

Chapitre .V. Stabilité et précision des systèmes asservis linéaires continus.

V.1. Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents tout l'intérêt de la boucle de retour à savoir :

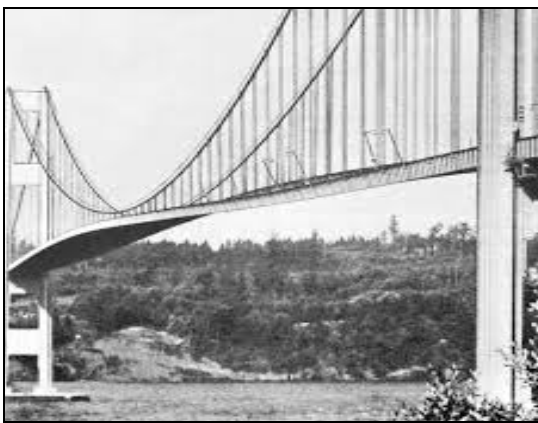
- ✓ Commande plus précise qu'en boucle ouverte ;
- ✓ Bande passante plus large, donc système plus rapide.

On verra plus loin, pourquoi, lorsqu'on augmente trop le gain en boucle ouverte, il apparaît des oscillations de la grandeur de sortie qui sont incontrôlable et qui peuvent mettre en péril le système (ou l'installation). Il est donc absolument nécessaire de bien connaître les conditions d'une bonne stabilité avant de refermer la boucle.

Ce chapitre sert à évoquer une étude plus ou moins détaillée des performances du système asservi linéaire continu, notamment la stabilité et la précision statique.

V.2. Concept de stabilité

La stabilité est le critère le plus important dans la réalisation des systèmes de contrôle. Si un système n'est pas stable, les autres paramètres n'ont aucune signification. On doit donc porter une attention particulière à la stabilité. Un système instable ne peut pas être conçu pour donner une réponse transitoire et erreur statique spécifique. Physiquement, un système instable dont la réponse naturelle croît sans limites peut causer des dommages au système lui-même, à des systèmes adjacents, ou causer des blessures à des personnes. Il faut toujours vérifier la stabilité d'un système. En effet, en l'absence de cette propriété qualitative, aucun système n'est utilisable en pratique.



a) Au début des oscillations



b) Au moment de la catastrophe

Figure 5.1 Pont du détroit de Tacoma (1940, à Puget Sound, Washington, USA)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_detroit_de_Tacoma_\(1940\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_detroit_de_Tacoma_(1940))

Le pont de Tacoma ci-dessus (un exemple d'un système instable). En novembre 1940, lors de la rupture de l'ouvrage, la vitesse du vent était d'environ 65 km/h. Des oscillations de grande amplitude en torsion sont apparues à 10 h, menant à l'effondrement du pont à 11 h 10.

V.3. Stabilité des systèmes

V.3.1. Définitions

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système :

Définition 1 : On dit qu'un système est stable lorsque, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, lorsqu'il tend à s'en écarter davantage. Dans le cas intermédiaire d'un système qui ne revient pas à son équilibre mais ne s'en écarte pas, nous parlerons donc du système à la limite de la stabilité.

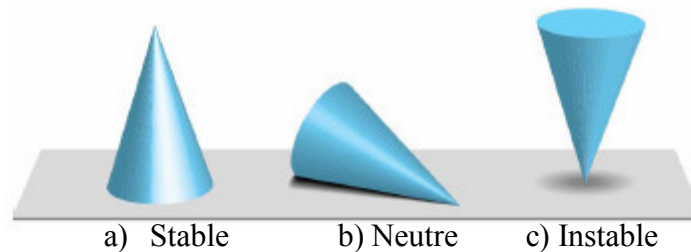


Figure 5.2 Exemple de stabilité d'un cône

Définition 2 : Un système au repos (conditions initiales nulles) est stable si et seulement si lorsqu'on lui applique une entrée bornée (limitée), sa sortie est bornée. Une variation d'un signal est dite bornée lorsqu'elle est constante en régime permanent.

Définition 3 : Un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini.

V.3.2. Condition générale de la stabilité des systèmes

Un système linéaire continu ayant une fonction de transfert $G(p)$ est stable si et seulement si tous les pôles de $G(p)$ appartiennent au demi-plan complexe gauche (i.e. tous les pôles sont à partie réelle négative). Le demi-plan gauche est appelé la région de stabilité. En revanche, le demi-plan droit est une zone d'instabilité (figure 5.3).

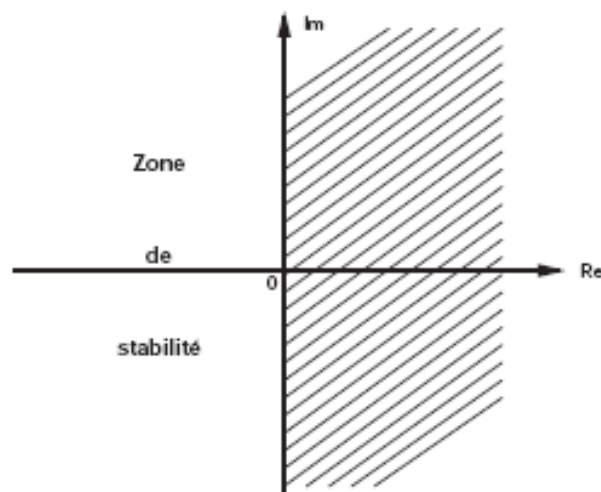


Figure 5.3 Position des pôles dans le plan complexe et stabilité.

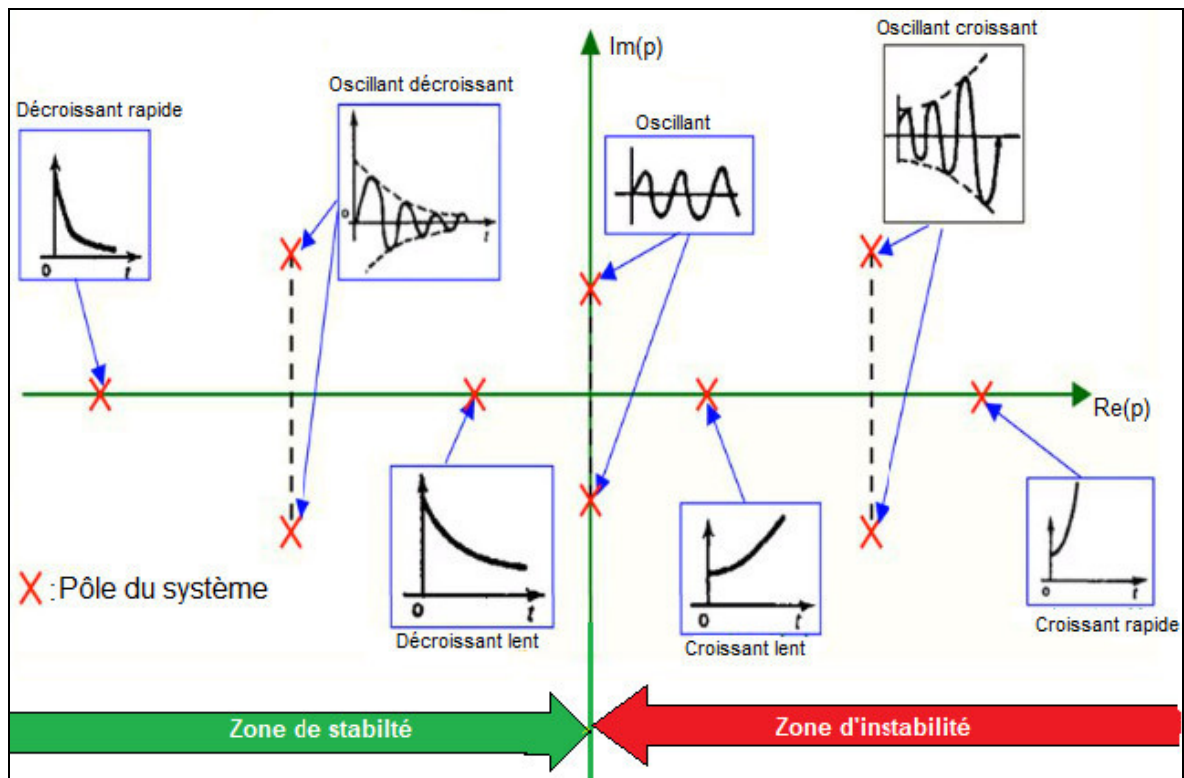
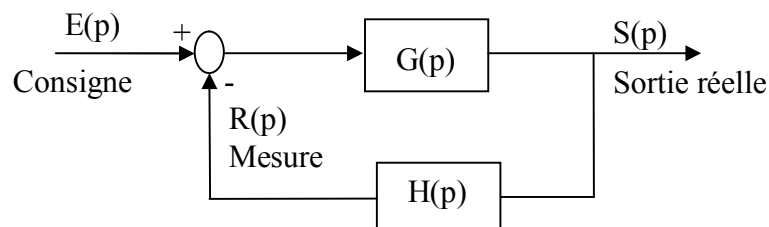


Figure 5.4 Influence de la position des pôles sur la stabilité du système.

V.3.3. Détermination de la stabilité d'un système asservi

Considérons un système asservi défini par le schéma fonctionnel suivant:



D'après la condition générale précédente, ce système est stable si seulement les pôles de sa FTBF sont à partie réelle strictement négative. Or ces pôles sont les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + GH(p) = \sum_{i=0}^n b_i p^i = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0 \quad (5.1)$$

Diverses méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la stabilité des systèmes asservis linéaires continus. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories :

● Méthodes algébriques

- a) Calcul des pôles de la fonction de transfert.
- b) Critère de Routh.
- c) Critère de Hurwitz
- d) Critère de Mikhaïlov.

● Méthodes graphiques

- a) Critère de Nyquist.
- b) Critère de Revers.
- c) Lieu d'Evans (ou lieu des racines).

V.4. Méthodes algébriques de Stabilité

Ce sont des règles permettant de savoir si les racines (ou pôles du système) d'une équation algébrique (équation ou polynôme caractéristique du système) : $b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$ ont leur partie réelle négative.

V.4.1. Calcul des pôles de la fonction de transfert

La condition fondamentale de stabilité d'un système est que tous les pôles de sa fonction de transfert aient leur partie réelle négative. Si au moins un pôle a sa partie réelle positive, le système deviendra instable. Si des pôles ont une partie réelle égale à zéro, le système est dit marginalement stable.

