

## Chapitre .IV. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires.

### IV.1. Introduction

La technique de l'analyse de la réponse en fréquence d'un système asservi linéaire continu est une méthode graphique qui ne considère que les entrées sinusoïdales de fréquences différentes. C'est une technique facile, rapide et puissante pour l'obtention de l'état permanent du système à des séquences spécifiques. En outre, quand la fonction de transfert d'un système n'est pas connue, on peut la déterminer approximativement en utilisant une réponse en fréquence déterminée expérimentalement.

Ce chapitre est consacré à la présentation du principe des différentes méthodes, plus souvent utilisées, dans l'analyse fréquentielle des systèmes asservis linéaires continus, suivi de quelques exemples illustratifs.

### IV.2. Vue d'ensemble des méthodes d'analyse fréquentielle

Un système linéaire étant défini par son équation différentielle, la transformation de Laplace ramène son étude à un problème algébrique (figure 4.1), puis les notions de réponse en fréquences et fonction de transfert permettent de se ramener à des constructions graphiques (lieu de transfert).

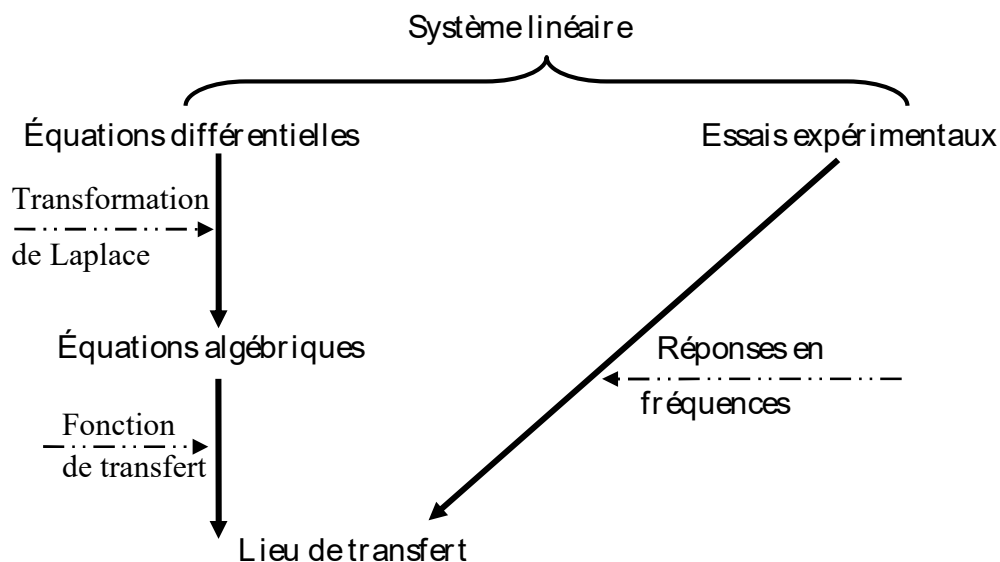


Figure 4.1 Vue d'ensemble des méthodes harmoniques (ou fréquentielles)

En fait, que l'on part d'équations ou d'expériences, le point d'aboutissement est le même. On peut donc tracer le lieu de transfert (réponse en fréquences) d'un système physique dont on ignore les équations aussi bien que d'un système non encore réalisé dont les équations sont connues.

### IV.3. Notions de base sur les fonctions complexes

Le calcul de fonctions complexes peut être simplifié si on considère certaines propriétés des nombres complexes. Soit deux nombres complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ , alors :

- l'amplitude de la multiplication est la multiplication des amplitudes

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

- la phase de la multiplication est la somme des phases individuelles

$$\angle(Z_1 \cdot Z_2) = \angle Z_1 + \angle Z_2$$

La fonction de transfert dans le domaine fréquentiel (ou fonction de transfert isochrone) est obtenue en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans la fonction de transfert isomorphe  $G(p)$ , soit :

$$G(j\omega) = G(p) \Big|_{p=j\omega}$$

Si on décompose cette fonction de transfert en plusieurs éléments de base, il est plus facile de déterminer la réponse globale du système.

$$\text{Soit } G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \dots$$

$$\text{Alors } \begin{cases} |G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot |G_3(j\omega)| \dots \\ \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle G_3(j\omega) \dots \end{cases}$$

### IV.4. Principe de l'analyse fréquentielle (ou harmonique)

Si on applique à l'entrée d'un système asservi linéaire, un signal sinusoïdal :

$$e(t) = E_m \sin \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f \quad (O? \text{ f est la fréquence en Hz})$$

En maintenant suffisamment longtemps le signal jusqu'à la disparition du régime transitoire, on observe à la sortie un signal sinusoïdal de même pulsation mais d'amplitude et de phase modifiées (fig. 4.2).

