fonction de transfert.

Dans la fonction de transfert G (p) :

- K caractérise le régime statique (ou permanent)
- $\frac{\prod_{i=1}^m (1 - \frac{p}{z_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - \frac{p}{p_j})}$ caractérise le régime transitoire (ou dynamique).

II.5.2 Schéma fonctionnel

Définition : Le schéma fonctionnel est la représentation graphique la plus couramment employée, il montre graphiquement d'une façon abrégée les relations de cause à effet entre le signal d'entrée et le signal de sortie du système.

Il existe trois modes de connexions types des éléments qui constituent le système.

a) Connexion en cascade (ou série)

La fonction de transfert d'un système constitué d'un ensemble d'éléments connectés en série, c'est-à-dire de sorte que la sortie de l'un constitue l'entrée du suivant (voir figure 2.2) s'obtient comme suit :

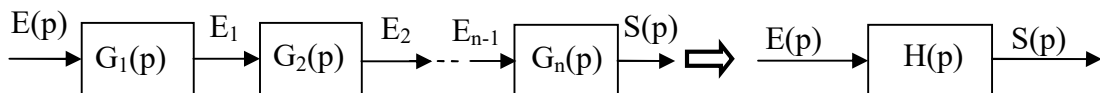


Figure 2.2 Connexion en série (ou cascade) de fonctions de transfert

On a :

$$E_1(p) = E(p) \cdot G_1(p)$$

$$E_2(p) = E_1(p) \cdot G_2(p) = E(p) \cdot G_1(p) \cdot G_2(p)$$

⋮

$$S(p) = E_{n-1}(p) \cdot G_n(p) = E(p) \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \dots G_n(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = E(p) \prod_{i=1}^n G_i(p)$$

$$\text{D'où } \boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \prod_{i=1}^n G_i(p) = G_1(p) \cdot G_2(p) \dots G_n(p)}$$

La fonction de transfert de l'ensemble est égale donc au produit de toutes les fonctions de transfert des éléments en série.

b) Connexion en parallèle

La fonction de transfert d'un système composé de plusieurs éléments telle que l'entrée d'un élément constitue l'entrée du système et la somme des sorties de tous les éléments constitue la sortie du système (voir figure 2.3) s'obtient comme suit :

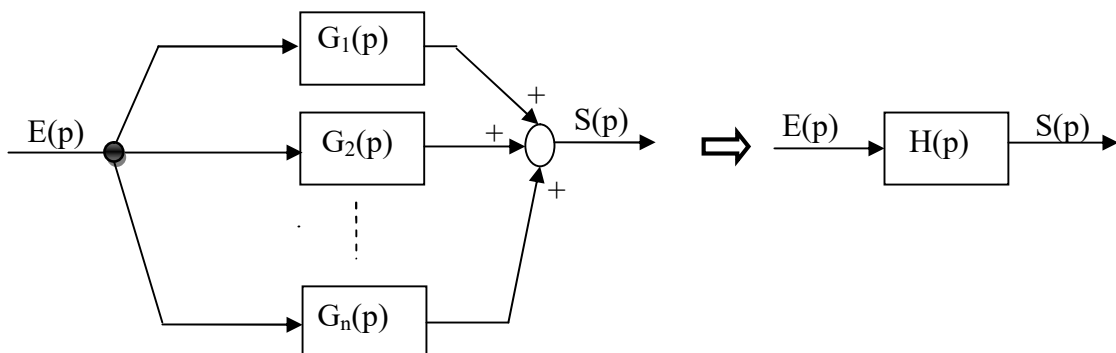


Figure 2.3 Connexion en parallèle de fonctions de transfert

$$\begin{aligned}
 S_1(p) &= E(p).G_1(p) \\
 S_2(p) &= E(p).G_2(p) \\
 &\vdots \\
 S_n(p) &= E(p).G_n(p) \\
 \Rightarrow S(p) &= \sum_{i=1}^n S_i(p) = E(p) \sum_{i=1}^n G_i(p)
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \sum_i^n G_i(p) = G_1(p) + G_2(p) + \dots + G_n(p)}$$