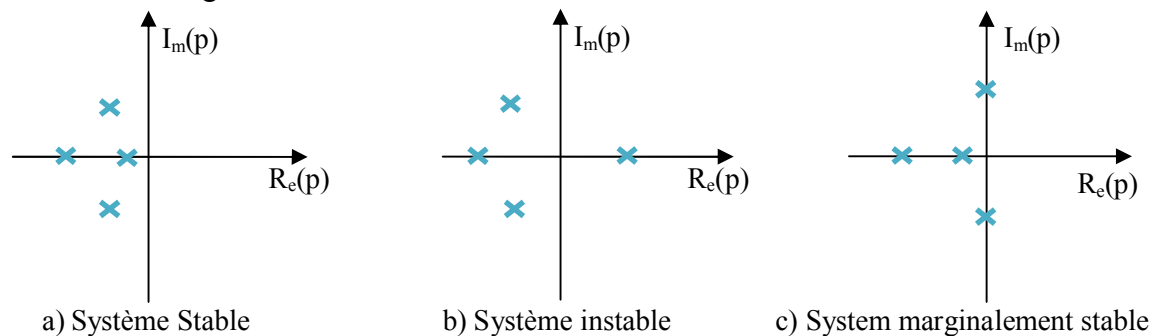


Figure 5.5 Stabilité d'un système selon les pôles.

Dans certains cas, il peut être difficile de calculer les racines sans l'aide d'un logiciel spécifique (exemple : Matlab).

Exemple

Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3}$$

Son équation (ou polynôme) caractéristique est : $p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3 = 0$

Avec Matlab on écrit :

```
>> roots ([1 2 3 6 5 3])
```

ans =

0.3429 + 1.5083i

0.3429 - 1.5083i

-1.6681 + 0.0000i

-0.5088 + 0.7020i

-0.5088 - 0.7020i

On remarque que l'équation caractéristique du système a 3 racines stables et 2 instables. Cette méthode nécessite le calcul explicite des pôles de la fonction de transfert, ce qui est fastidieux pour des ordres élevés. On cherche donc des méthodes algébriques permettant de décider du signe des pôles sans nécessairement les calculer explicitement.

Grace aux deux commandes de Matlab:

```
>> G=tf ([1 1], [1 2 3 6 5 3]), pzmap (G)
```

On peut mettre en évidence la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert $G(p)$ donnée précédemment (voir figure 5.6).

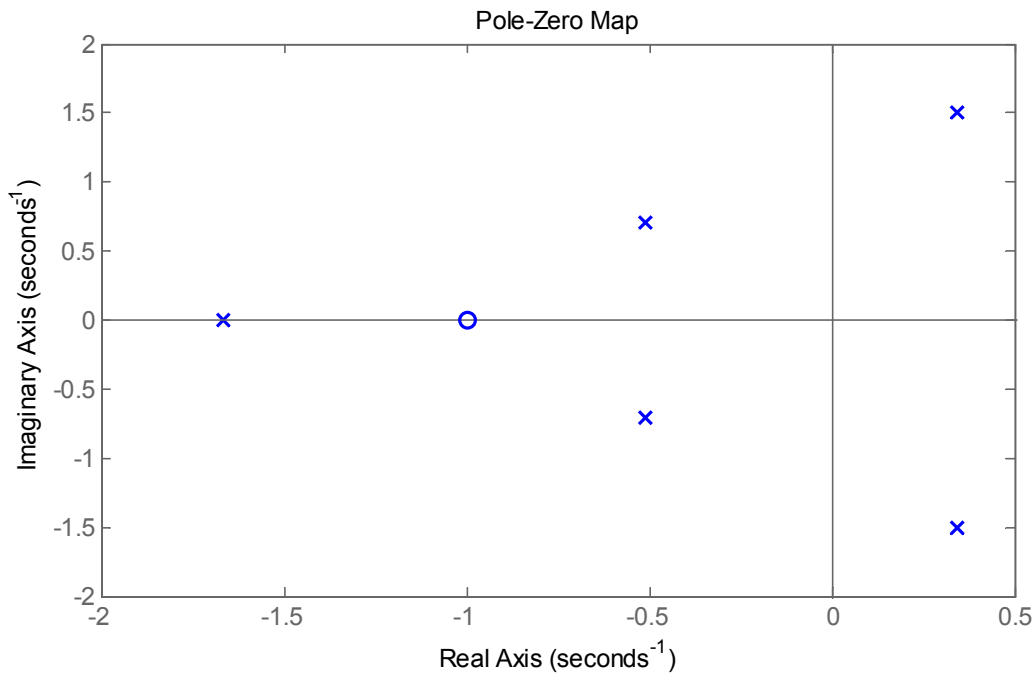


Figure 5.6 Carte des pôles et des zéros de la fonction de transfert $G(p)$

V.4.2. Critère de stabilité de Routh

Ce critère se compose de deux conditions :

- Une condition nécessaire pour qu'un système soit stable est que tous les coefficients b_i , du polynôme caractéristique, soient positifs. Cette condition n'est suffisante que dans le cas des systèmes du premier et du second ordre.

Note : Si un des coefficients est nul ou négatif alors qu'un autre coefficient au moins est positif, il existe une racine ou des racines imaginaires ou nulle ou à partie réelle positive.

- Si la condition précédente est vérifiée, une condition nécessaire et suffisante est traduite par l'analyse du tableau de Routh.

On construit le tableau de Routh (de $n+1$ lignes) comme suit:

p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	0
p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	b_{n-7}	...	0
p^{n-2}	C_{31}	C_{32}	C_{33}
p^{n-3}	C_{41}	C_{42}	C_{43}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
p^1	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}
p^0	$C_{(n+1)1}$	$C_{(n+1)2}$	$C_{(n+1)3}$

$$C_{31} = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}; \quad C_{32} = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}; \quad C_{33} = \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}};$$

Où

$$C_{41} = \frac{C_{31}b_{n-3} - b_{n-1}C_{32}}{C_{31}}; \quad C_{41} = \frac{C_{31}b_{n-5} - b_{n-1}C_{33}}{C_{31}}; \dots etc$$

Les éléments de toutes les lignes dans la table de Routh se calculent de la même manière. Le calcul des lignes est poursuivi jusqu'à ce que la première colonne soit remplie. On arrête la construction de ce tableau dès qu'un zéro apparaît dans la 1^{ère} colonne excepté le dernier élément.

Énoncé du critère de Routh :

Le nombre de racines du polynôme dont la partie réelle est positive est égale au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh. Le système est donc **stable** si et seulement si **tous les coefficients de la première colonne sont strictement positifs**.

En pratique, différents cas peuvent se produire suivant que la première colonne comporte ou non un terme nul.

Exemple 1:

Soit la fonction du transfert d'un système asservi : $F(p) = \frac{1}{p^4 + 7p^3 + 17p^2 + 17p + 6}$

La première condition est vérifiée, on construit alors la table Routh suivante:

$$\begin{array}{l}
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & 17 & 6 \\
 7 & 17 & 0 \\
 \frac{7 \times 17 - 1 \times 17}{7} & \frac{7 \times 6 - 1 \times 0}{7} & 0 \\
 \frac{\frac{102}{7} \times 17 - 7 \times 6}{7} & 0 & \\
 \frac{102}{7} & & \\
 6 & &
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{l}
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc|}
 \hline
 1 & 17 & 6 \\
 7 & 17 & 0 \\
 14.57 & 6 & 0 \\
 14.12 & 0 & \\
 6 & 6 &
 \end{array}$$

On remarque que tous les coefficients de la première colonne sont de même signe (positifs), le système en question est alors **stable**.

Exemple 2:

Soit $G(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 5}$

La première condition est vérifiée, on construit alors la table Routh comme suit:

$$\begin{array}{l}
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 3 & 5 \\
 2 & 4 & 0 \\
 \frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} & \frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{2} & 0 \\
 \frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1} & 0 & \\
 \frac{-6 \times 5 - 1 \times 0}{-6} & 0 & \\
 \hline
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{l}
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 3 & 5 \\
 2 & 4 & 0 \\
 1 & 5 & 0 \\
 -6 & 0 & \\
 5 & 0 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Nous constatons que tous les coefficients de la première colonne ne sont pas de même signe. En effet, il ya deux changements de signe (de +1 à -6 et de -6 à +5), cela veut dire que le système possède deux pôles à partie réelle positive (deux pôles instables), le donc système est **instable**.

Quelques cas particuliers :

- **1^{er} cas particulier** : Si un des coefficients de la première colonne est nul (excepté le dernier) et que les autres termes de la même ligne ne sont pas tous nuls.

Exemple :

Soit la FTBF suivante : $F(p) = \frac{1}{p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 4p^2 + p + 1}$

$$\begin{array}{l}
 p^5 \\
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 2 & 1 \\
 2 & 4 & 1 \\
 0 & 0.5 & 0 \\
 c_{41} & c_{42} & 0 \\
 c_{51} & c_{52} & \\
 c_{61} & & \\
 \hline
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{l}
 p^5 \\
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 2 & 1 \\
 2 & 4 & 1 \\
 \varepsilon & 0.5 & 0 \\
 -1/\varepsilon & 1 & 0 \\
 c_{51} > 0 & 0 & \\
 c_{61} = 1 & & \\
 \hline
 \end{array}$$

Pour remédier à ce problème, on remplace le terme nul par un ε très petit positif. Dès lors

on obtient : $c_{41} = \frac{4\varepsilon - 1}{\varepsilon} \approx \frac{-1}{\varepsilon} < 0$ et $c_{42} = \frac{0,5c_{41} - \varepsilon}{c_{41}} \approx 0,5 > 0$.

$$c_{51} = \frac{-1/\varepsilon \times 0.5 - \varepsilon \times 1}{-1/\varepsilon} = 0.5 + \varepsilon^2 > 0 ; c_{61} = \frac{c_{51} \times 1 - (-1/\varepsilon \times 0)}{c_{51}} = 1 > 0 .$$

Tous les termes de la première colonne ne sont pas de même signe. De plus, il ya deux changements de signe, par conséquent le système possède deux pôles à partie réelle positive donc le **système est instable**.

- **2ème cas particulier** : Tous les coefficients de toute une ligne sont nuls.