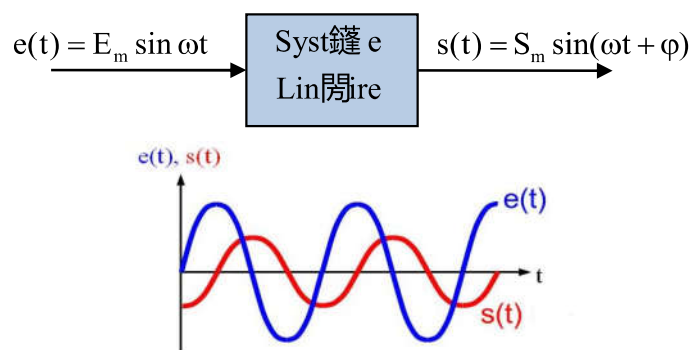


Figure 4.2 Exemple d'une réponse harmonique d'un système linéaire

On appelle réponse harmonique, la sortie  $s(t)$  en régime permanent d'un système soumis à une entrée périodique (sinusoïdale par exemple).

On peut écrire  $e(t)$  et  $s(t)$  sous la forme complexe telle que :

$$\begin{cases} e(t) = E_m \sin \omega t \Leftrightarrow E(j\omega) = E_m e^{-j\omega t} & \text{et} \\ s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow S(j\omega) = S_m e^{-j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

Où  $E_m$  est l'amplitude du signal d'entrée.  
 $S_m$  est l'amplitude du signal de sortie.  
 $\varphi$  est le déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

$$\text{D'où } G(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{S_m e^{-j(\omega t + \varphi)}}{E_m e^{-j\omega t}} = \frac{S_m}{E_m} e^{-j\varphi} = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m} & \text{est le module de la fonction de transfert (ou le rapport d'amplitude)} \\ \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) & \text{est la phase de la fonction de transfert (ou son argument)} \end{cases}$$

La fonction de transfert  $G(p)$  exprimée sous forme de quotient entre deux polynômes en fonction de  $p$  :  $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$  si on remplace  $p$  par  $j\omega$  on

$$\text{obtient la fonction suivante : } G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}$$

Si on réarrange cette expression pour séparer la partie réelle de la partie imaginaire, pour mieux calculer l'amplitude et la phase de la fonction on aura:

$$G(j\omega) = R[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)] = |G(j\omega)| \underline{\underline{G(j\omega)}}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} |G(j\omega)| = \sqrt{(R[G(j\omega)])^2 + (\text{Im}[G(j\omega)])^2} \\ \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{R[G(j\omega)]}\right) \end{cases}$$

La fonction  $G(j\omega)$  est généralement définie par son module  $|G(j\omega)|$  appelé aussi rapport d'amplitude et son argument  $\angle G(j\omega)$  appelé aussi le déphasage  $\varphi(\omega)$ .

### Exemple :

Si on applique une tension sinusoïdale d'amplitude  $E_m=5V$  à l'entrée d'un filtre de transmittance (ou Fonction de Transfert) :

$$G(j\omega) = \frac{5}{1 + j\frac{\omega}{40}}$$

Quelle sera la tension de sortie  $s(t)$  à la pulsation  $\omega=40$  rad/s ?

Solution : A cette pulsation, la transmittance d'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{5}{1 + j\frac{40}{40}} = \frac{5}{1 + j} \quad \text{et son module : } |G(j\omega)| = \left| \frac{5}{1 + j} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.53 \Rightarrow S_m = 3.53 * E_m = 17.7V$$

## IV.5. Représentation de la réponse fréquentielle

L'étude des propriétés fréquentielles des systèmes linéaires (c'est-à-dire leur réponse à une action sinusoïdale permanente dont on fait varier la fréquence) permet d'en déduire les propriétés dynamiques temporelles (c'est-à-dire leur évolution dans le temps en fonction des actions subies) comme nous le verrons par la suite. C'est la raison pour laquelle on attache tant d'importance à cette étude.

En général les paramètres étudiés sont le gain et la phase (ou déphasage) :

$$\text{Gain} = |G(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m} \quad \text{et} \quad \text{phase} = \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

L'ensemble des variations du gain et de la phase de la fonction  $G(j\omega)$  en fonction de la fréquence (ou pulsation  $\omega$ ), constitue la réponse fréquentielle du système. Ces dernières peuvent être tracées selon trois représentations graphiques distinctes :

- Diagramme de Bode ;
- Diagramme de Nyquist ;
- Diagramme de Black (ou Nichols).

