جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Robotique industrielle

Master I Fabrication mécanique et productique

Par : Dr. Slamani Mohamed

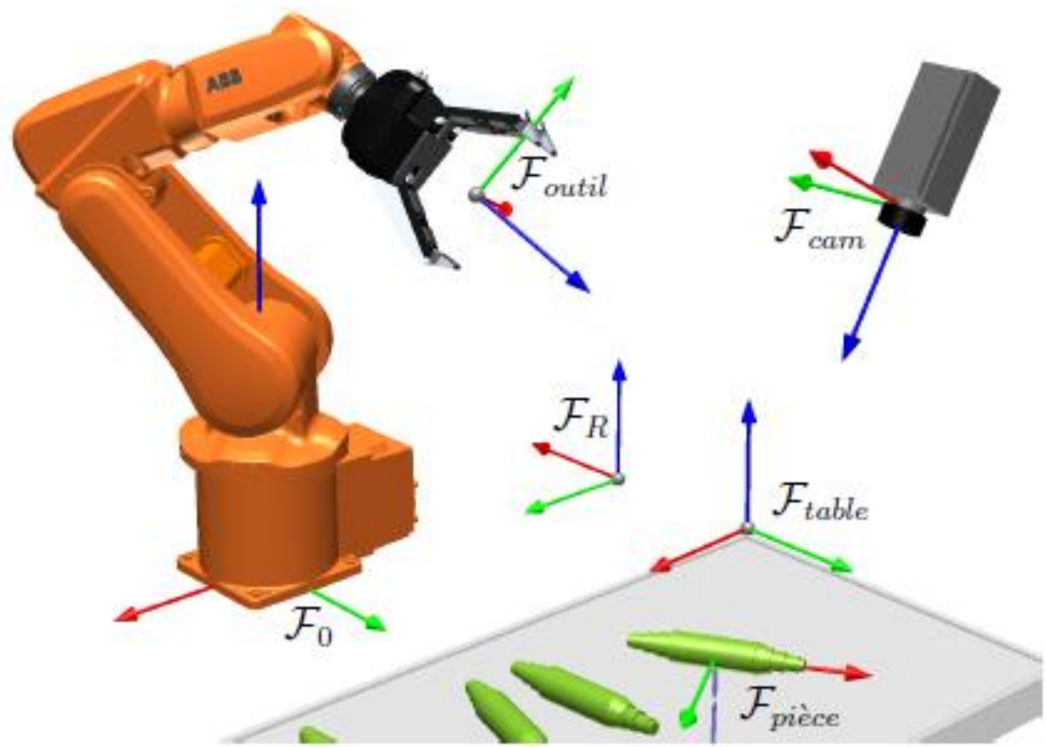
Transformations homogènes

La matrice homogène peut être utilisée pour trouver la pose d'un référentiel par rapport a un autre.

$$\mathbf{v}^0_{O_0O_{pièce}} = \mathbf{v}^0_{O_0O_R} + \mathbf{R}^0_R\mathbf{v}^R_{O_RO_{pièce}} = \mathbf{v}^0_{O_0O_R} + \mathbf{R}^0_R\left(\mathbf{v}^R_{O_RO_{cam}} + \mathbf{R}^R_{cam}\mathbf{v}^{cam}_{O_{cam}O_{pièce}}\right),$$

pour la position de la pièce par rapport au référentiel de la base du robot et

$$\mathbf{R}^0_{pièce} = \mathbf{R}^0_R\mathbf{R}^R_{cam}\mathbf{R}^{cam}_{pièce},$$