Exemple :

Soit l'équation caractéristique d'un système asservi donnée par :

$$p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 18p + 18 = 0$$

On forme la table de Routh suivante :

$$\begin{array}{l} p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \\ c_{s1} \end{array} \begin{array}{|cccc} \hline 1 & 11 & 18 & 0 \\ \hline 2/2 & 18/2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 9 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ \hline 9 & 0 & & \end{array}$$

Remarque : Pour simplifier les calculs, on peut diviser ou multiplier tous les éléments d'une même ligne par le même nombre. Exemple on divise les éléments de la 2^{ème} ligne par 2.

Quand tous les termes d'une même ligne sont nuls, cela veut dire :

- soit on est en présence de deux pôles réels opposés : alors le système est **instable**.
- soit on est en présence de deux pôles imaginaires purs opposés : $\pm j\beta$, dans ce cas le système est **marginalelement stable**.

Pour analyser la stabilité du système précédent :

- ✓ on construit l'**équation auxiliaire** $q(p)$, c'est-à-dire l'équation formée à partir des coefficients de la ligne qui précède la ligne nulle :

$$q(p) = p^2 + 9 = (p + j3)(p - j3)$$

Les racines de l'équation auxiliaire sont également les racines de l'équation caractéristique du système. On aura $p_{1,2} = \pm j3$ alors, le système est marginalelement stable.

- ✓ On complète le tableau de Routh en remplaçant les coefficients de la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant l'équation auxiliaire par rapport à p , puis on poursuit le calcul. $\frac{dq(p)}{dp} = 2p + 0$

- ✓ Le tableau de Routh précédent devient alors :

$$\begin{array}{l} p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p^1 \\ p^0 \end{array} \begin{array}{|cccc} \hline 1 & 11 & 18 & 0 \\ \hline 2/2 & 18/2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 9 & 0 & \\ \hline 2 & 0 & 0 & \\ \hline 9 & 0 & & \end{array}$$

Comme il n'y a pas de changements de signe, et avec une ligne tout à fait nulle, cela implique que le système est **marginalelement stable** (ou **juste oscillant**).

Exemple : Fonction de transfert dépendante d'un paramètre

On veut analyser la stabilité d'un système dont la fonction du transfert est donnée par :

$$F(p) = \frac{K(p+10)}{p^3 + 4p^2 + (4+K)p + 10K}$$

On forme la table de Routh :

$$\begin{array}{l|lll} p^3 & 1 & 4+k & 0 \\ p^2 & 4 & 10k & 0 \\ p^1 & 4-1.5k & 0 & \\ p^0 & 10k & 0 & \end{array} \quad \text{Le système est stable si } 4 - 1.5K > 0 \Rightarrow 0 < K < \frac{4}{1.5}.$$

Si $K = \frac{4}{1.5}$, la 3^{ème} ligne du tableau deviendra nulle, on construit l'équation auxiliaire :

$$4p^2 + \frac{40}{1.5} = 4(p + j\sqrt{\frac{10}{1.5}})(p - j\sqrt{\frac{10}{1.5}}), \text{ alors le système est marginalement stable.}$$

V.4.3. Critère de Hurwitz

Une autre forme du critère de Routh a été proposée par Hurwitz qui consiste à se servir des déterminants formés à partir des coefficients de l'équation caractéristique du système :

$$1 + GH(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

Le déterminant Δ_n de Hurwitz est construit comme suit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \begin{array}{c} \boxed{b_{n-1}} \quad b_{n-3} \quad b_{n-5} \quad \dots \\ \Delta_1 \end{array} & \begin{array}{c} b_0 \text{ si } n \text{ impair} \\ b_1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} b_n \quad \boxed{b_{n-2}} \quad b_{n-4} \quad \dots \\ \Delta_2 \end{array} & \begin{array}{c} b_1 \text{ si } n \text{ impair} \\ b_0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{array} & 0 \\ 0 \quad b_{n-1} \quad \boxed{b_{n-3}} \quad \dots & \dots & 0 \\ 0 \quad b_n \quad \Delta_3 \quad b_{n-2} \quad b_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \quad \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

Le tableau de Hurwitz comprend « n » lignes, les déterminants Δ_i pour $i=1,2,\dots, n-1$ sont formés comme suit :

$$\Delta_1 = b_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ b_n & b_{n-2} \end{vmatrix} = b_{n-1} b_{n-2} - b_n b_{n-3}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-1} & b_{n-5} \\ b_n & b_{n-2} & b_{n-4} \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \dots \text{ etc}$$

On continuera d'une manière analogue le calcul des Δ_i restants (pour $i=4$ jusqu'à $i=n$).

Énoncé du théorème de Hurwitz :

Un système asservi est stable, seulement si tous les b_i sont positifs (condition nécessaire) et que tous les déterminants obtenus sont strictement positifs ($\Delta_i > 0$), cela veut dire que tous les pôles du système ont leur partie réelle négative.

Note :

- Si un des déterminants Δ_i est nul, implique que le système est à la limite de la stabilité.
- Si un des déterminants Δ_i est nul cela implique que le système est instable.

Exemple : Soit un système asservi linéaire dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$p^3 + 2p^2 + 4p + 6 = 0$$

Étudier la stabilité du système selon le critère de Hurwitz.

Solution :

- On remarque que tous les coefficients b_i sont positifs \Rightarrow la condition nécessaire est vérifiée.
- On calcule les déterminants de Hurwitz :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_1 = 2 > 0$$

Comme tous les Δ_i sont positifs, alors **le système est stable**.

V.4.4. Critère de Mikhaïlov

Ce critère s'applique aussi directement à l'équation caractéristique du système. On travaille en régime harmonique ($p=j\omega$) et on écrit cette équation sous la forme :

$$A(\omega) + jB(\omega)$$

Où $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont deux polynômes en fonction de ω .

Le critère de Mikhaïlov s'énonce ainsi :

Un système asservi (en boucle fermée) est stable seulement si les racines des deux polynômes $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont distinctes et régulièrement alternées sur l'axe des ω croissants.

Exemple :

Soit le système dont la FTBO est donnée par : $GH(p) = \frac{4}{p(p+1)(0.1p+1)}$

Étudier la stabilité du système selon le critère de Mikhaïlov.

Solution :

L'équation caractéristique du système en boucle fermée s'écrit :

$$1 + GH(p) = 0.1p^3 + 1.1p^2 + p + 4 = 0, \text{ on pose } p=j\omega \text{ on aura alors :}$$

$$0.1(j\omega)^3 + 1.1(j\omega)^2 + (j\omega) + 4 = 4 - 1.1\omega^2 + j\omega - j0.1\omega^3$$

$$\text{d'où } A(\omega) = 4 - 1.1\omega^2 \quad \text{et } B(\omega) = \omega - 0.1\omega^3$$

$$\text{donc } \begin{cases} A(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{4}{1.1}} = 1.9 \text{ [rd / s]} \\ B(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0 \quad \text{et } \omega_3 = \sqrt{10} \text{ [rd / s]} \end{cases}$$

Nous constatons que les trois racines trouvées sont bien alternées ($\omega_2 < \omega_1 < \omega_3$), alors le système est **stable** en boucle fermée.

Conclusion :

Les critères de stabilité algébriques évoqués précédemment sont limités, d'une part, par leur complexité et difficulté d'interprétation des calculs et leur mise en œuvre pour des systèmes d'ordre élevé et d'autre part, nécessitent de connaître explicitement la fonction de transfert du système, ce qui empêche d'étudier des systèmes caractérisés par des données expérimentales. En outre, ces critères ne donnent aucune information sur le régime transitoire (i.e. le degré de stabilité). Ainsi, toutes ces considérations expliquent l'intérêt des critères graphiques qui permettent de juger la stabilité d'un système asservi à partir de son lieu de transfert en boucle ouverte.

V.5. Méthodes graphiques de Stabilité

Nous allons voir comment la stabilité d'un système asservi linéaire peut être reliée aux diagrammes représentant sa réponse en fréquences en boucle ouverte (FTBO=GH(j ω)).

V.5.1. Critère de stabilité de Nyquist (1932)

Le critère de Nyquist est un critère graphique qui permet de conclure quant à la stabilité de la boucle fermée par la seule connaissance de la boucle ouverte. L'idée fondamentale du critère de Nyquist est basée sur l'application du théorème de Cauchy.

V.5.1.a. Théorème de Cauchy

Si un point d'affixe p (où $p = \sigma + j\omega$), décrit dans le sens des aiguilles d'une montre un contour fermée (C) à l'intérieur duquel se trouvent le nombre : P pôles et Z zéros d'une fonction complexe F(p), alors que la courbe (Γ), image du contour (C) par la transformation F(p), décrit autour de l'origine, un nombre N tours, tel que $N = Z - P$, comptés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre. (En d'autres termes, N est compté positivement si C et F(C) sont orientés dans le même sens et négativement autrement).

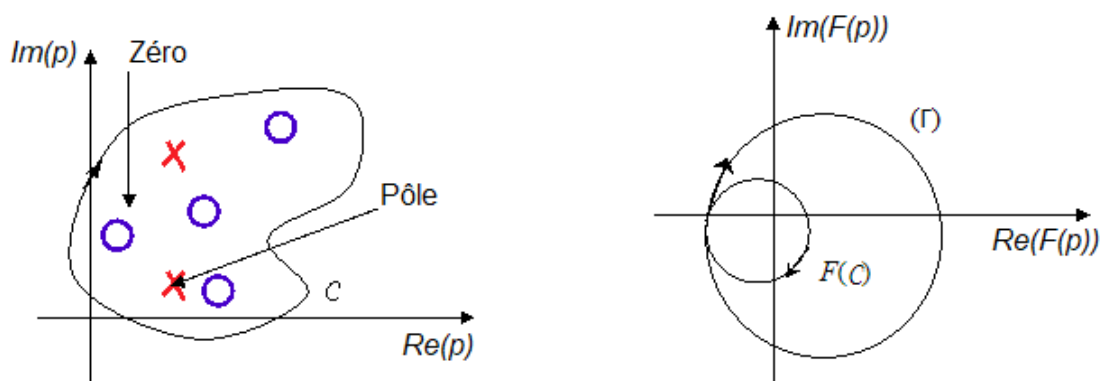


Figure 5.7 Principe du théorème de Cauchy

Chaque tour autour de l'origine correspond à une variation de l'argument du $G(p)$ égale à 2π , de sorte que le nombre :

$$N = \Delta\phi / 2\pi \quad (5.1)$$

Où $\Delta\phi$ est la variation totale de l'argument de $G(p)$ quand N décrit complètement la courbe (Γ) .

$$\text{Alors :} \quad \Delta\phi = 2\pi (Z - P) \quad (5.2)$$

V.5.1.b. Application du théorème de Cauchy au système asservi

Nous savons qu'un système en boucle fermée soit stable seulement si toutes les racines de son équation caractéristique soient à partie réelle négative, en d'autres termes, il faut qu'aucune racine ne soit située à droite de l'axe imaginaire (pas de racines à PRP $\Rightarrow Z=0$).