**Remarque :** *Pratiquement, il est intéressant de faire l'étude et la synthèse d'un système asservi à partir de sa FTBO. En effet, la réponse du système en boucle fermée peut être déterminée à partir du tracé de la FTBO au moyen des abaques, telle que l'abaque de Black ou Nichols (voir annexes).*

### IV.5.1. Courbes de Bode et diagrammes asymptotiques

La représentation d'une réponse en fréquence d'un système dans le plan de Bode consiste à tracer deux graphes séparément, le gain et la phase de la FTBO du système en fonction de la pulsation  $\omega$ .

Par exemple, si la fonction de transfert est :  $G(p)$ , en régime sinusoïdal  $p=j\omega$ , alors pour une représentation de Bode, on tracera les courbes suivantes :

- a) **Courbe de gain (ou d'amplitude) :** Le gain est exprimée en décibels (dB), soit:

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Le gain  $|G(j\omega)|_{\text{db}}$  est reporté sur l'axe des ordonnées suivant une échelle linéaire, et les valeurs de  $\omega$  étant reportées sur une échelle logarithmique (décimale).

- b) **Courbe de phase (ou de déphasage) :** soit  $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arg(G(j\omega))$

Pour la courbe de phase,  $\varphi(\omega)$  est reportée sur l'axe des ordonnées suivant une échelle linéaire en degré, et les valeurs de  $\omega$  étant reportées sur une échelle logarithmique.

- c) **Diagramme asymptotique :** Dans la plupart des cas, il est inutile de tracer complètement les courbes de Bode (point par point). On peut se contenter des asymptotes.

On appelle diagramme asymptotique d'une fonction de transfert l'ensemble des asymptotes à la courbe quand  $\omega \rightarrow 0$  et quand  $\omega \rightarrow \infty$ . Les points d'intersection de ces asymptotes sont appelés **points de cassure**.

**Remarque :**

- Étant donné l'utilisation de l'échelle logarithmique, la précision est suffisamment bonne pour que l'on puisse assimiler la courbe à ses asymptotes sauf au voisinage des points de cassure.
- Quand la fréquence varie de  $\omega_1$  à  $10\omega_1$ , on dit que la bande  $[\omega_1, 10\omega_1]$  est une décade.
- Quand la fréquence varie de  $\omega_1$  à  $2\omega_1$ , on dit que la bande  $[\omega_1, 2\omega_1]$  est une octave.

**IV.5.1.a. Cas d'un système de premier ordre**

Soit  $G(p) = \frac{k}{\tau p + 1}$ , on pose  $p=j\omega$  on aura:  $G(j\omega) = \frac{k}{j\tau\omega + 1} = \frac{k}{j\frac{\omega}{\omega_c} + 1}$  o?  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

Gain et phase :  $\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = 20 \log k - 10 \log(\tau^2 \omega^2 + 1) \\ \varphi(\omega) = \arg(k) - \arg(j\tau\omega + 1) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$

**a) Diagramme de Bode asymptotique :**

- Pour  $\omega \ll \omega_c$  (i.e  $\omega \rightarrow 0$ ), donc  $|G(j\omega)|_{dB}$  tend vers  $20 \log k$  et  $\varphi(\omega) \rightarrow 0^\circ$
- Pour  $\omega \gg \omega_c$  (i.e  $\omega \rightarrow \infty$ ), donc  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log \omega \tau$ , similaire à une droite de pente  $-20 \text{dB/déc.}$  et  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-90^\circ$ .

**b) Diagramme de Bode réel :**

- Pour  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$  (pulsation de cassure) donc  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 3 \text{dB}$  et  $\varphi(\omega) = -\arctan 1 = -45^\circ$
- Pour  $\omega = \frac{1}{2\tau}$  donc  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 0.98 \text{dB}$  et  $\varphi(\omega) = -\arctan 0.5 = -26.56^\circ$
- Pour  $\omega = \frac{2}{\tau}$  donc  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 6.98 \text{dB}$  et  $\varphi(\omega) = -\arctan 2 = -63.43^\circ$