Transformations homogènes

$$\mathbf{H}^0_{pièce} = \mathbf{H}^0_R \mathbf{H}^R_{cam} \mathbf{H}^{cam}_{pièce},$$

où $\mathbf{H}^a_b$ est une matrice 4×4 dite homogène définie par

$$\mathbf{H}^a_b = \begin{bmatrix} & \mathbf{R}^a_b & & \mathbf{p}^a_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans ce contexte, la matrice homogène $\mathbf{H}^a_b$ représente la pose du référentiel $\mathcal{F}_b$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$. Comme dans le cas des matrices de rotations, $[\mathbf{H}^a_b]^{-1} = \mathbf{H}^b_a$. Cependant, $[\mathbf{H}^a_b]^{-1} \neq [\mathbf{H}^a_b]^T$ et nous avons plutôt

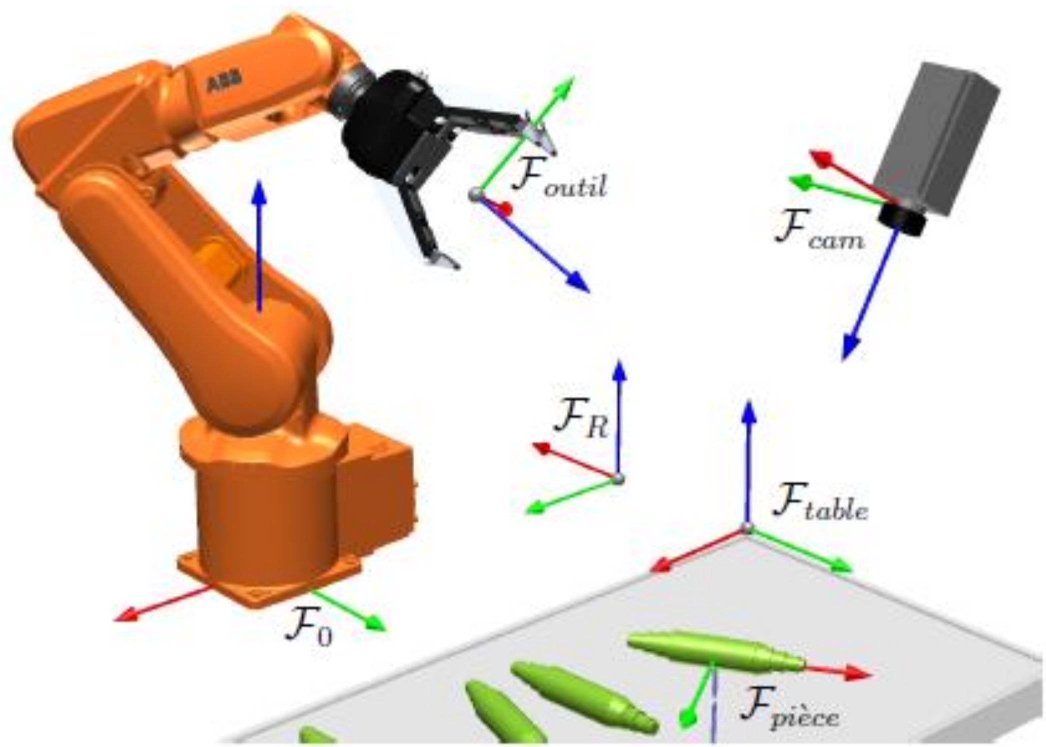
$$\mathbf{H}^b_a = [\mathbf{H}^a_b]^{-1} = \begin{bmatrix} & [\mathbf{R}^a_b]^T & & -[\mathbf{R}^a_b]^T \mathbf{p}^a_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R}^b_a & & -\mathbf{R}^b_a \mathbf{p}^a_b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R}^b_a & & \mathbf{p}^b_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Transformations homogènes

La matrice homogène peut être utilisée pour trouver la pose d'un référentiel par rapport a un autre. Considérons la figure suivante de nouveau. Admettons que nous connaissons la pose du référentiel $\mathcal{F}_{table}$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_0$, H^0_{table}, ainsi que la pose du référentiel $\mathcal{F}_R$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_0$, H^0_R. La pose du référentiel $\mathcal{F}_{table}$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_R$ peut alors se calculer de la manière suivante :

$$\mathrm{H}^R_{table} = \mathrm{H}^R_0 \mathrm{H}^0_{table} = [\mathrm{H}^0_R]^{-1} \mathrm{H}^0_{table}.$$