Étant donné un système asservi défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $GH(p)$, la relation $N=Z-P$ donne le nombre de tours que fait le lieu de transfert de l'équation caractéristique $1+GH(p)$ autour de l'origine.

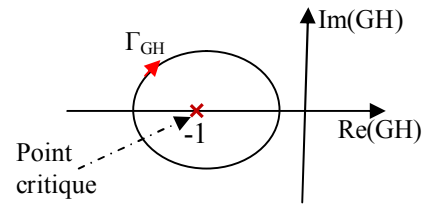
Si l'on appelle : Z = nombre des zéros de $1+GH(p)$ à parties réelle positive, qui sont également les pôles de la FTBF

P = nombre des pôles de $1+GH(p)$ à parties réelle positive, qui sont également les pôles de la FTBO.

- Si $P \neq 0$ (système instable en boucle ouverte), alors pour que le système soit stable en boucle fermée ($\Rightarrow Z=0$), on doit avoir $N=-P$, cela signifie que le lieu de transfert de $1+GH(p)$ doit effectuer P tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique.
- Si $P=0$ (système stable en boucle ouverte), alors pour que le système en boucle fermée soit stable (i.e. Z doit être nul), seulement si le contour engendré par $1+GH(p)$ n'entoure pas l'origine $\Rightarrow N=0$ et par la suite $Z=0$.

Remarque : Si on pose $1+GH(p)=Q(p)$ donc on peut écrire $HG(p)=Q(p)-1$, alors au lieu d'examiner le nombre de tours de $Q(p)$ autour de l'origine on examine le nombre de rotations de $GH(p)$ autour du point $(-1,0)$, appelé point critique.

On peut donc énoncé le critère de Nyquist comme suit :



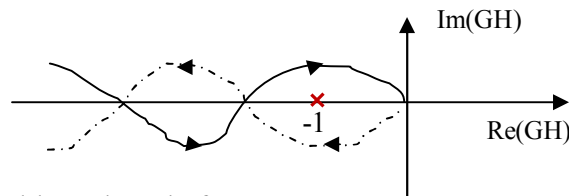
V.5.1.c. Énoncé du critère de Nyquist

- Si $P=0$, alors le système en boucle fermée est stable, seulement si le contour engendré par $GH(p)$ n'entoure pas le point $(-1,0)$ quand le système est stable en boucle ouverte c'est à dire $GH(p)$ n'a pas de pôles à partie réelle positive (i.e. $P=0$ et $N=0 \Rightarrow Z=0$).
- Si $P \neq 0$ (système instable en boucle ouverte), alors le système asservi (système en boucle fermée) est stable, seulement si le contour $GH(p)$ entoure le point $(-1,0)$ dans le sens antihoraire P fois or. $GH(p)$ possède P pôles à PRP (i.e. $P=0$ et $N=0 \Rightarrow Z=0$).

Note : Plus particulièrement, lorsque $P=0$, en parcourant la trajectoire de $GH(p)$ dans le sens des ω croissants (ω varie de $-\infty$ à $+\infty$), si le point $(-1,0)$ apparait à droite, le système est instable, sinon il est stable (voir critère de Revers dans le plan de Nyquist 5.2.2.1).

Exemple 1.

- Soit $P=1$ (nombre de pôles à PRP de la FTBO) et étant donné le lieu de transfert de la FTBO suivant :

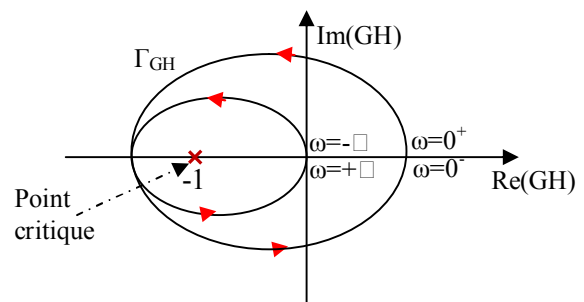


Le système est-il stable en boucle fermée ?

Comme le lieu de Nyquist de $GH(p)$ entoure le point critique $(-1,0)$ une seule fois dans le sens des aiguilles d'une montre (sens anti-trigonométrique) $\Rightarrow N=1$ alors $Z=P+N=2 \neq 0$, on conclure que le système est instable en boucle fermée (car la FTBO admet deux pôles à PRP).

Exemple 2.

- Soit $P=2$ (nombre de pôles à PRP de la FTBO) et étant donné le lieu de transfert de la FTBO ci-contre :



Le système est-il stable en boucle fermée ?

On remarque que le lieu de Nyquist de $GH(p)$ entoure le point critique $(-1,0)$ deux fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) $\Rightarrow N=-2$ alors $Z=P+N=0$, le système est donc stable en boucle fermée (car la FTBO n'a aucun pôle à PRP).

V.5.1.d. Choix du contour d'exclusion de Nyquist

Le contour d'exclusion de Nyquist appelé aussi contour de **Bromwith** est un contour fermé du plan complexe des p qui enferme complètement le demi plan droit du plan des p . On prend un demi-cercle de rayon infini. Pour éviter les pôles éventuels de $GH(p)$ situés sur l'axe imaginaire, on fait passer le contour à droite de ces pôles par des petits cercles.

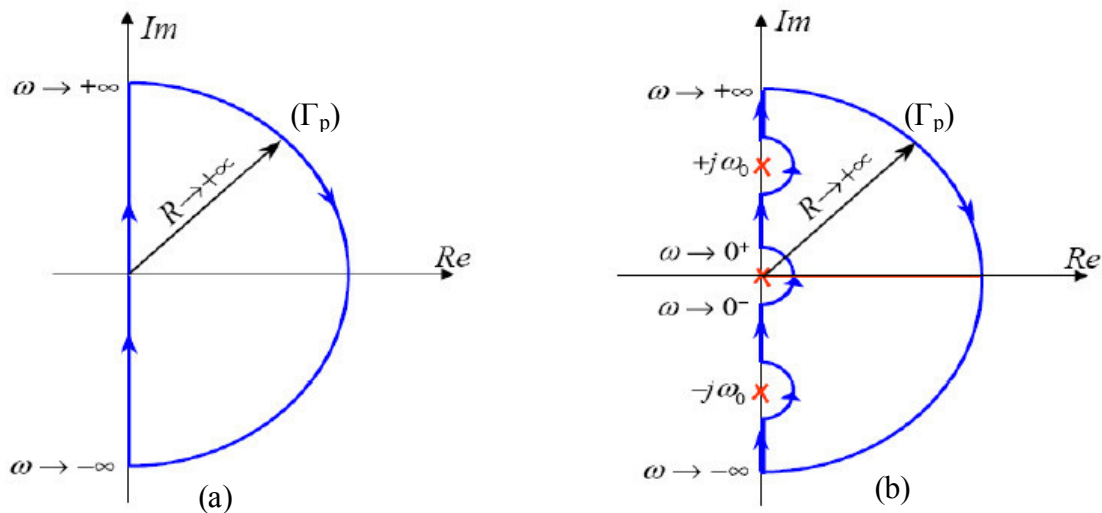


Figure 5.8 Contour d'exclusion de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est l'image par $GH(p)$ du contour fermé appelé contour d'exclusion de Nyquist. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de $GH(p)$ à partie réelle strictement positive. Si $GH(p)$ a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon $\epsilon \rightarrow 0$.

Le lieu de Nyquist (figure 5.4 (b)) est constitué comme suit :

- 1) de $j0^-$ à $j0^+$ le long d'un demi-cercle de rayon $\rho \rightarrow 0$

$$(p = \rho e^{j\theta} \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2})$$

- 2) de $j0^+$ à $+j\omega_0^-$ le long de l'axe imaginaire.

- 3) de $+j\omega_0^-$ à $+j\omega_0^+$ le long d'un demi-cercle de rayon $\rho \rightarrow 0$

$$(\text{avec } p = \rho e^{j\theta} + j\omega_0 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2})$$

- 4) de $+j\omega_0^+$ à $+j\infty$ le long de l'axe imaginaire.

- 5) de $+j\infty$ à $-j\infty$ le long d'un demi-cercle de rayon $R \rightarrow \infty$

$$(p = Re^{j\theta} \text{ avec } \theta \text{ varie de } +\frac{\pi}{2} \text{ à } -\frac{\pi}{2})$$

- 6) de $-j\infty$ à $-j\omega_0^-$ le long de l'axe imaginaire.

Note importante : La méthode de Nyquist consiste donc à trouver l'image (Γ_{GH}) du chemin ou lieu fermé (Γ_p) par l'intermédiaire de la fonction $GH(p)$.

Exemple :

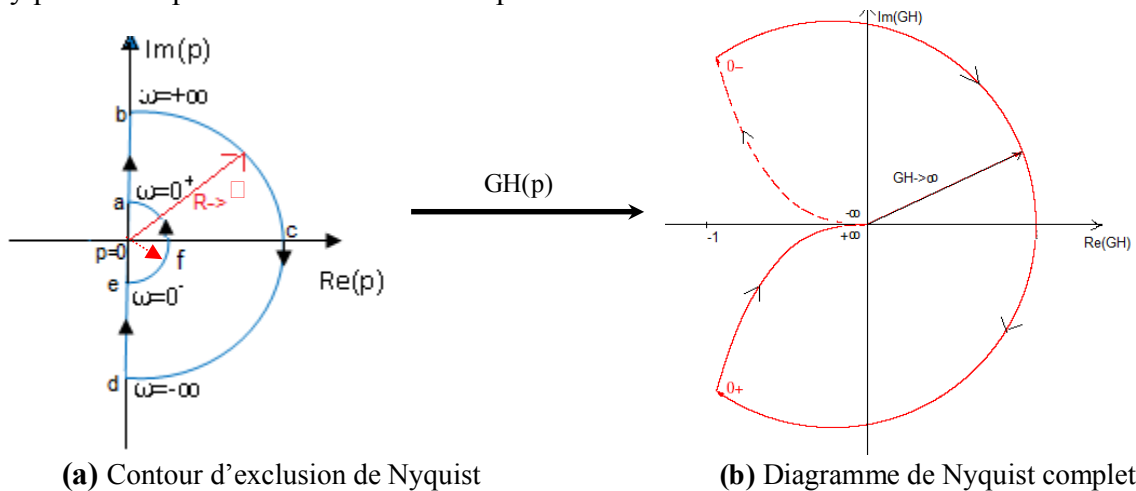
Soit l'asservissement à retour unitaire de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$GH(p) = \frac{k}{p(1+\tau P)} \quad \text{avec } \tau > 0 \text{ et } k > 0$$

Étudier la stabilité du système asservi selon le critère de Nyquist.