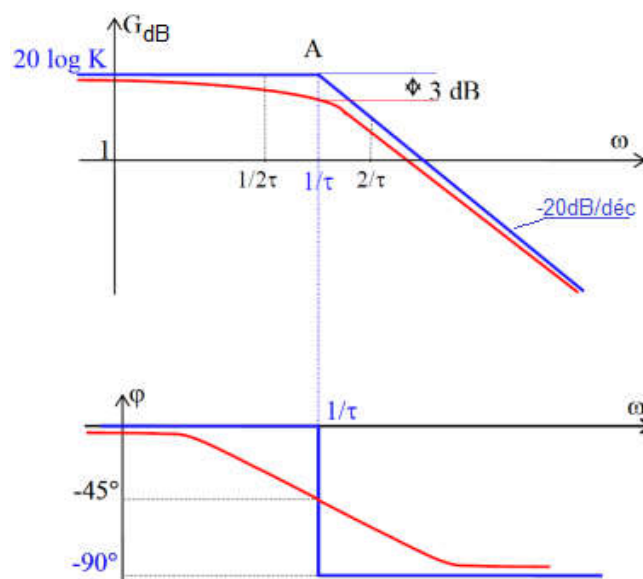


Figure 4.3. Diagrammes asymptotique (en rouge) et réel (en bleu) d'un système du premier ordre.

La pulsation de cassure  $\omega_c$  est la pulsation pour laquelle le gain exprimé en dB est inférieur de 3 dB au gain statique. Les tracés du gain et de la phase sont donnés par la figure 4.4 en rouge, pour un axe des abscisses gradué en pulsation  $\omega$ . Le tracé du diagramme de Bode est simplifié par une étude asymptotique préalable (en bleu sur la figure 4.4).

Pour  $\omega \gg \omega_c$ , la décroissance du gain est de -20 dB/décade, c'est-à-dire que le gain diminue de 20 dB chaque fois que la pulsation du signal d'entrée est multipliée par 10.

**Exemple 1 :** Tracer sur un papier semi logarithmique, le digramme de Bode, d'un système asservi dont la fonction du transfert en boucle ouverte est donnée par :  $G(p) = \frac{1}{p+1}$

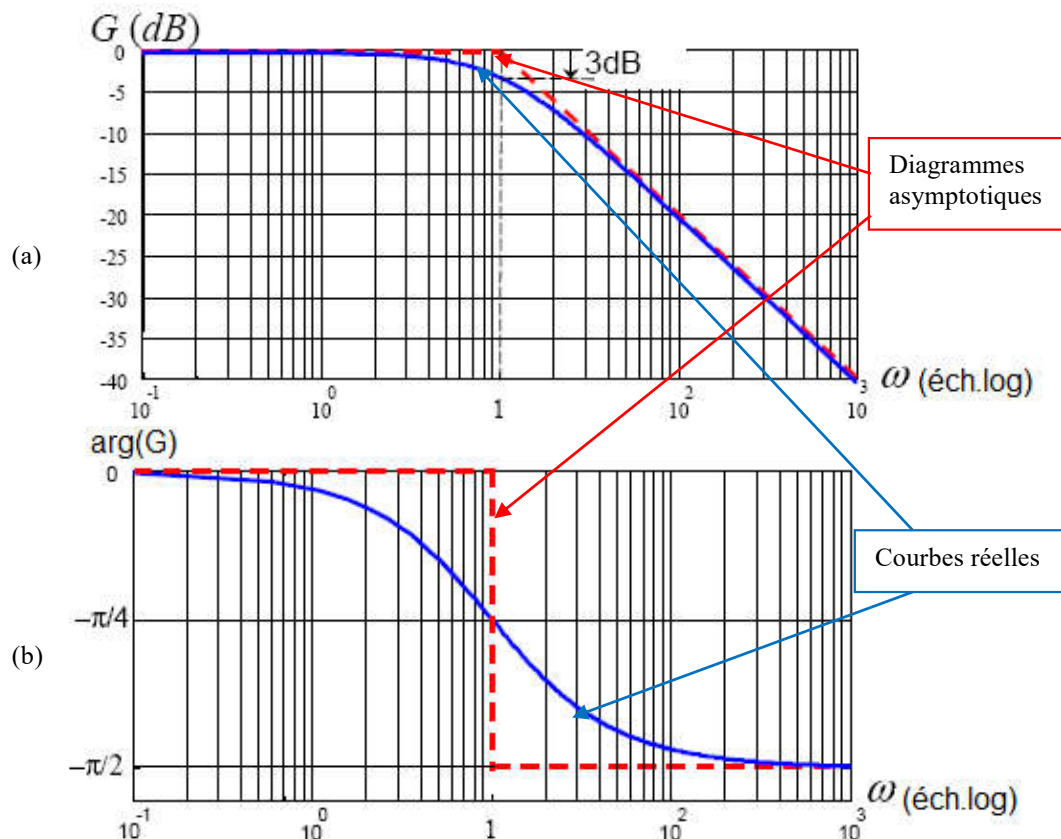


Figure 4.4 Diagramme de Bode de l'exemple 1 (a) diagramme de gain (b) diagramme de phase