Transformations homogènes consécutives

$$\mathrm{H}^a_b = \mathrm{H}^a_1 \mathrm{H}^1_2 \ldots \mathrm{H}^{n-1}_n \mathrm{H}^n_b.$$

Transformations pures

Dans le contexte de l'utilisation des matrices homogènes en tant que matrice de transformation, nous aurons besoin de définir quatre matrices homogènes de transformations de base (ou pures). La première matrice est celle qui correspond à une translation pure :

$$\mathbf{H}_{trans}(p_x, p_y, p_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chacune des trois autres matrices correspond à une rotation autour d'un axe x, y ou z :

$$\mathbf{H}_{rot,x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{rot,y}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{rot,z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Transformation par rapport au référentiel < mobile >

Soit les deux référentiels $\mathcal{F}_a$ et $\mathcal{F}_b$. Puisque nous allons considérer que nous connaissons la pose du référentiel $\mathcal{F}_b$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$, c'est-à-dire la matrice homogène $\mathbf{H}_b^a$, nous pouvons considérer le référentiel $\mathcal{F}_a$ comme étant « fixe » et le référentiel $\mathcal{F}_b$ comme étant « mobile ».

La pose, par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$, d'un référentiel $\mathcal{F}_c$ obtenu en appliquant une transformation $\mathbf{H}$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_b$ est définie par l'équation suivante :

$$\mathbf{H}_c^a = \mathbf{H}_b^a \mathbf{H}.$$

Comme exemple, considérons à nouveau la figure 1 . Si nous désirons définir un référentiel $\mathcal{F}_{pièce2}$ qui est obtenu en tournant le référentiel $\mathcal{F}_{pièce1}$ de 180° autour de son axe $z_{pièce1}$, alors la pose de ce nouveau référentiel sera

$$\mathbf{H}_{pièce2}^0 = \mathbf{H}_{pièce1}^0 \mathbf{H}_{rot,z}(180°).$$

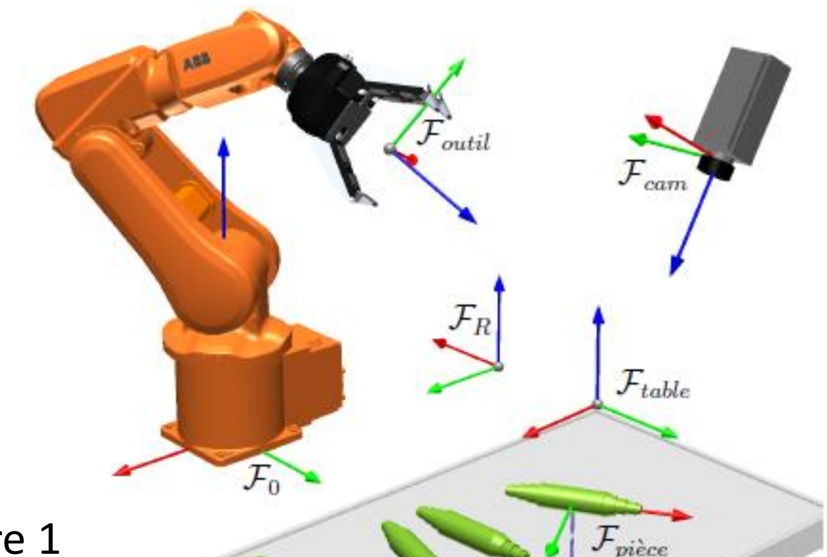


Figure 1

Transformation par rapport au référentiel < fixe >

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Admettons maintenant que nous désirons trouver la pose, par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$, d'un référentiel $\mathcal{F}_c$ obtenu en appliquant une transformation $\mathbf{H}$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$ (plutôt que $\mathcal{F}_b$). Cette pose est définie par l'équation suivante :