On constate que la fonction de transfert générale des éléments connectés en parallèle est la somme des fonctions de transfert de tous les éléments :

c) Connexion en opposition parallèle (cas du système asservi)

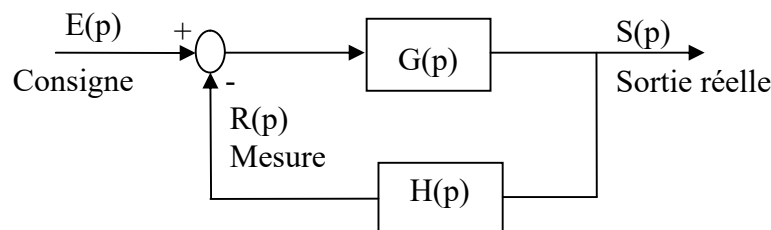


Figure 2.4 Connexion en opposition parallèle de fonctions de transfert

On a :

$$\begin{aligned}
 S(p) &= \varepsilon(p).G(p) \\
 \varepsilon(p) &= E(p) \pm S(p) \\
 R(p) &= S(p).H(p)
 \end{aligned}$$

Remplaçant ces relations l'une dans l'autre on obtient :

$$\begin{aligned}
 S(p) &= [E(p) \pm R(p)]G(p) = [E(p) \pm S(p)H(p)]G(p) \\
 \Rightarrow S(p)[1 \mp G(p)H(p)] &= E(p)G(p)
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 \mp G(p)H(p)}}$$

Où $F(p)$ est la fonction de transfert du système en boucle fermée (F.T.B.F).

$G(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne d'action.

$H(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne d'action (ou de retour).

$G(p).H(p)$ est appelée fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O).

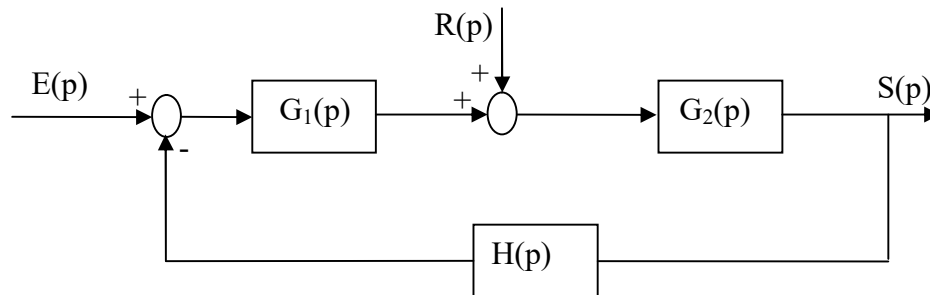
$1 \mp G(p)H(p) = 0$ est appelée équation caractéristique du système bouclé.

Note : Lorsque $H(p)=1$, on aura donc $\boxed{F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 \mp G(p)} = \frac{FTBO}{1 \mp FTBO}}$ (dans ce cas on dit qu'il s'agit d'un système asservi à retour unitaire).

d) Cas d'un système asservi à entrées multiples (ou avec perturbation)

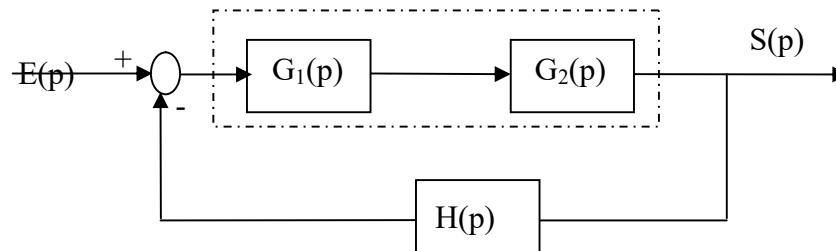
Dans le cas de la présence de plusieurs entrées dans un système asservi linéaire, on traite chacun d'effet indépendamment des autres et la réponse totale du système sera la somme des réponses partielles.