Réponse :

1. La fonction de transfert en boucle ouverte comprend une intégration et le contour de Nyquist correspondant est donc donnée par :



2. Le tracé du lieu de Nyquist complet implique les calculs suivants.

✓ Image de segment \overline{ab} : On a $p=j\omega$ avec ω varie de 0^+ à $+\infty$

Alors on obtient:

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} GH(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega\tau)} = \infty \left| \underline{-\frac{\pi}{2}} \right. \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} GH(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega\tau)} = 0 \left| \underline{-\pi} \right. \end{cases}$$

✓ Image de demi-cercle \overline{bcd} : On a $p = Re^{j\theta}$ où θ varie de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ et

ω varie de $+\infty$ à $-\infty$ Alors $GH(Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k}{Re^{j\theta}(1+\tau Re^{j\theta})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k}{\tau R^2} e^{-j2\theta} = 0 \left| \underline{-2\theta} \right.$
 $\arg(GH)$ varie donc de $-\pi$ à $+\pi$, alors l'image de \overline{bcd} est le point d'origine.

✓ Image de segment \overline{de} : On a $p=j\omega$ avec ω varie de $-\infty$ à 0^-

C'est la symétrie par rapport à l'axe des réels du segment de droite \overline{ab}

✓ Image de \widehat{efa} : On a $p = \rho e^{j\theta}$ où θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et ω varie de 0^- à 0^+

Alors $GH(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{k}{\rho e^{j\theta}(1+\tau \rho e^{j\theta})} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{k}{\tau \rho} e^{-j\theta} = \infty \left| \underline{-\theta} \right.$, $\left| \underline{-\theta} \right.$ varie de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$

On a alors $N=0$ (car le lieu de Nyquist obtenu n'entoure pas le point critique $(-1,0)$) et comme $P=0$ alors $Z=0$, on conclure donc que **le système est stable en boucle fermée.**

V.5.2. Critère du Revers (critère graphique)

Le critère du Revers est une simplification du critère de Nyquist, il est valable uniquement dans le cas de systèmes stables en boucle ouverte ($P^+=0$) à déphasage minimal (i.e. la FTBO n'a pas de pôles ni de zéros à partie réelle positive).

V.5.2.a. Critère du Revers dans le plan de Bode

Un système asservi est stable, si à la pulsation de coupure ω_{c0} pour laquelle le gain $GH_{dB}=0dB$, le déphasage de la réponse en fréquences est supérieur à -180° .

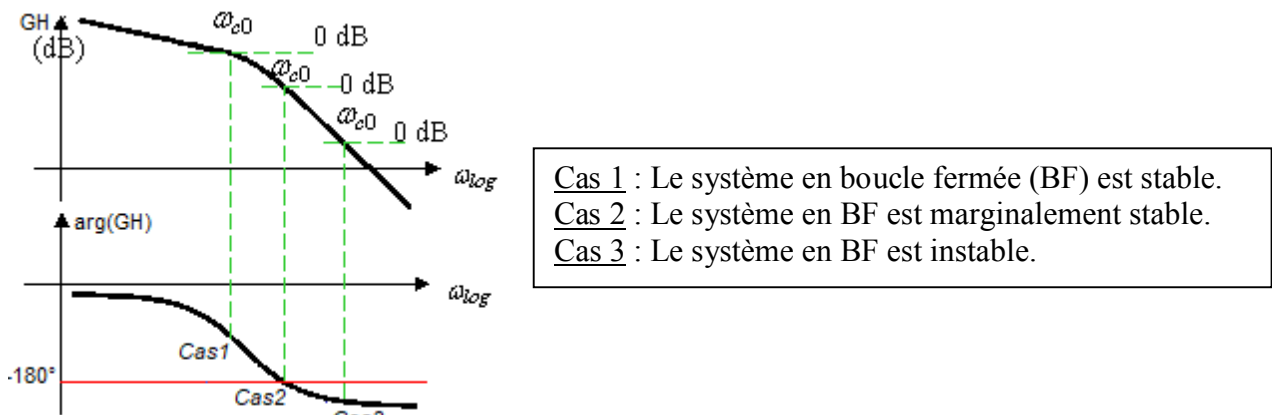


Figure 5.9 Illustration du critère du Revers dans le plan de Bode

V.5.2.b. Critère du Revers dans le plan de Nyquist

Un système à phase minimal est stable en boucle fermée si et seulement si le tracé de Nyquist de sa FTBO ($GH(j\omega)$) laisse le point critique $(-1,0)$ à sa gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens des pulsations croissantes (ω varie de : 0 à $+\infty$). Dans le cas contraire le système est instable. Si le lieu passe par le point critique, le système est juste oscillant (voir fig.5.10).

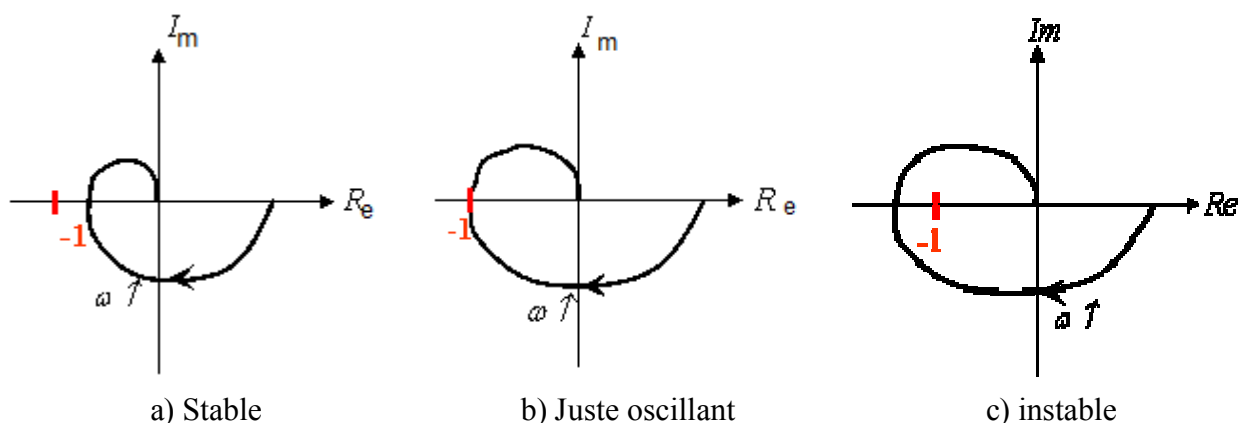


Figure 5.10 Illustration du critère du Revers dans le plan de Nyquist

V.5.2.c. Critère du Revers dans le plan de Black ou Nichols

Dans le plan de Black le point critique $(-1,0)$ est le point de coordonnées $(-180^\circ, 0\text{dB})$. Par analogie au plan de Bode, la double condition :

Doit être vérifiée pour que le système soit stable.

Énoncé du critère : Un système asservi est stable si en parcourant la courbe $GH(j\omega)$ dans le sens des ω croissants, le point $(-180^\circ, 0\text{dB})$ est laissé à sa droite. Dans le cas contraire le système est instable. Si le lieu passe par le point critique, le système est juste oscillant (voir fig.5.11).

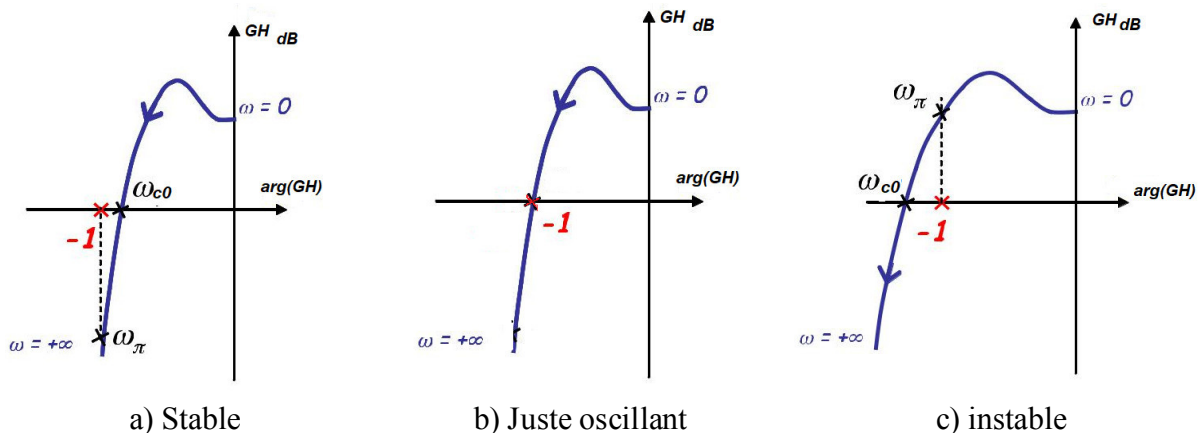


Figure 5.11 Illustration du critère du Revers dans le plan de Black

V.5.3. Marge de stabilité (stabilité relative)

La notion de marges de stabilité est introduit pour s'assurer qu'un système est **loin** du point critique ; en d'autres termes, elles permettent de quantifier la **distance** séparant le lieu de la FTBO du point critique (synonyme de degré de stabilité). On mesure le degré de stabilité par les marges de gain et phase.