$$\mathbf{H}_c^a = \mathbf{H}\mathbf{H}_b^a.$$

Comme exemple concret, considérons à nouveau la figure **1** . Si nous désirons définir un référentiel $\mathcal{F}_{pièce2}$ qui est obtenu en tournant le référentiel $\mathcal{F}_{pièce}$ de 30° autour de l'axe z_{table}, alors la pose de ce nouveau référentiel sera

$$\mathbf{H}_{pièce2}^0 = \mathbf{H}_{rot,z}(30°)\mathbf{H}_{pièce}^0.$$

Transformations composites

La situation où les notions théoriques des deux sections précédentes s'avèrent très utiles est lorsque nous désirons calculer la pose d'un référentiel $\mathcal{F}_b$ par rapport à un référentiel $\mathcal{F}_a$. Bien sûr, nous pouvons calculer les vecteurs unitaires le long des axes du référentiel $\mathcal{F}_b$ exprimés par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$, ainsi que le vecteur de position de l'origine du référentiel $\mathcal{F}_b$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$, mais ceci peut être assez complexe. Souvent, la manière la plus simple c'est de s'imaginer une série de transformations qu'un référentiel initialement coïncidant avec le référentiel $\mathcal{F}_a$ doit effectuer pour se rendre coïncidant avec le référentiel $\mathcal{F}_b$.

Considérons la figure 2 . Notre objectif c'est de trouver la pose du référentiel $\mathcal{F}_b$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_a$. L'angle entre axe y_b et le plan $x_a y_b$ est 45°. Il y a plusieurs séquences de transformations qui peuvent amener un référentiel imaginaire $\mathcal{F}_m$, initialement coïncident avec $\mathcal{F}_a$, à $\mathcal{F}_b$. Admettons que la séquence que vous imaginer est la suivante :

- translation de 10 mm le long de l'axe z_a, donc $\mathbf{H}_m^a = \mathbf{H}_{trans}(0, 0, 10)$;
- rotation de $-90°$ autour de l'axe x_a, donc $\mathbf{H}_m^a = \mathbf{H}_{rot,x}(-90°)\mathbf{H}_{trans}(0, 0, 10)$;
- rotation de $-135°$ autour de l'axe z_m, donc $\mathbf{H}_m^a = \mathbf{H}_{rot,x}(-90°)\mathbf{H}_{trans}(0, 0, 10)\mathbf{H}_{rot,z}(-135°)$.

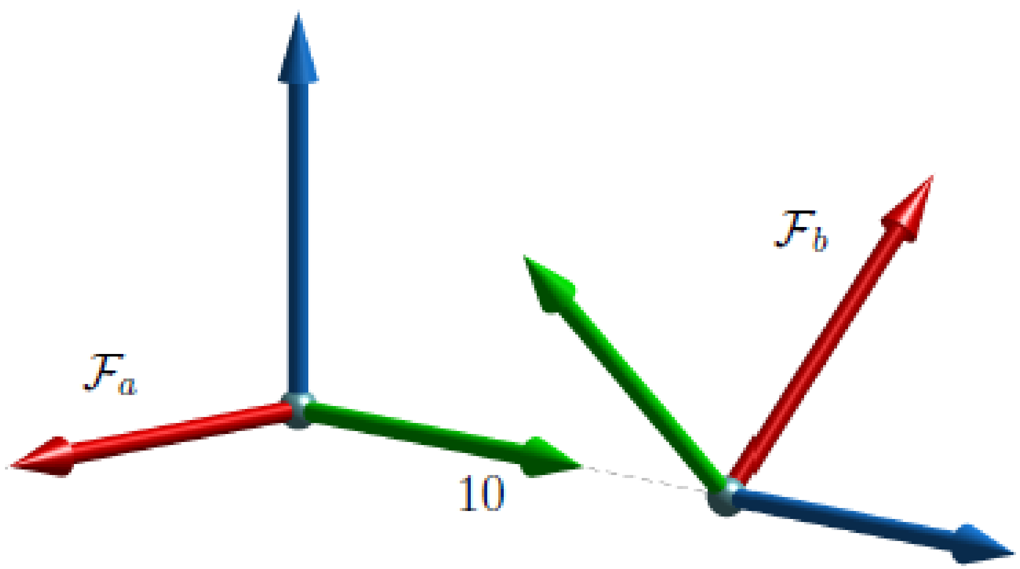


FIGURE 2 – Exemple de transformations composites.