Exemple :



Nous appliquons le principe de superposition linéaire à ce système comme suit :

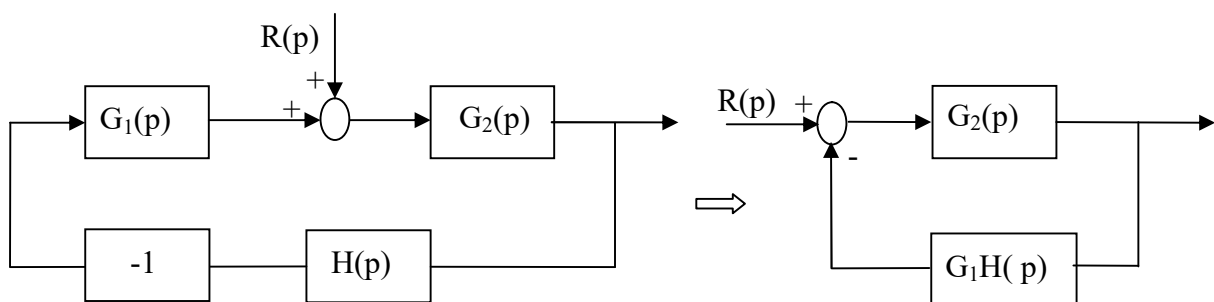
- On pose $R(p)=0$, le système se réduit



D'où la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1 G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} \Rightarrow S(p) = \frac{G_1 G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} E(p)$$

- Ensuite on pose $E(p)=0$, le schéma devient :



$$F(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} \Rightarrow S(p) = \frac{G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} R(p)$$

D'où la sortie global :

$$S(p) = \frac{G_1 G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} E(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} R(p)$$

II.5.3 Procédure à suivre pour établir un schéma fonctionnel

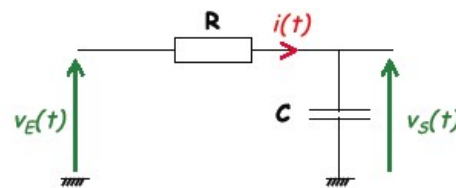
Pour concevoir un schéma bloc d'un système quelconque on doit suivre les étapes suivantes :

1. Écrire les équations décrivant le comportement dynamique de chaque élément du système ;
2. Établir les transformées de Laplace de ces équations en supposant que les conditions initiales sont nulles ;
3. Représenter chaque équation algébrique obtenue par un schéma bloc individuel ;
4. Assembler tous les schémas individuels en un seul schéma bloc (schéma fonctionnel global).

Exemple : Considérons le circuit électrique simple ci-dessous :

Étape 1. Les équations du circuit sont :

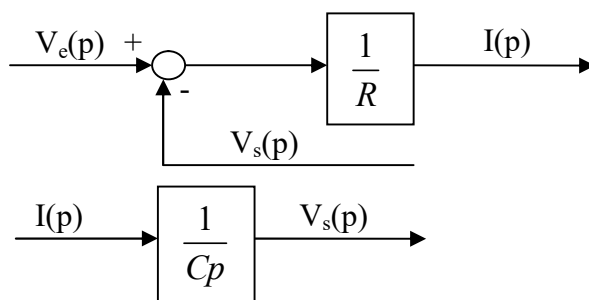
$$\begin{cases} i = \frac{v_e(t) - v_s(t)}{R} \\ v_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$$



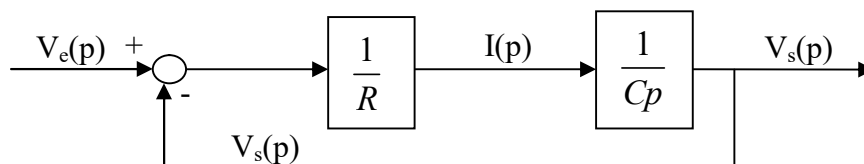
Étape 2. Les transformées de Laplace obtenues avec conditions initiales nulles sont :

$$\begin{cases} I(p) = \frac{V_e(p) - V_s(p)}{R} \\ V_s(p) = \frac{1}{C} \frac{I(p)}{p} \end{cases}$$

Étape 3. Établir les schémas bloc individuels des deux équations algébriques obtenues :