#### IV.5.1.b. Cas d'un système du second ordre

Soit  $G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$ , Pour  $p=j\omega$  on a  $G(j\omega) = \frac{k\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$  qu'on écrit

$$G(j\omega) = \frac{k}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{k}{(1-u^2) + j2\xi u} \quad \text{Où } u = \frac{\omega}{\omega_n} \text{ appelée pulsation réduite}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} = 20 \log k - 10 \log((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2) \\ \varphi(\omega) = \arg(k) - \arg(1-u^2 + j2\xi u) = -\arctan \frac{2\xi u}{1-u^2} \end{cases}$$

## a) Étude asymptotique

- Pour  $u \rightarrow 0$  (ou  $\omega \rightarrow 0$ )  $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k \\ \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0^\circ \end{cases}$
- Pour  $u \rightarrow +\infty$  (ou  $\omega \rightarrow +\infty$ )  $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 40 \log u = 20 \log k - 40 \log(\omega / \omega_n) \\ \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -180^\circ \text{ (ou } -\pi) \end{cases}$
- Pour  $u = 1$  (ou  $\omega = \omega_n$ )  $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log 2\xi \\ \arg(G(j\omega)) = \varphi(\omega) = -90^\circ \text{ (ou } -\pi/2) \end{cases}$

La figure ci-dessous donne le tracé asymptotique de  $|G(j\omega)|_{dB}$  pour  $k=1$ . La valeur de  $\xi$  n'a pas d'influence sur le tracé en question qu'au voisinage de  $\omega_c$

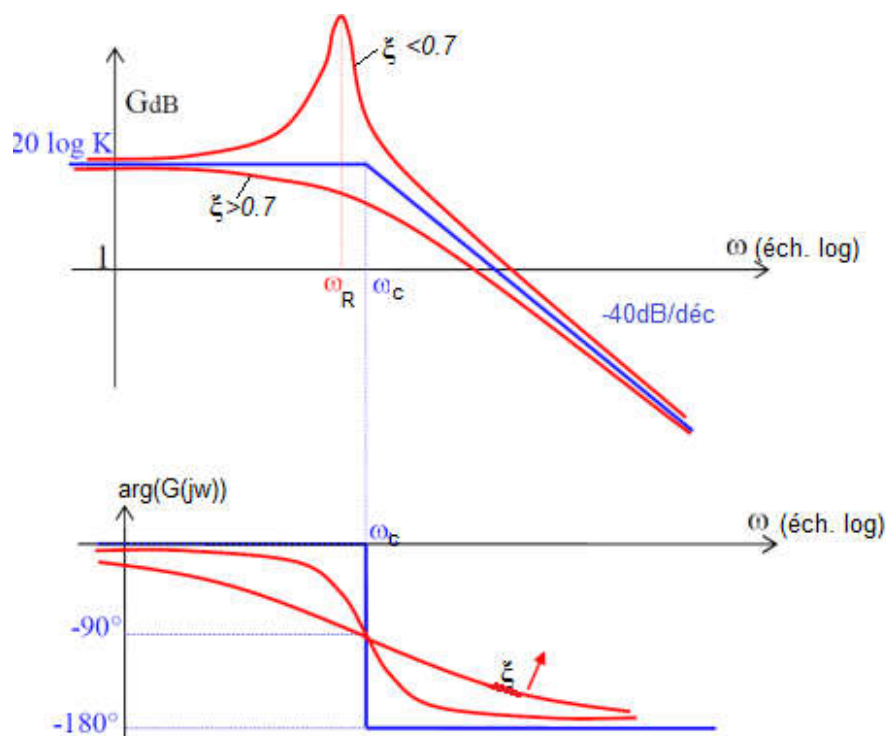


Figure 4.5 Diagramme de Bode (a) diagramme de gain (b) diagramme de phase

Le gain  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}}$  passe par un maximum pour une pulsation  $\omega_R$

appelée pulsation de résonance telle que la dérivée du gain  $|G(j\omega)|_{dB}$  vaut zéro:

$$\frac{d|G(j\omega)|_{dB}}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[ 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} \right] = \frac{d}{d\omega} [-10 \log((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\xi^2 \text{ d'o? } \omega = \omega_R = \omega_n (1 - 2\xi^2)^{1/2}$$



À condition que :  $1 - 2\xi^2 > 0 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