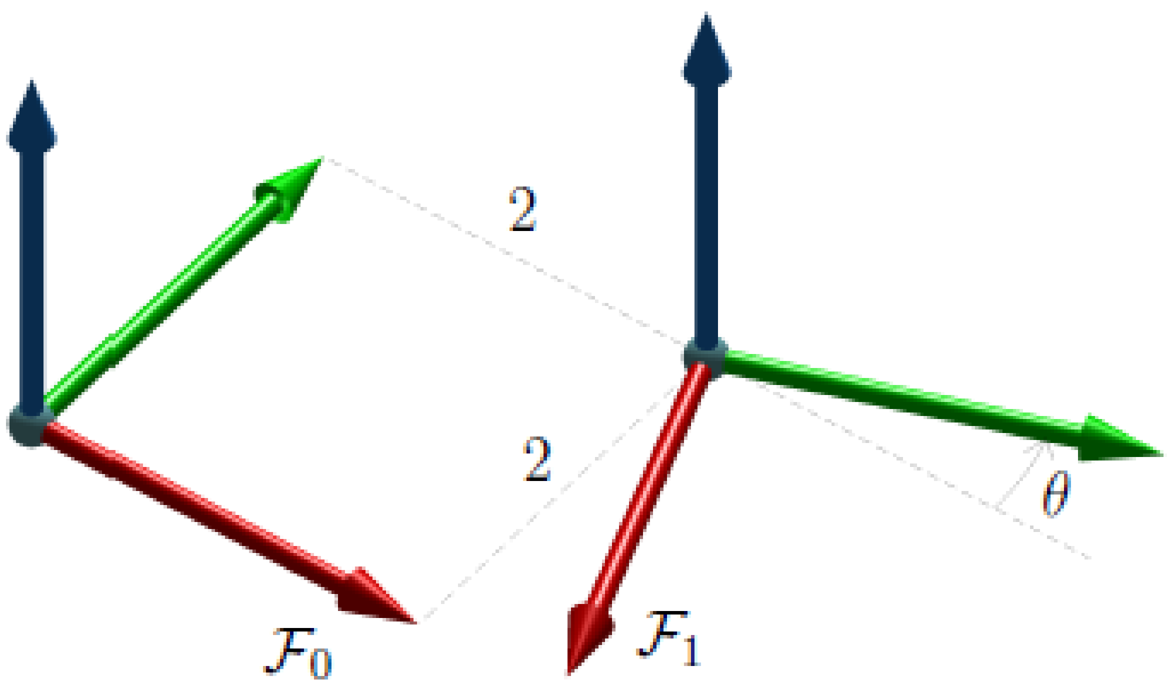
Après ces trois transformations, le référentiel imaginaire $\mathcal{F}_m$ coïncidera avec le référentiel $\mathcal{F}_b$, ce qui veut dire que

$$\mathbf{H}_b^a = \mathbf{H}_{rot,x}(-90°)\mathbf{H}_{trans}(0,0,10)\mathbf{H}_{rot,z}(-135°).$$

Il existe plusieurs d'autres séquences de transformations qui donnent évidement le même résultat final, mais pas nécessairement avec la même séquence de trois matrices homogènes. Par exemple, il est possible de démontrer que $\mathbf{H}_b^a = \mathbf{H}_{trans}(0,10,0)\mathbf{H}_{rot,x}(-90°)\mathbf{H}_{rot,z}(-90°)$. Peu importe la séquence, nous pouvons faire le calcul pour obtenir la matrice $\mathbf{H}_b^a$ numériquement et ensuite en extraire le quaternion et la position comme nous allons voir dans la section suivante.