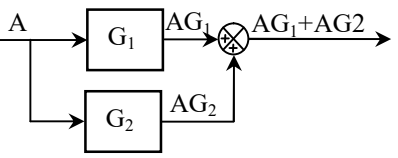
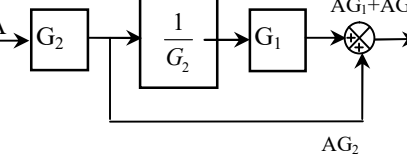
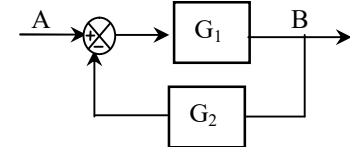
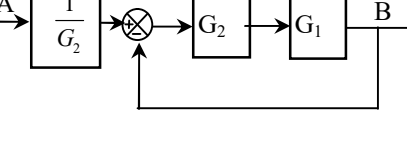
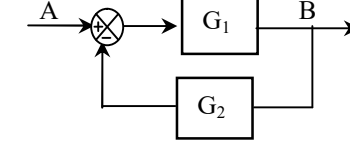
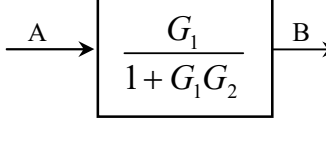
Étape 4. Assembler les deux schémas ci-dessus pour aboutir enfin au schéma fonctionnel global suivant :



II.5.4 Règles de transformation des schémas fonctionnels

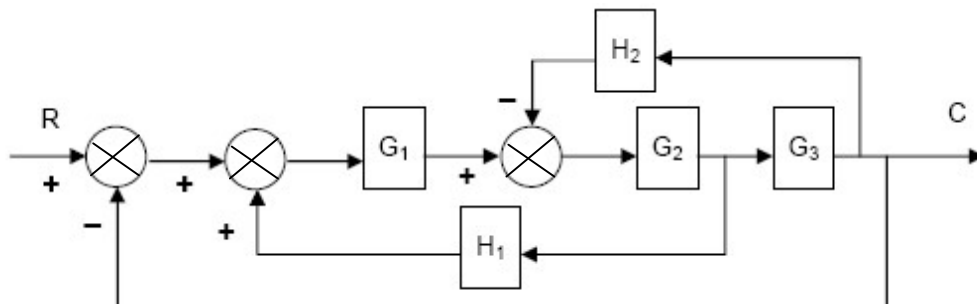
D'une manière générale, pour simplifier un schéma fonctionnel ou le réduire à une forme plus simple (appelée aussi forme canonique), il est souvent plus judicieux de déplacer les points de connexion et/ou les comparateurs (ou additionneurs), d'inter-changer ces derniers, puis de réduire les boucles internes.

Transformation	Schéma fonctionnel original	Schéma fonctionnel équivalent
1. Redisposition des comparateurs.		
2. Décomposition d'un comparateur.		
3. Redisposition des éléments en cascade.		
4. Association des éléments en cascade.		
5. Association des éléments en parallèle.		
6. Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément.		
7. Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément.		
8. Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément.		
9. Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément.		
10. Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur.		

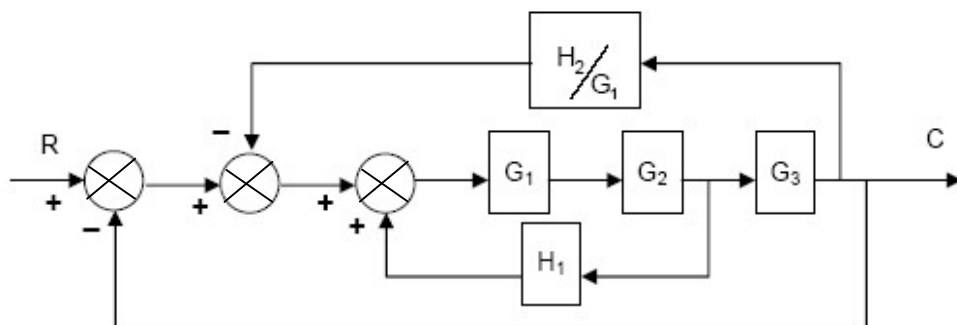
<p>11. Retrait d'un élément d'une chaîne d'action.</p>		
<p>12. Retrait d'un élément d'une boucle de retour.</p>		
<p>13. Élimination d'une boucle de retour.</p>		

