CHAPITRE IV

PRODUIT DE CONVOLUTION ET CORRELATION DES SIGNAUX

Introduction

Le traitement du signal est une discipline en plein essor, elle consiste en un ensemble de théories et de méthodes, relativement indépendantes du signal traité, permettant de créer, d'analyser, de modifier, de classifier et finalement de reconnaître les signaux. Ses applications sont nombreuses dans des domaines aussi variés que les télécommunications, le traitement du son, le traitement de la parole, le radar, le sonar, le biomédical, l'imagerie,…etc. D'une manière générale dans les domaines de l'électronique et de l'informatique.

Dans ce chapitre, nous exposons d'abord les principales définitions et généralités concernant la convolution et la corrélation comme étant deux techniques de traitement du signal qui sont particulièrement décrites. Leurs développements et mise en œuvre représentent l'essentiel de ce chapitre.

1. Produit de Convolution

1.1. Formulation du produit de convolution

Le produit de convolution présente des propriétés très importantes. Le produit de convolution est une opération qui associe, à deux fonctions $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{e}$ de la même variable, une fonction $\boldsymbol{s}$ de la même variable sur un même domaine infini. Les fonctions peuvent prendre des valeurs complexes et nous notons $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{h} * \boldsymbol{e}$. En choisissant t comme variable commune, l'opération est définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e(\tau)d\tau \qquad (4.1)$$

En mathématiques, le produit de convolution est un opérateur bilinéaire et un produit commutatif, noté par « $*$ », qui, à deux fonctions f et g sur un même domaine infini, fait correspondre une autre fonction « $f * g$ » sur ce domaine, qui en tout point de celui-ci est égale à l'intégrale sur l'entièreté du domaine (ou la somme si celui-ci est discret) d'une des deux fonctions autour de ce point, pondérée par l'autre fonction autour de l'origine ; les deux fonctions étant parcourues en sens contraire l'une de l'autre (nécessaire pour garantir la commutativité).

Le produit de convolution généralise l'idée de moyenne glissante et est la représentation mathématique de la notion de filtre linéaire. Il s'applique aussi bien à des données temporelles (en traitement du signal par exemple) qu'à des données spatiales (en traitement d'image). En statistique, on utilise une formule très voisine pour définir la corrélation croisée.

1.1.1. Définition du produit de convolution

Contexte : Soit un système Linéaire et Invariant dans le Temps (SLIT) définie par sa réponse à une impulsion de Dirac, $h(t)$.

Objectif : Déterminer le signal de sortie lorsque l'on applique un signal $x(t)$ en entrée.

Solution : Il est possible de démontrer que l'opération réalisée par le système est un produit de convolution.

Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g, est une autre fonction, qui se note généralement « $f * g$ » et qui est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

τ est la variable muette du produit de convolution.

On peut considérer cette formule comme une généralisation de l'idée de moyenne mobile.

Pour que cette définition ait un sens, il faut que f et g satisfassent certaines hypothèses ; par exemple, si ces deux fonctions sont intégrables au sens de Lebesgue (c'est-à-dire que l'intégrale de leur module est finie), leur produit de convolution est défini pour presque tout t et est lui-même intégrable.

Exemple :

Soit $x(t) = y(t) = \Pi_1(t)$ deux fonctions portes de largeur $l = 1$. Le produit de convolution s'exprime sous la forme :

$$(x * y)(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \Pi_1(t-\tau)d\tau = \int_{t-1/2}^{t+1/2} \Pi_1(u)du$$

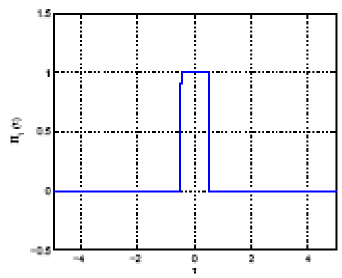
$$si\ t < -1\ out > 1, \quad (x * y)(t) = 0$$

$$si\ -1 < t \leq 0\ , \quad \int_{-1/2}^{t+1/2} \Pi_1(u)du = 1 + t$$

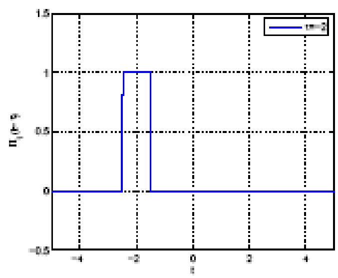
$si\ 0 \leq t < 1 \quad , \quad \int_{t-1/2}^{1/2} \Pi_1(u)du = 1 - t$

Finalement en utilisant les équations précédentes, on trouve :