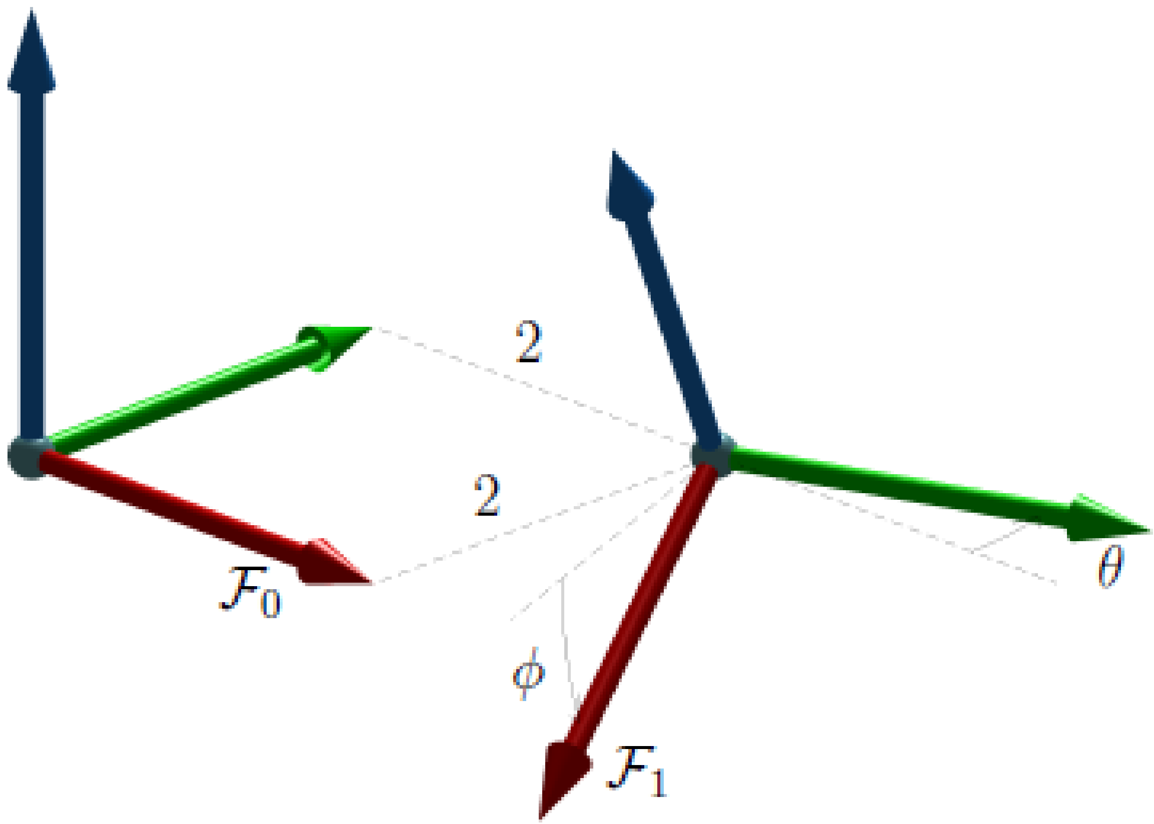
Exercice

a) Dans le cas des deux référentiels montrés à la figure, trouver les matrices homogènes de transformation de base H_{trans} et $H_{rot,z}$, et calculer la matrice résultante H_1^0.



Exercice

b) Dans le cas des deux référentiels montrés à la figure, trouver les matrices homogènes de transformation de base *permettant de calculer* H_1^0.



Exercice

c) Dans le cas des deux référentiels montrés à la figure, trouver les matrices suivantes:

i. H_1^0 ;

ii. H_2^1 ;

iii. H_2^0, en fonction de H_1^0 et H_2^1.