V.5.3.a. Marge de gain (MG)

Définition : Gain supplémentaire, exprimée en décibels, nécessaire pour rendre le système marginalement stable (juste oscillant).

$$MG = -20 \log |GH(j\omega_\pi)| \quad (5.1)$$

Où ω_π est la valeur de ω pour laquelle la phase $\phi(j\omega) = \arg(GH(j\omega)) = -\pi$ (soit -180°)

V.5.3.b. Marge de phase (M ϕ)

Définition : Gain supplémentaire, exprimée en degrés (ou en radians), nécessaire pour rendre le système marginalement stable (juste oscillant).

$$M\phi = \pi + \phi(\omega_{c0}) \quad (5.2)$$

Où ω_{c0} est la valeur de ω pour laquelle le gain $|GH(j\omega)|_{dB} = 0\text{dB}$

Note : Selon des expériences, une réponse satisfaisante est évaluée par : une marge de gain MG de $10 \div 15\text{dB}$ et une marge de phase $M\phi$ de $45 \div 60^\circ$.

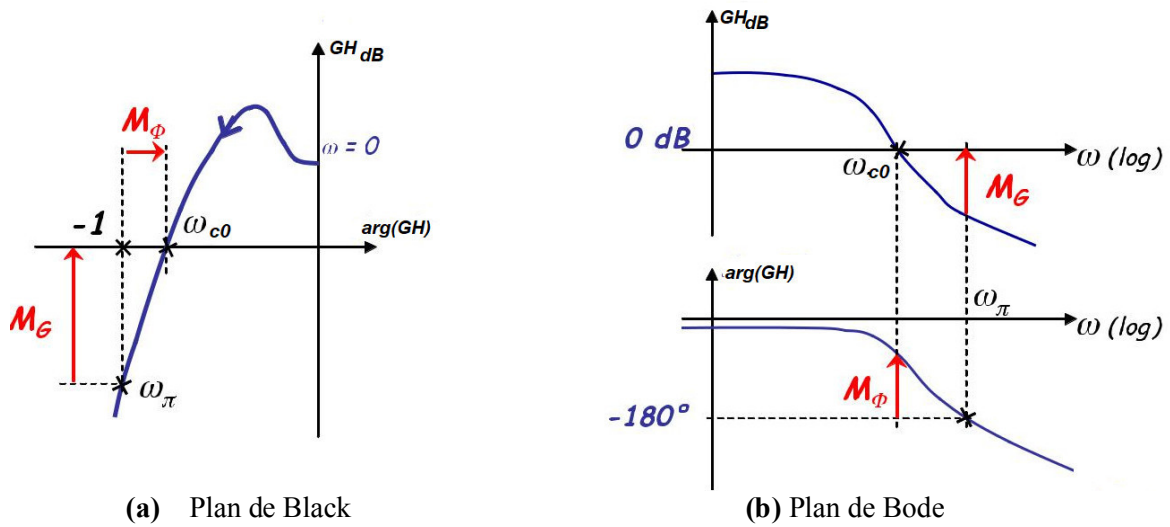


Figure 5.12 Marges de gain et de phase pour un système stable dans les plans de Black et de Bode.

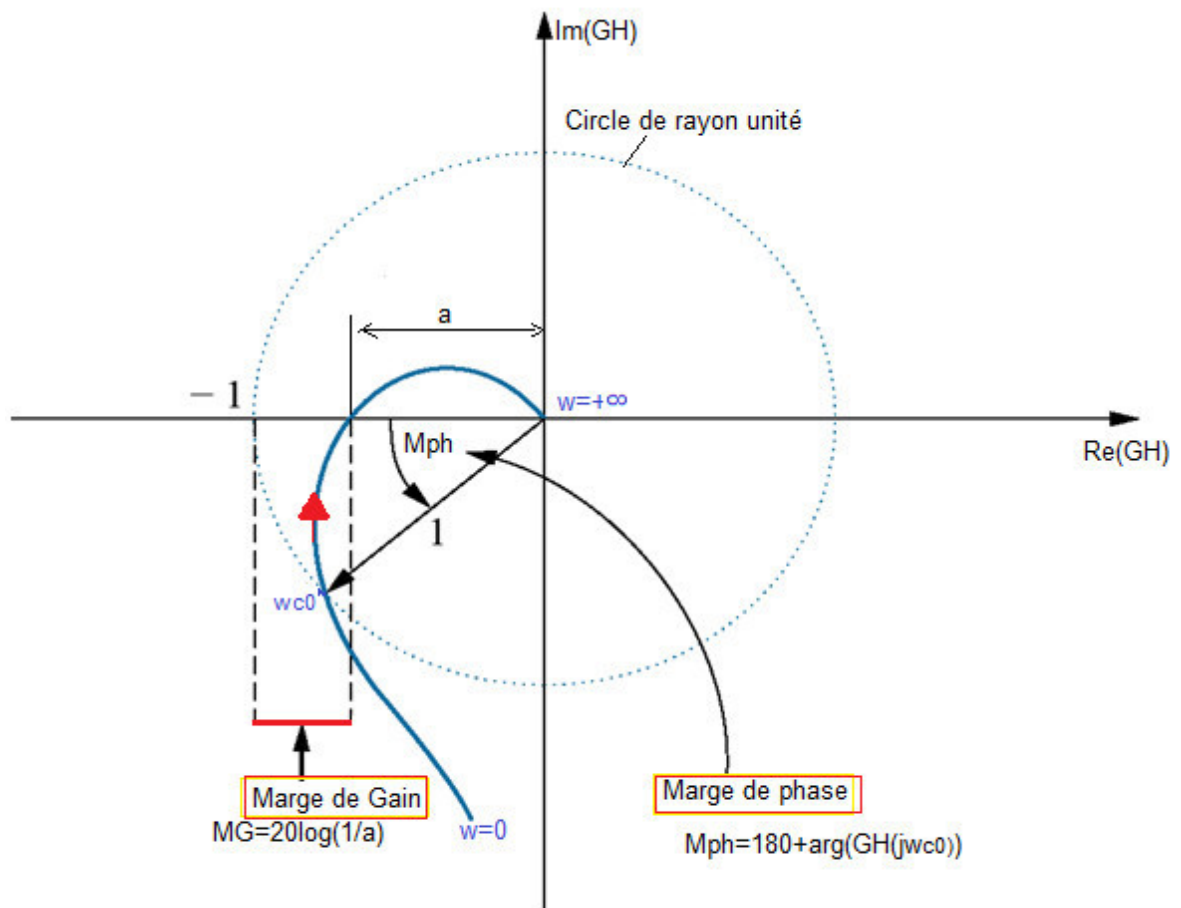


Figure 5.13 Illustration des Marges de gain et de phase pour un système stable dans le plan de Nyquist.

V.6. Précision des systèmes asservis

Nous avons vu dans ce qui précède que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée par l'entrée $e(t)$. Un système peut être jugé par sa stabilité et aussi bien par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée. Les sources d'erreur sont à la fois les variations de l'entrée mais aussi les effets des perturbations.

L'étude de la précision d'un système à retour unitaire revient à étudier la valeur de la différence: $e(t) - s(t)$ notée $\varepsilon(t)$. En effet, au régime transitoire cette différence s'appelle **erreur dynamique** alors qu'en régime permanent s'appelle **erreur statique**.

Par conséquent, on distingue deux types de précisions :

● **Précision statique** : Elle est caractérisée par l'erreur au régime permanent lorsqu'on soumet le système à des entrées canoniques:

- ✚ Échelon, on parle alors d'erreur indicielle ou erreur de position;
- ✚ Rampe, on parle d'erreur de traînage ou erreur de poursuite ou de vitesse;
- ✚ Parabole, on parle d'erreur en accélération.

● **Précision dynamique (rapidité)** : Elle est caractérisée par l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).

V.6.1. Précision statique

En général, le rôle des systèmes asservis est de faire suivre à la sortie $y(t)$ une loi fixée par une consigne $x(t)$, avec pour cas idéal $\varepsilon(t) = x(t) - y(t) = 0, \forall t$. En pratique on a :

- **L'entrée varie** : Le système fonctionne en suiveur et réalise la fonction asservissement;
- **L'entrée constante** : mais un signal de perturbation peut venir se superposer au signal utile en un point quelconque de la chaîne.

On a : $\varepsilon(p) = X(p) - R(p)$

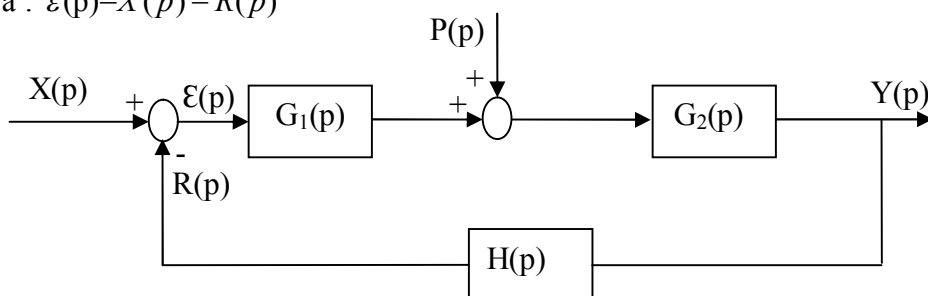


Figure 5.14 Système asservi (cas général)

$$\text{Où : } R(p) = \varepsilon(p) \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p) + P(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p)$$

$$\text{et } R(p) = G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p) = T(p) = F.T.B.O$$

$$\text{Donc : } \varepsilon(p) = X(p) - [\varepsilon(p)G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p) + P(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p)]$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{1}{1+T(p)} \cdot X(p) - \frac{G_2(p) \cdot H(p)}{1+T(p)} \cdot P(p) = \varepsilon_e(p) + \varepsilon_{per}(p)$$

L'erreur $\varepsilon(p)$ à chaque instant est la somme de deux erreurs :

- Erreur due aux variations de l'entrée : $\varepsilon_e(p) = \frac{X(p)}{1+T(p)}$
- Erreur due à la perturbation : $\varepsilon_{per}(p) = \frac{G_2(p)H(p)}{1+T(p)} \cdot P(p)$

En vertu du théorème de superposition on a : $\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{per}(t)$.

En général, on distingue :

Précision statique (ou erreur en régime établi) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$

Précision dynamique (erreur en régime transitoire) : $\varepsilon(t) = y_d(t) - y(t)$

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'**erreur permanente** appelée aussi **erreur statique**.