Exemple : Réduction (ou simplification) d'un schéma fonctionnel :

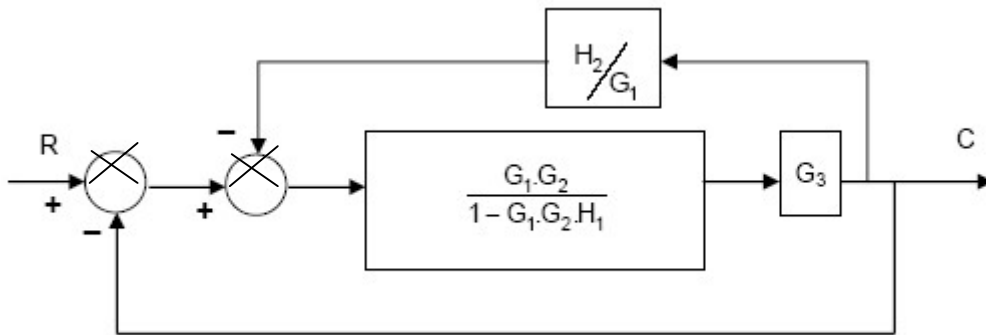
Soit à réduire le schéma fonctionnel suivant :



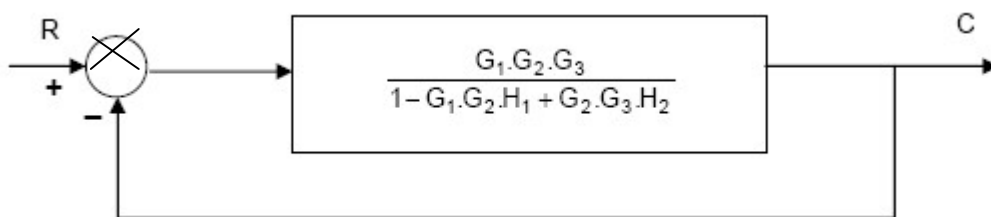
En appliquant la transformation n°6, ensuite la transformation n°1, on obtient :



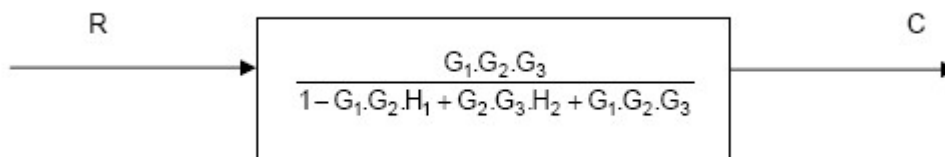
Puis on applique la transformation n° 4, puis la transformation n° 13, on aura :



Ensuite on applique aussi, successivement la transformation n° 4 et n°13, on obtient :



Enfin et par application de la transformation n°13 encore, on obtient :



II.5.3 Graphe de fluence des signaux (GFS)

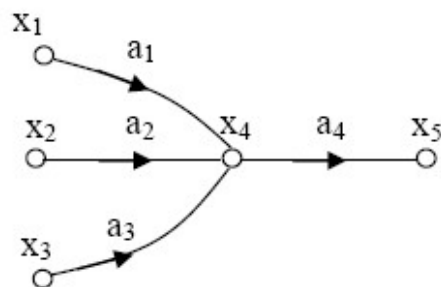
a) Définitions

- Un graphe de fluence des signaux est une représentation graphique des équations simultanées décrivant le système. Il montre graphiquement la transmission des signaux à travers le système comme le fait le schéma fonctionnel. Mais, il est plus facile à tracer et plus facile à manipuler par rapport au schéma fonctionnel.
- Un graphe de fluence (ou de transfert) des signaux permet de simplifier l'écriture et la mise en équation des processus lorsque le nombre de variables augmente.
- Un graphe de fluence ressemble à un réseau, il est constitué d'un ensemble de **nœuds** reliés entre eux par des **branches** orientées (arcs).

b) Règles de construction du GFS

Afin de faciliter le dessin du graphe de fluence des signaux, on donne les propriétés de base suivantes :

1. Les nœuds représentent les variables du système et sont disposés selon l'ordre de succession de cause à effet dans le système.
2. Chaque branche est affectée d'un coefficient correspondant à la transmittance (ou **fonction de gain**) qui relie entre deux nœuds (variables).