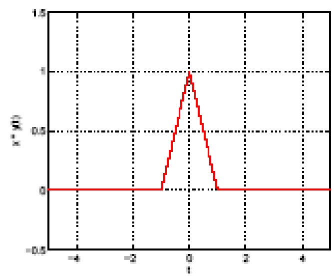
$$(x * y)(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 < t < 1 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$



x(*t*)



y(*t*)



(*x* * *y*)(*t*)

1.2. Propriétés du produit de convolution

Commutativité : $\boldsymbol{f * g = g * f}$

Distributivité : $\boldsymbol{\big(f * (h + g)\big)(t) = (f * h)(t) + (f * g)(t)}$

Associativité : $\boldsymbol{((f * h) * g)(t) = ((f * (h * g))(t)}$

Distributive par rapport à l'addition : $\boldsymbol{(f * (h + g)(t)} = (f * h)(t) + (f * g)(t)$

Pourvue d'un élément neutre égal à δ: $f * \delta = f$

Intégration d'un produit de convolution : $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)dt = (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt).(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt)}$

Dérivation : $\boldsymbol{(f * g)' = f' * g = f * g'}$

Parité de la convolution de deux fonctions paires : $\boldsymbol{(f * g)(-t) = (f * g)(t)}$

Produit de convolution et transformée de Fourier :

$\boldsymbol{\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f).\mathcal{F}(g)\ ;\ f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f).\mathcal{F}(g))}$

1.3. Produit de convolution et impulsion de Dirac

Le fait que la fonction de Dirac soit l'élément neutre du produit de convolution induit une propriété intéressante concernant le produit d'une fonction continue *f*(*t*) par un peigne de Dirac $\delta_{Te}(t)$. Le produit de convolution dans ce cas là est définie par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)\delta_{Te}(\tau)d\tau = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_e) \qquad (4.2)$$

Ainsi, le produit de convolution de f(t) par $\delta_{Te}(t)$ donne une fonction périodique qui s'obtient en sommant, sur toutes les valeurs possibles de n, la fonction f(t) décalée de nTe, et en multipliant le résultat par Te. On dit parfois que cette opération « périodise » f(t).

1.4. Déconvolution

La déconvolution est un procédé algorithmique destiné à inverser les effets de la convolution. Le concept de déconvolution est largement utilisé en traitement du signal et traitement d'image, notamment en microscopie et astronomie.

Le problème est de déterminer la solution f d'une équation de la forme :

$$f * g = h$$

On note ici par h un signal tel qu'il est acquis et f le signal que l'on désire estimer ou restaurer, mais qui a été convolué par une réponse impulsionnelle g lors de l'acquisition. La réponse impulsionnelle est souvent (surtout en traitement d'image) aussi nommée fonction d'étalement du point (anglais: Point Spread Function ou PSF).

Lorsqu'on a affaire à un processus physique d'acquisition, la mesure h est souvent entachée d'un bruit de mesure ε :

$$(f * g) + \varepsilon = h$$

L'opération de déconvolution sera rendue plus difficile par la présence de « bruit ». L'application de l'inverse analytique de déconvolution (en convoluant par la fonction de Green) donnera un résultat de mauvaise qualité. Il est alors nécessaire d'inclure la connaissance statistique du bruit et du signal pour améliorer le résultat, en utilisant par exemple le « filtrage de Wiener ».

Il existe donc en traitement du signal un grand nombre de méthodes de déconvolution basées sur différents types d'a priori et donc adaptées à des applications variées.

2. Fonction de Corrélation

En traitement des signaux, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux, ceci peut se faire de plusieurs manières. Une méthode possible, dont on fait grand usage, est de décaler l'un des signaux (stationnaire et ergodique), par rapport à l'autre, et de mesurer leur similitude en fonction du décalage. C'est la fonction de corrélation (FAC).

On distingue l'auto-corrélation (FAC) et l'inter-corrélation (FIC) :

- La FAC consiste à comparer une fonction $S(t)$ avec elle-même, durant un intervalle de temps, dont l'une est décalée d'une certaine valeur τ.

- La FIC remplacée parfois par corrélation mutuelle ou corrélation croisée (en anglais : Cross corrélation) consiste à comparer deux fonctions différentes $S(t)$ et $Y(t)$ dont l'une est décalée d'une certaine valeur τ .

On peut énumérer les différentes étapes et opérations intervenant dans le calcul d'une fonction de corrélation de la manière suivante :

- L'un des signaux est décalé d'une certaine quantité τ .
- Le produit des deux signaux est effectué échantillon par échantillon pour toutes les valeurs de la fonction de corrélation.
- Les valeurs ainsi obtenues sont additionnées pour obtenir une valeur de la fonction de corrélation.