En appliquant le théorème de la valeur finale on aura : $\varepsilon_s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$

Exemple :

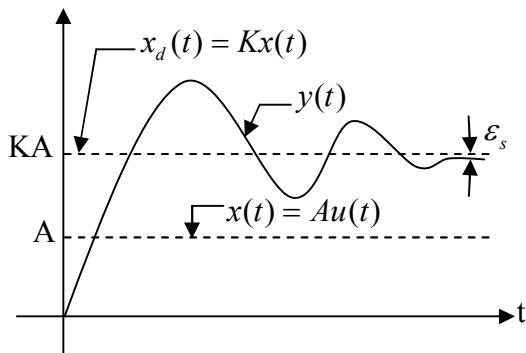


Figure 5.15 Erreur finie ($\varepsilon_s(\infty) = cst$)

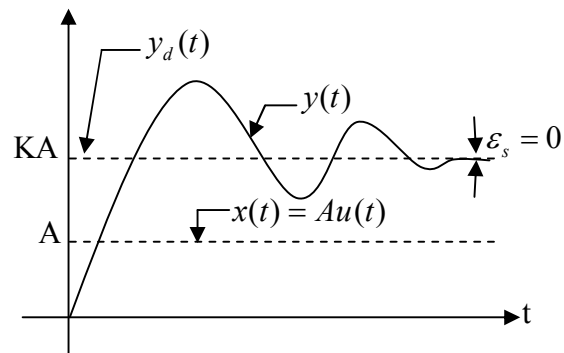


Figure 5.16 Erreur nulle ($\varepsilon_s(\infty) = 0$)

$$\varepsilon(t) = y_{d(t)} - y(t)$$

Où $y_{d(t)}$: Valeur désirée ;

$y(t)$: Valeur réelle.

V.6.1.a. Système sans perturbation et avec une entrée variable

On a : $P(p) = 0$ si on pose $H(p) = 1$ (retour unitaire) et $G_1(p) \cdot G_2(p) = G(p)$, il vient : $\varepsilon_e(p) = X(p) - Y(p) = X(p) - G(p) \cdot \varepsilon_e(p)$

$$\text{d'où : } \varepsilon_e(p) = \frac{X(p)}{1+G(p)} = \frac{X(p)}{1+F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1+T(p)} \text{ où } T(p) = G(p)$$

Donc l'erreur $\varepsilon_e(p)$ est liée d'une part à la forme du signal d'entrée $X(p)$ et d'autre part à la forme de la fonction du transfert en boucle ouverte (F.T.B.O).

a) Influence de l'entrée

- Si l'entrée est un échelon, l'erreur est appelée **erreur de position** et est notée ε_p .
- Si l'entrée est une rampe, l'erreur est appelée **erreur de vitesse ou de trainage**, notée ε_v .
- Si l'entrée est une parabole, l'erreur est appelée **erreur en accélération** et est notée ε_a .

b) Influence de la F.T.B.O

Pour calculer l'erreur ε , il est judicieux de mettre la F.T.B.O sous la forme suivante :

$$F.T.B.O = GH(p) = G(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod (1 - \frac{p}{z_i})}{\prod (1 - \frac{p}{p_j})} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \triangleleft \text{avec } H(p) = 1.$$

Où : $N(0) = D(0) = 1$

$$K = \frac{\prod(-z_i)}{\prod(-p_j)} : \text{Gain statistique du système (B.O)}$$

α est appelé type du système (ou nombre d'intégrations)

● Système de type 0 (pas d'intégration) $\Rightarrow \alpha = 0$

$$\text{On a donc : } F.T.B.O = K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$\text{d'où } \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1 + \frac{KN(p)}{D(p)}} = \frac{D(p)}{D(p) + KN(p)} \cdot X(p)$$

a) Entrée en échelon

$$\text{Un échelon d'amplitude } A \Rightarrow X(p) = \frac{A}{p}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{(1 + K \frac{N(p)}{D(p)})} = \frac{A}{1 + K_p}$$

$$\text{Où } K_p = \lim_{p \rightarrow 0} K \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = K \text{ donc } \varepsilon_p(\infty) = \frac{A}{1 + K} = \text{cste}$$

K_p est appelé constante de position.

b) Entrée en rampe

$$X(t) = A \cdot t \Rightarrow X(p) = \frac{A}{p^2} \text{ où } A = \text{cste}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{(1 + K \frac{N(p)}{D(p)})} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \frac{A}{K_v} \rightarrow \infty$$

$$\text{Où } K_v = \lim_{p \rightarrow 0} K \cdot p \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = 0.$$

K_v est appelée constante de vitesse.

c) Entrée en rampe

$$x(t) = \frac{1}{2} A \cdot t^2 \Rightarrow X(p) = \frac{A}{p^3} \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^3} \cdot \frac{1}{1 + K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\text{et } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} K p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = 0, \quad \varepsilon_a = \frac{A}{K_a} \quad \text{où } K_a : \text{ est appelée constante d'accélération.}$$

Conclusion 1 :

Un système de type 0 ne suit ni une entrée en vitesse ni une entrée en accélération.

● Système de type 1 (un intégrateur) $\alpha = 1$

La F.T.B.O s'écrit maintenant sous la forme :

$$F.T.B.O = K \frac{N(p)}{p \cdot D(p)} \quad \text{et donc } \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1 + \frac{K}{p} \frac{N(p)}{D(p)}}$$

a) Entrée échelon :

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0 \quad \text{avec } K_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = \infty$$

b) Entrée en rampe :

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = \frac{A}{K} \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \frac{A}{K_v} \quad \text{avec } K_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p} \cdot p \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = K$$

c) Entrée en parabole :

$$\varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) \rightarrow \infty \quad \text{avec } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p} \cdot p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = 0$$

Conclusion 2 :

Un intégrateur annule l'erreur de position et rend fini l'erreur de trainage.

● Système de type 2 (deux intégrateur) $\alpha = 2$

$$F.T.B.O = \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}$$

a) Entrée échelon :

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0 \quad \text{et } K_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow \infty$$

a) **Entrée en rampe :**

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = 0 \text{ et } K_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^2} \cdot p \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow K$$

a) **Entrée en parabole :**

$$\varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}\right)} = \frac{A}{K} \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) = \frac{A}{K} \text{ et } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^2} \cdot p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = K$$

Conclusion 3: Dans un système de type 2, les erreurs de position et de trainage sont nulles et l'erreur en accélération devient finie.

On peut constater que si $\alpha > 2 \Rightarrow K_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^\alpha} \cdot p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow \infty$ d'où $\varepsilon_a(\infty) = 0$

On peut récapituler ce qui précède dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5.1 L'erreur statique en fonction du type d'entrée et la classe du système

Précision statique	Système de type 0 $\alpha = 0$	Système de type 1 $\alpha = 1$	Système de type 2 $\alpha = 2$	Système de type 3 $\alpha = 3$
Erreur de position (ε_p)	$\frac{A}{1 + K_p}$	0	0	0
Erreur de trainage (ε_v)	$+\infty$	$\frac{A}{K_v}$	0	0
Erreur d'accélération (ε_a)	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{A}{K_a}$	0

Remarque importante : Il ne faut pas déduire rapidement du tableau qu'il suffit de rajouter une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de -90° , le système risque de devenir instable, d'où **dilemme précision-stabilité**.

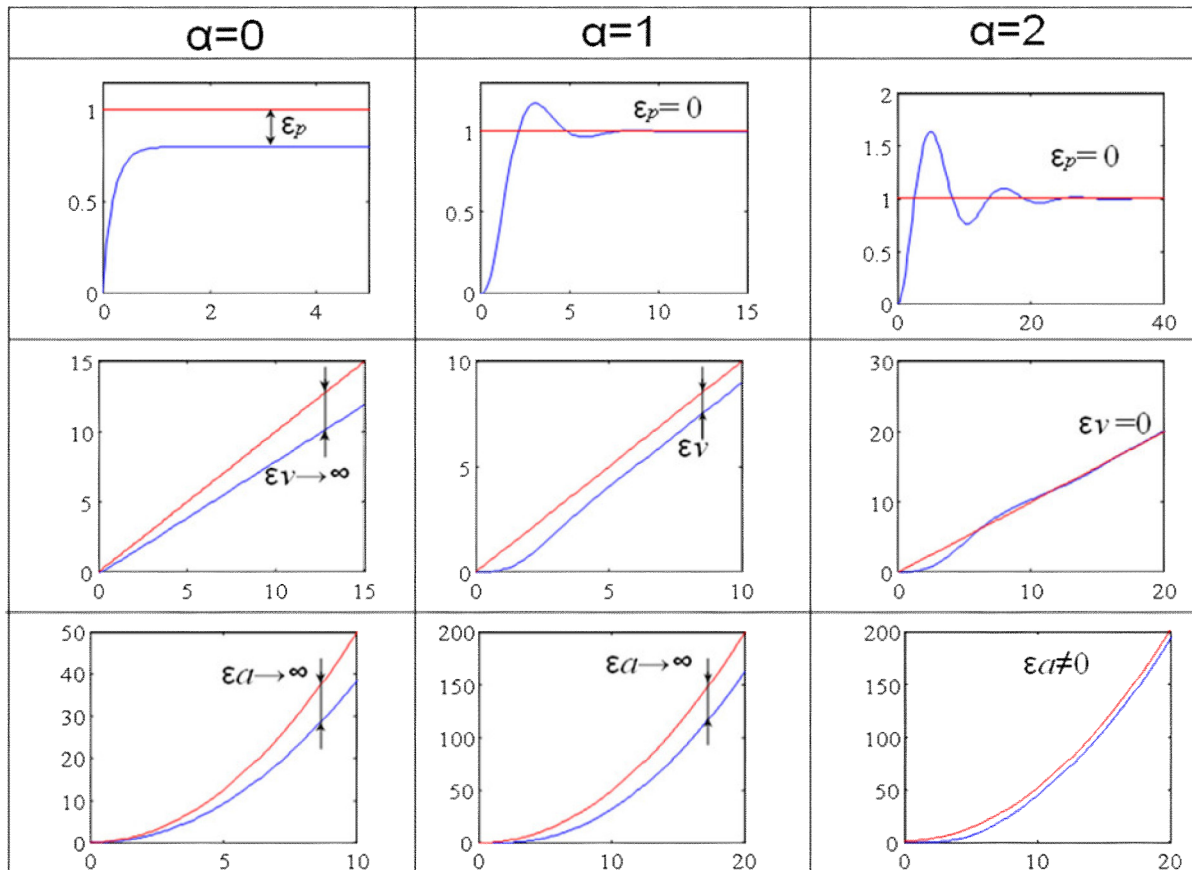


Figure 5.17 Illustration de l'erreur statique en fonction de l'entrée et du type du système.