Graphe de fluence.

Le graphe de la figure 4.1, appelé: graphe de fluence, est équivalent aux équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} x_4 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_5 = a_4x_4 = a_4(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \end{cases}$$

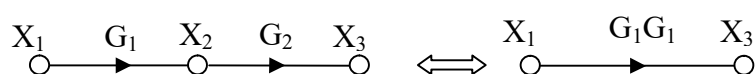
3. Un nœud auquel arrive plusieurs branches est appelé : **puits (nœud secondaire)**.
4. Un nœud à partir duquel peuvent partir plusieurs branches est appelé : **nœud source**.

Exemples : dans la figure 4.1 :

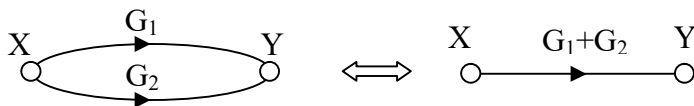
X_1, X_2 et X_3 : Nœuds sources

X_4 : Nœud puits

5. Le **chemin direct** est une liaison qui lie le nœud d'entrée au nœud de sortie en suivant le sens des flèches tout en passant une seule fois par chaque nœud (c.à.d. sans passage double par un nœud quelconque).
6. Le **gain d'un chemin direct** est le produit de tous les gains en parcourant ce chemin.
7. Une **boucle de retour** est un chemin qui commence par un nœud et qui revient à ce même nœud sans passer deux fois par le même nœud.
8. Les boucles de retour qui ne se touchent pas, sont des boucles qui n'ont aucun nœud en commun (**boucles non contigües**).
9. Le **gain d'une boucle** est le produit des gains rencontrés lors de son parcours.
10. Chemins série (nœuds en cascade)



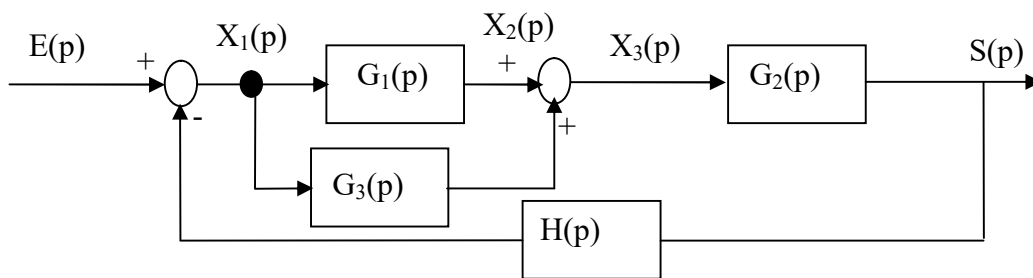
11. Chemins parallèles



12. Un **circuit fermé** est une boucle de retour fermée d'un arc unique.



Exemple : Considérons le schéma fonctionnel représenté par la figure ci-dessous :

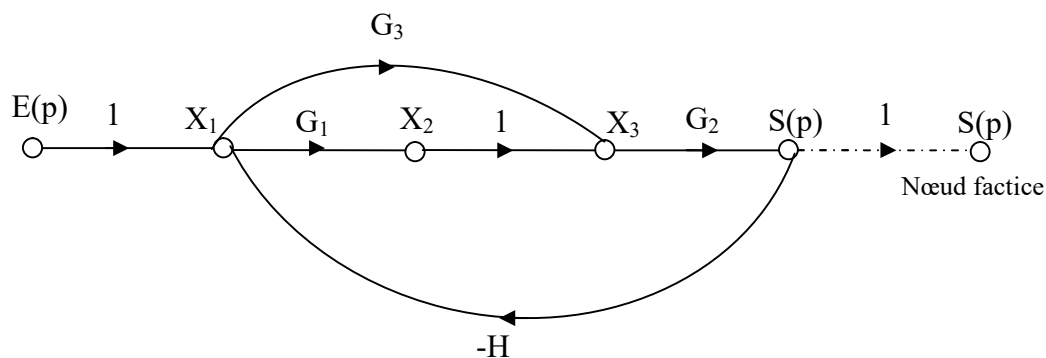


Établir le graphe de fluence correspondant à ce schéma :