2.1. Fonction d'auto-corrélation

Soit $S(t)$ un processus aléatoire réel, stationnaire et ergodique ; on distingue :

2.1.1. Fonction d'auto-corrélation statistique

La FAC statistique est définie comme l'espérance mathématique du produit de $S(t)$ et $S(t+\tau)$:

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \mathrm{E}[S(t)S(t+\tau)] \tag{4.3}$$

2.1.2. Fonction d'auto-corrélation temporelle

La FAC temporelle d'un signal à puissance fini est donnée par la valeur moyenne temporelle du produit de $S(t)$ par $S(t+\tau)$:

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \overline{S(t)S(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)S(t+\tau)dt \tag{4.4}$$

D'une manière générale, la FAC est définie comme suit :

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \mathrm{E}[S(t)S(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)S(t+\tau)dt \tag{4.5}$$

Cette formule traduit le fait que dans le cas d'un processus stationnaire, la FAC statistique est égale à la FAC temporelle (C'est le cas d'ergodicité).

2.1.3. Propriétés de la fonction d'auto-corrélation

1. La FAC de signaux réels est aussi réelle.
2. D'après la stationnarité du second ordre, La FAC de signaux réels est pair et ne dépend que de τ.

$$\mathrm{E}[S(t)S(t-\tau)] = \mathrm{E}[S(t)S(t+\tau)] \tag{4.6}$$

D'où

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \Gamma_{SS}(-\tau) \tag{4.7}$$

On remarque que la fonction d'auto-corrélation est aussi symétrique.

3. Lorsque la FAC est complexe, la partie réelle de la FAC est une fonction paire, alors que la partie imaginaire est une fonction impaire
4. La FAC est définie par le produit scalaire comme suit :

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \prec S, S_\tau \succ = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)S(t+\tau)dt \tag{4.8}$$

5. La FAC d'un processus stationnaire atteint son maximum en $\tau = 0$, avec une valeur toujours réelle et non négative, cette valeur est la borne supérieure en module de la FAC.

Selon SCHWARZ, on obtient l'inégalité suivante

$$\left|\Gamma_{SS}(\tau)\right|^2 \leq \Gamma_{SS}(0) \qquad \forall t \tag{4.9}$$

Cette valeur est égale à l'énergie du signal

$$\Gamma_{SS}(0) = \prec S, S_\tau \succ = \left\|S(t)\right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|S(t)\right|^2 \, dt \tag{4.10}$$

6. La FAC de signaux périodiques ou continue, est également une fonction périodique de même période ou continue.
7. Dans le cas où la fonction $S(t)$ est composée par la somme de deux fonctions $U(t)$ et $V(t)$, la FAC de $S(t)$ est définie par la relation suivante :

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \Gamma_{UU}(\tau) + \Gamma_{VV}(\tau) + \Gamma_{UV}(\tau) + \Gamma_{VU}(\tau) \tag{4.11}$$

8. Si $S(t)$ est le produit de deux fonctions $U(t)$ et $V(t)$ réelles et indépendantes, la FAC est égale au produit des FACs des deux fonctions.

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \Gamma_{UU}(\tau).\Gamma_{VV}(\tau) \tag{4.12}$$

9. La FAC d'un signal aléatoire tend vers zéro lorsque le décalage τ augmente indéfiniment en valeur absolue.

La version numérique de la FAC est donnée par :

$$\Gamma_{SS}(kT_e) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(nT_e)S(nT_e + kT_e) \tag{4.13}$$

Pour une période d'échantillonnage égale à l'unité ($T_e = 1$) :

$$\Gamma_{SS}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n)S(n+k) \tag{4.14}$$

La relation (4.14) n'est utilisable en pratique que si le signal est à durée limitée. Si N est la durée de $Sq(n)$, alors la durée de la FAC est de ($N-k$), donc la relation (4.14) pour des raisons expérimentales devient :

$$\Gamma_{SS}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-1} Sq(n)Sq(n+k) \quad \begin{cases} (1 \le n \le N-k) \\ (0 \le k \le M \le N) \end{cases} \tag{4.15}$$

2.1.4. Théorème de PARSEVAL

La valeur à l'origine de la FAC est donnée par :

$$\Gamma_{SS}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S^2(n) \tag{4.16}$$

Cette relation est connue sous le nom du théorème de PARSEVAL, qui permet de calculer l'énergie du signal $S(t)$

2.2. Fonction d'inter-corrélation

Soient deux processus aléatoires réel, stationnaires et ergodiques $S(t)$ et $Y(t)$, on distingue :

2.2.1. Fonction d'inter-corrélation statistique

La FIC statistique est définie comme l'espérance mathématique du produit de $S(t)$ et $Y(t+\tau)$.