Exemple de calcul d'erreurs

Considérons le système de la figure 5.1 soumis dans un premier temps à une entrée en échelon unité, puis à une entrée en rampe unité. Déterminer ensuite les erreurs en régime permanent.

Solution :

a) Entrée en échelon unité :

On a $X(p) = \frac{1}{p}$ et FTBO vaut $kG(p) = \frac{k}{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}$ Donc, la transformée de Laplace

de l'erreur est :
$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + kG(p)} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + k)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + kG(p)} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + k)}$$
 Or $\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + k}$

si $k = 0.5$, on peut constater que $\varepsilon(\infty) = \frac{2}{3}$ soit 66%

b) Entrée en échelon unité :

On a $X(p) = \frac{1}{p^2}$ et FTBO vaut $kG(p) = \frac{k}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1)}$

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + kG(p)} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p^2(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + k)}$$
 Or $\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \infty$

V.6.1.b. Système avec perturbations seules

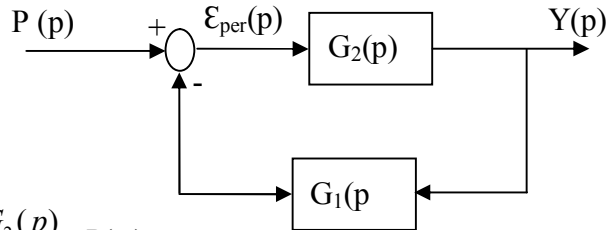
On travaille à entrée constante donc **en régulateur**. On s'intéresse aux variations, dues à une perturbation $p(t)$, de la grandeur de sortie.

$$x(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(p) = 0 \\ \text{et} \\ H(p) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{Y(p)}{P(p)} = \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} \Rightarrow Y(p) = \frac{G_2(p)P(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}$$

On a donc : $\varepsilon_{per} = y_d(t) - y(t)$

En absence de $x(t)$: entrée principale

$Y_d(t)$ Doit être nulle $\Rightarrow \varepsilon_{per}(t) = -y(t)$



$$\text{D'où } \begin{cases} \varepsilon_{per}(p) = \frac{-G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} \cdot P(p) = \frac{-G_2(p)}{1 + G(p)} \cdot P(p) \\ \text{avec } H(p) = 1 \end{cases}$$

● Système de type 0

Posant : $G_1(p) = K_1 \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$ et $G_2(p) = K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$

Avec $N_1(0) = N_2(0) = D_1(0) = D_2(0) = 1$ Il vient donc:

$$Y(p) = P(p) \cdot \frac{K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{1 + K_1 \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \cdot K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)}} = P(p) \cdot \frac{K_2 N_2(p) D_1(p)}{D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

• Perturbation permanente :

Le cas le plus courant de perturbation permanente est la perturbation en échelon (couple résistant sur un arbre moteur par exemple). On a donc : $P(p) = \frac{A_0}{p}$ alors la variation sur la

sortie peut s'écrire : $\varepsilon_{per}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K_2}{1 + K_1 K_2} = \frac{A_0 K_2}{1 + K_1 K_2}$

Remarque :

On constate que l'erreur due à une perturbation constante est proportionnelle à l'amplitude A_0 et inversement proportionnelle au gain de la chaîne directe $K_1 K_2$, et comme K_2 est au numérateur, on a intérêt à prendre K_1 le plus grand possible au risque de déstabiliser le système.

● Système de type 1

a) Intégrateur en aval de la perturbation

On a donc : $G_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p D_2(p)}$

$$\varepsilon_{per}(p) = Y(p) = P(p) \cdot \frac{\frac{K_2 N_2(p)}{p D_2(p)}}{1 + K_1 \cdot \frac{N_1(p) K_2 N_2(p)}{D_1(p) p D_2(p)}} = P(p) \cdot \frac{K_2 N_2(p) D_1(p)}{p D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

- Pour une perturbation en échelon : $\varepsilon_{per}(\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{x \rightarrow 0} P \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K_2}{K_1 K_2} = \frac{A_0}{p}$

Conclusion 1:

L'écart statique $\varepsilon_{per}(\infty)$ dépend de A_0 et K_1 , mais ne l'est plus de K_2 . On a intérêt donc à prendre K_1 le plus grand possible et le placer en amont de la perturbation, mais cela se fera au détriment de la stabilité du système.

b) Intégrateur en amont de la perturbation

On aura donc : $G_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p D_1(p)}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{per}(p) = Y(p) = P(p) \cdot \frac{\frac{K_2 N_2(p)}{p D_2(p)}}{1 + \frac{K_1 N_1(p) K_2 N_2(p)}{p D_1(p) D_2(p)}} = P(p) \cdot \frac{p K_2 N_2(p) D_1(p)}{p D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

- Pour une perturbation en échelon : $\varepsilon_{per}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} P \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{p K_2}{K_1 K_2} = 0$

Conclusion 2:

On constate qu'un **intégrateur placé en amont** d'une perturbation **annule ses effets**.

Exemple : Perturbation en échelon

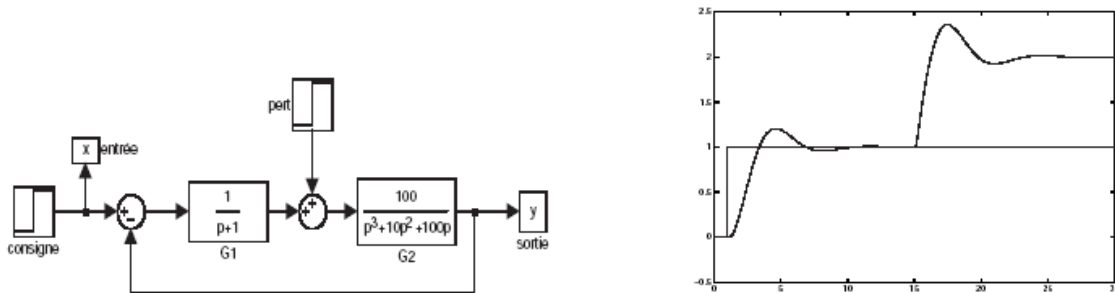


Figure 5.18 $G_1(p)$ de classe 0 et $G_2(p)$ de classe 1 avec perturbation de classe 1 (échelon)

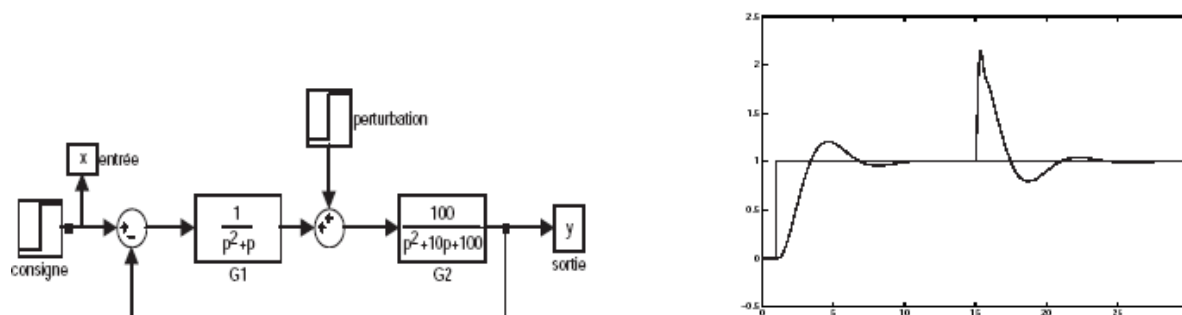


Figure 5.19 $G_1(p)$ de classe 1 et $G_2(p)$ de classe 0 avec perturbation de classe 1 (échelon)

V.6.1.c. Cas d'un système quelconque

Le système est cette fois sollicité par des variations d'entrées et des perturbations. Le théorème de superposition s'applique et on constate que, pour obtenir une meilleure précision, il est impératif d'augmenter le gain. Comme il n'est pas possible de trop augmenter cette grandeur (i.e. gain) à cause de la stabilité, une solution consiste à placer un intégrateur en amont de la de la perturbation, donc juste derrière le comparateur : c'est la place de **correcteur** (ou **régulateur**). Ce dernier fera l'objet d'un prochain support de cours.

On peut conclure qu'un correcteur intégrateur permet :

- d'annuler l'effet des perturbations ;
- de rendre l'erreur de position nulle et l'erreur de traînage finie. C'est l'outil de la précision statique.

V.6.2. Précision dynamique

Une bonne précision dynamique donne un amortissement moyen pour un temps de réponse faible. Un amortissement moyen correspond à une réponse transitoire à faible dépassement. La précision dynamique est appelée aussi qualité du système asservi. Elle chiffre l'erreur transitoire apparaissant dans la réponse à un échelon. Si on veut un amortissement élevé pour un temps de réponse faible, on a intérêt à minimiser l'erreur dynamique, c'est-à-dire minimiser l'aire hachurée sur la figure (5.20) ci-dessous.

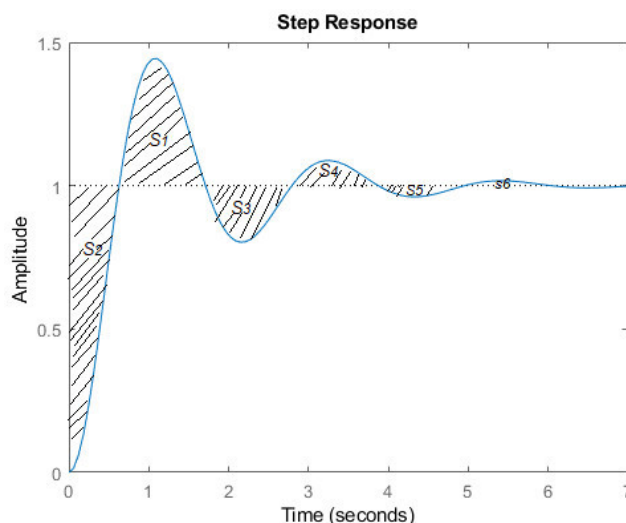


Figure 5.20 Mise en évidence de l'erreur dynamique.