A partir du schéma fonctionnel on a :

$$\begin{cases} X_1 = E - HS(p) \\ X_2 = G_1 X_1 \\ X_3 = X_2 + G_3 X_1 \\ S = G_2 X_3 \end{cases}$$

Avec les règles citées précédemment, nous traçons le graphe de fluence des signaux suivant :



Remarque :

Notons qu'il n'est pas nécessaire de tracer le schéma fonctionnel du système. Si nous avons les équations nous pourrions directement construire le graphe de fluence des signaux.

c) Règle de Mason

Une fois le graphe de fluence des signaux est construit, la fonction de transfert global peut être déterminée en utilisant la formule de Mason donnée par :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{n=1}^N P_n \Delta_n}{\Delta}$$

Où P_n : est la fonction de transfert (ou gain) du $n^{\text{ième}}$ chemin direct, obtenue en faisant le produit des gains du chemin (avec n est un entier).

N : nombres de chemins directs.

Δ : est appelé le déterminant du graphe de fluence ou son équation caractéristique.

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk}$$

Avec P_{jk} est le $j^{\text{ième}}$ produit de gains de k boucles non contiguës (qui ne se touchent pas), donc :

$$\Delta = 1 - (\sum \ell_i) + (\sum \ell_i \ell_j) - (\sum \ell_i \ell_j \ell_p) + (\sum \ell_i \ell_j \ell_p \ell_q) - \dots$$

$\sum \ell_i$: est la somme des gains de tous les chemins fermés (boucles) présent un à un.

$\sum \ell_i \ell_j$: est la somme de produits des gains de toutes les boucles fermées non contiguës présent deux à deux.

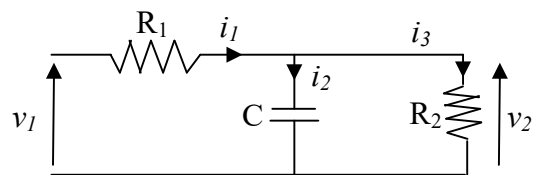
$\sum \ell_i \ell_j \ell_p$: est la somme de produits des gains de toutes les boucles fermées non contiguës présent trois à trois.

Idem pour $\sum \ell_i \ell_j \ell_p \ell_q \dots$ etc.

Δ_n : est la valeur de Δ en éliminant toutes les boucles touchant le $n^{\text{ième}}$ chemin direct (ou valeur de Δ par exclusion des termes qui touchent le $n^{\text{ième}}$ chemin), appelés aussi cofacteurs du chemin direct. Il est à noter qu'à chaque chemin n correspond un Δ_n

Exemple 1:

Soit le schéma électrique suivant :



- 1- Mettre le système en équations.
- 2- Représenter le système par un graphe de fluence.
- 3- Déterminer la fonction du transfert $F(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)}$ en utilisant la formule de Mason.

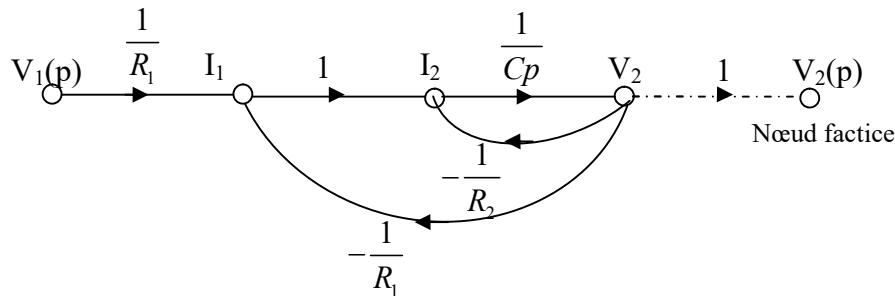
Solution :