$$\Gamma_{SY}(\tau) = \mathrm{E}[S(t)Y(t+\tau)] \tag{4.17}$$

2.2.1.2. Fonction d'inter-corrélation temporelle

La FIC temporelle est donnée par la valeur moyenne temporelle de produit de $S(t)$ par $Y(t+\tau)$.

$$\Gamma_{SY}(\tau) = \overline{S(t)Y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)Y(t+\tau)\,dt \tag{4.18}$$

D'une manière générale, la FIC est définie comme suit :

$$\Gamma_{SY}(\tau) = E[S(t)Y(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t)Y(t+\tau)dt \tag{4.19}$$

2.2.3. Propriétés de la fonction d'inter-corrélation

1. La FIC n'est pas une fonction paire :

$$\Gamma_{SY}(\tau) \neq \Gamma_{SY}(-\tau) \tag{4.20}$$

mais $\Gamma_{SY}(\tau) = \Gamma_{YS}(-\tau)$ (4.21)

2. Pour $\tau = 0$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left|\Gamma_{SY}(\tau)\right| \leq (\Gamma_{SS}(0).\Gamma_{YY}(0))^{\frac{1}{2}} \qquad \forall t \tag{4.22}$$

La version numérique de la FIC :

$$\Gamma_{SY}(K) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)Y(n+K) \tag{4.23}$$

Cas pratique :

$$\Gamma_{SY}(K) = \frac{1}{N-K}\sum_{n=0}^{N-1} S(n)Y(n+K) \qquad \begin{cases}(1 \leq n \leq N-K)\\(0 \leq K \leq M \prec N)\end{cases} \tag{4.24}$$

Le nombre d'échantillons *N* de signal à traiter, le nombre *M* qui représente la fenêtre d'observation de la fonction de corrélation et qui doit être inférieur à *N*, alors la durée de la FAC est de ($N-K$).

2.3. Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation entre deux signaux $S(t)$ et $y(t)$ est le rapport entre leur covariance $C_{Sy}(\tau)$ et le produit de leurs déviations standards respectives δ_S et δ_Y qui est donnée par :

$$\rho_{Sy} = \frac{C_{Sy}(\tau)}{\delta_S\delta_y} \tag{4.25}$$

Tel que :

$C_{Sy}(\tau)$: La covariance définie par :

$$C_{Sy}(\tau) = E[(S - \mu_S)(y - \mu_y)] = \Gamma_{Sy}(\tau) - \mu_S\mu_y \tag{4.26}$$

δ : C'est l'écart type qui est définie comme suit :

$$\delta^2 = E[(S - \mu_S^2)] \tag{4.27}$$

Souvent, ce coefficient est appelé « covariance normalisée » car on peut prouver que :

$-1 \leq \rho_{Sy} \leq +1$

Suivant les valeurs prises par le coefficient de corrélation on peut établir la classification suivante :

1. Si $\rho_{Sy} = 0$, alors S et y sont indépendantes (pas de corrélation).
2. Si $C = 1$, on dit que S et y sont totalement corrélées.
3. Si $|C| = 1$, alors S et y sont partiellement corrélées.

2.3.1. Corrélation partielle

Dans le cas de deux signaux S et Y partiellement corrélées, nous avons la possibilité d'exprimer Y sous la forme d'une somme de deux termes, le premier étant entièrement corrélé avec S et le deuxième Z étant indépendant.

$$Y = aS + Z \tag{4.28}$$

Où $\overline{S} = \overline{Y} = \overline{Z} = 0$ et $a = Cte$

Alors le coefficient de corrélation est :

$$\rho_{SY} = (\operatorname{sgn} a)(1 + \frac{\overline{S^2}}{a^2 S^2})^{-\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

Et l'on observe qu'il est de même signe que la constante

Remarque : la relation (4.25) devient pour un seul signal (cas de la fonction d'auto-corrélation)

$$\rho_S = \frac{C_S(\tau)}{\delta^2{}_S} \tag{4.30}$$

2. 4. Théorème de Wiener- Khintchine

Ce théorème exprime que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation est la densité spectrale de puissance d'un processus stochastique stationnaire au sens large de ce signal.

$$\rho_{SY}(n) = TF[\Gamma_{SY}(\tau)] = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{SY}(\tau)\exp(-2\pi j \frac{n}{N}\tau) = S(n)Y(n) \tag{4.31}$$

$\rho_{SY}(n)$ est la densité spectrale d'interaction.

$$\rho_{SS}(n) = TF[\Gamma_{SS}(\tau)] = S(n)S(n) = |\mathrm{S(n)}|^2 \tag{4.32}$$

$\rho_{SS}(n)$ est la densité spectrale du signal $S(t)$.

Remarque : On notera que la valeur de la fonction de corrélation ne sera calculée que si, au moins, l'un des deux signaux est à énergie finie.