Dans ce conditions, on dit qu'il y'a résonance pour la pulsation  $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

On obtient donc la valeur maximale du module:  $|G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_R)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$

D'où le gain maximal :  $|G(j\omega)|_{\max(dB)} = -20 \log(2\xi\sqrt{1 - \xi^2})$

On constate que plus  $\xi$  est faible, plus la résonance est importante. Ce phénomène peut être caractérisé par un facteur de surtension (ou de résonance) Q qui correspond au rapport du gain à la résonance sur le gain statique :

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$$

**Exemple 1.** Tracer le diagramme de Bode en variant le coefficient d'amortissement  $\xi$  de la

fonction du transfert :  $G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$  , On prend  $k=1$  et  $\omega_n=1$ .

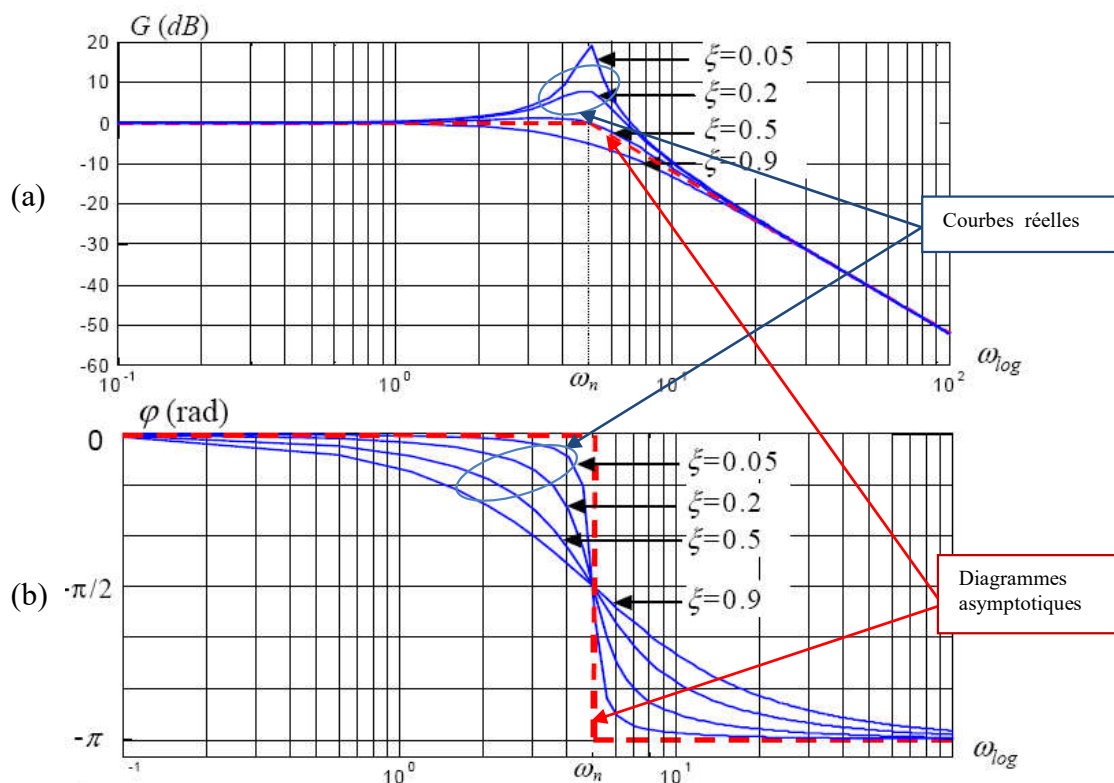


Figure 4.6 Diagramme de Bode de l'exemple 1 (a) diagramme de gain (b) diagramme de phase



## IV.5.2. Diagramme de Nyquist

**Définition :** Le diagramme de Nyquist, ou lieu de Nyquist d'un système est le lieu en coordonnées polaires, des points M de coordonnées  $|G(j\omega)|$  et  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$  lorsque  $\omega$  varie 0 à  $+\infty$  (figure 4.7). Le diagramme complet de Nyquist correspond à  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Il s'obtient par symétrie à l'axe des réels du lieu de Nyquist.

IV.5.2.a. Prenons le cas d'un système de premier ordre où :

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega\tau + 1} = \frac{k(1 - j\omega\tau)}{(\omega\tau)^2 + 1} = \frac{k}{(\omega\tau)^2 + 1} - j \frac{k\omega\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} = \alpha + j\beta$$

$$\text{on a: } \alpha^2 + \beta^2 = k\alpha \text{ donc } \left(\alpha - \frac{k}{2}\right)^2 + \beta^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

On conclure donc que le lieu de Nyquist dans ce cas est un demi-cercle ( $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$ ) de rayon  $k/2$  centré en  $(k/2, 0)$ .