1. Mise en équations :

Nous avons quatre variables : v_1, v_2, i_1 et i_2 alors selon les lois de Kirchhoff on obtient les

$$\text{équations suivantes : } \begin{cases} i_1(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} \Rightarrow I_1(p) = \frac{1}{R_1} [V_1(p) - V_2(p)] \\ v_2(t) = \frac{1}{C} \int i_2(t) dt = \frac{1}{Cp} I_2(p) \\ i_2(t) = i_1(t) - \frac{v_2(t)}{R_2} \Rightarrow I_2(p) = I_1(p) - \frac{V_2(p)}{R_2} \end{cases}$$

2. Graphe de fluence correspondant:



3. Calcul de la Fonction de transfert par la formule de Mason:

- Nombre de boucles est égale à 2 et dont les gains sont :

$$\ell_1 = -\frac{1}{R_1 Cp} \text{ et } \ell_2 = -\frac{1}{R_2 Cp}$$

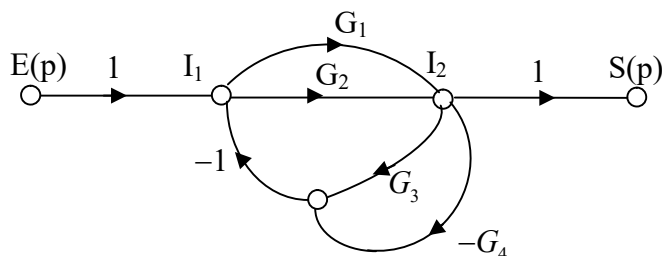
- $\Delta = 1 - \sum \ell_i = 1 - (\ell_1 + \ell_2) = 1 + \frac{1}{R_1 Cp} + \frac{1}{R_2 Cp}$

- Nombre de chemins directs : $N = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{R_1 Cp}$; $\Delta_1 = 1 - 0 = 1$

$$F(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{\frac{1}{R_1 Cp}}{1 + \frac{1}{R_1 Cp} + \frac{1}{R_2 Cp}} = \frac{R_2}{R_1 R_2 Cp + (R_1 + R_2)}$$

Exemple 2.

Soit le graphe de fluence des signaux d'un système donné par :



Déterminer la fonction de transfert $S(p)/E(p)$ du système ci-dessus par la formule de Mason.

Solution :

- Nombre de boucles est égale à 4 et leurs gains sont :

boucle1 : $\ell_1 = -G_1G_3$; boucle 2 : $\ell_3 = -G_2G_3$

boucle3 : $\ell_2 = G_1G_4$; boucle4 : $\ell_4 = G_2G_4$

- Calcul de Δ (Équation caractéristique du système) :

$$\Delta = 1 - \sum \ell_i = 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4) = 1 - (-G_1G_3 + G_1G_4 - G_2G_3 + G_2G_4) + (0 + 0 + \dots)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + G_1G_3 - G_1G_4 + G_2G_3 - G_2G_4 = 1 + (G_1 + G_2)(G_3 - G_4)$$

- Nombre de chemins directs : $N = 2 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = G_1 \\ P_2 = G_2 \end{cases}$

Calcul des cofacteurs Δ_n : $\Rightarrow \begin{cases} \text{pour le } P_1 \text{ on a } \Delta_1 = 1 - 0 = 1 \\ \text{pour le } P_2 \text{ on a } \Delta_2 = 1 - 0 = 1 \end{cases}$

En effet, quand on élimine l'un des chemins direct 1 ou 2 on remarque qu'il ne reste aucune boucle complète $\Rightarrow \Delta_n = 1$ (pour $n=1$ et $n=2$)

- On obtient enfin selon la formule de Mason la fonction de transfert globale :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + (G_1 + G_2)(G_3 - G_4)}$$

Tableau 2.1 Récapitulatif de Transformations élémentaires

	$\begin{cases} x_2 = a_1 x_1 \\ x_3 = a_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = a_1 a_2 x_1$
	$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a+b)x_1$
	$\begin{cases} x_3 = ax_2 + bx_1 \\ x_4 = cx_3 = acx_2 + bcx_1 \end{cases}$
	$\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_3) = bax_1 + bcx_3 \end{cases}$ $\Rightarrow x_3(1 - bc) = abx_1$ $\Rightarrow x_3 = \frac{ab}{(1 - bc)} x_1$