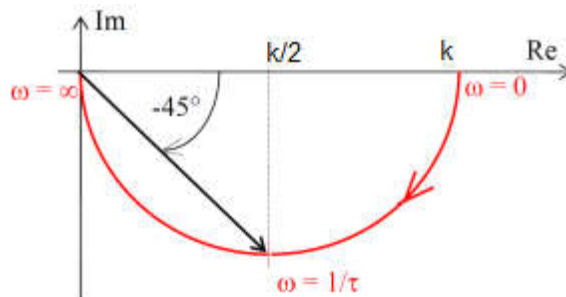


Figure 4.7 Diagramme de Nyquist d'un système du 1<sup>er</sup> ordre.

A la pulsation de cassure  $\omega = \omega_c = 1/\tau$  on a :

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega) = -45^\circ \end{cases}$$

IV.5.2.b. Prenons le cas d'un système de second ordre où :

Un système du second ordre a une fonction de transfert sinusoïdale paramétrée à l'aide de deux paramètres ( $\omega_n, \xi$ ), la pulsation propre non amortie et l'amortissement.

$$G(j\omega) = \frac{k}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} - j \frac{2k\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{L'amplitude est définie par : } |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



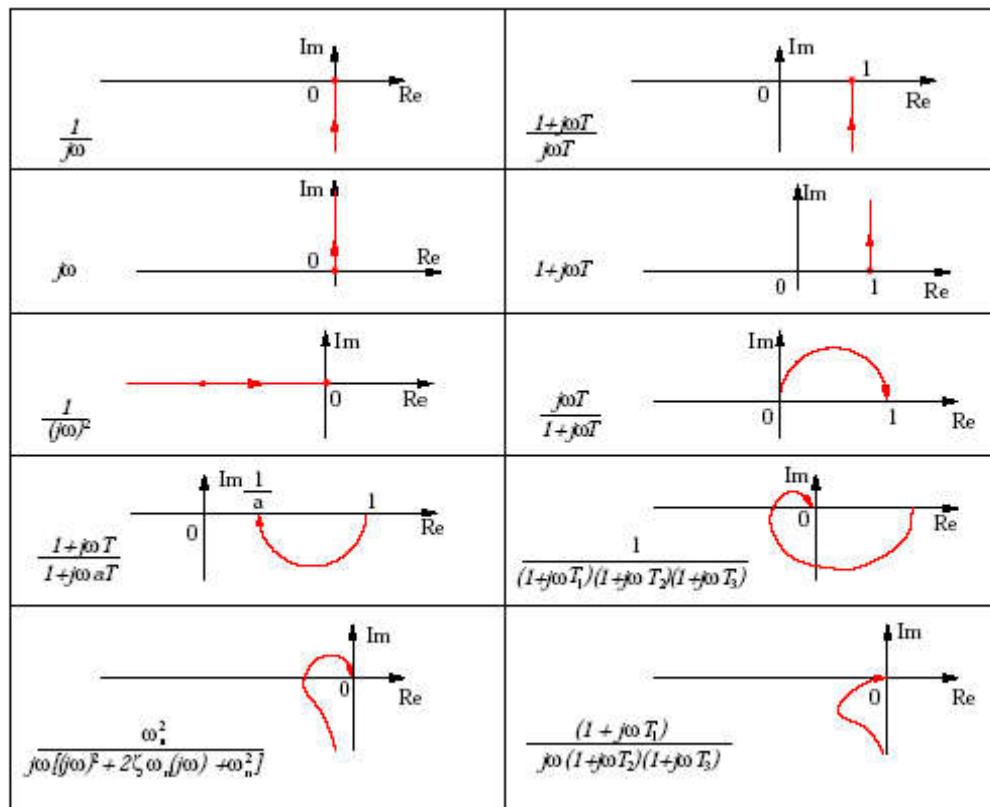


Figure 4.9 Représentations de Nyquist des systèmes usuels

### IV.5.3. Diagramme de Black (ou de Nichols)

Le diagramme de Black de  $G(j\omega)$  consiste à tracer le gain  $|G(j\omega)|_{dB}$  en fonction de la phase  $\phi(\omega) = \arg G(j\omega)$  en faisant varier la pulsation  $\omega$  de 0 à  $+\infty$ . Ce diagramme permet d'avoir les deux grandeurs caractérisant un système (le gain et la phase) sur un même graphe.

#### IV.5.3.a. Cas d'un système de premier ordre

$$\text{On a : } G(j\omega) = \frac{k}{\tau p + 1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log [(\tau\omega)^2 + 1] \\ \phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

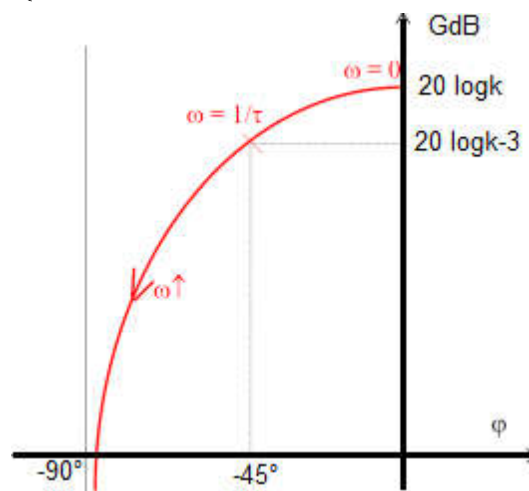


Figure 4.10 Diagramme de Black d'un système du 1<sup>er</sup> ordre.

## IV.5.3.b. Cas d'un système de second ordre

De même pour un système de second ordre du type :  $G(j\omega) = \frac{k\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$   
 nous retrouvons des caractéristiques identiques que pour le tracé dans le plan de Bode.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log \left( \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

La courbe d'un système d'ordre 2 dans le plan de Nichols-Black admet donc toujours une asymptote verticale en  $-180^\circ$  aux hautes fréquences.

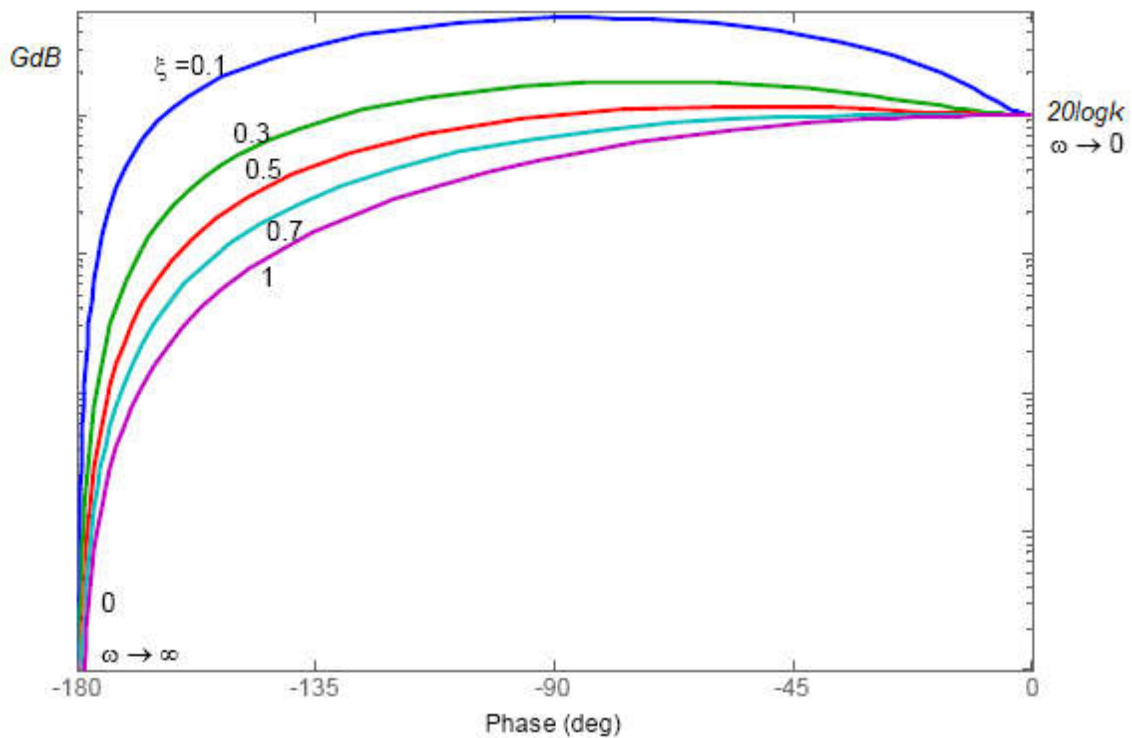


Figure 4.11 Réponse fréquentielle d'un système de second ordre dans le plan de Nichols-Black pour  $\xi$  variant et  $\omega_n=1$ .