جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Robotique industrielle

Master I Fabrication mécanique et productique

Par : Dr. Slamani Mohamed

Cinématique directe

Dans ce cours, nous allons décrire une méthode systématique pour développer le modèle cinématique d'un robot sériel à n articulations.

Cette méthode consiste en deux étapes principales :

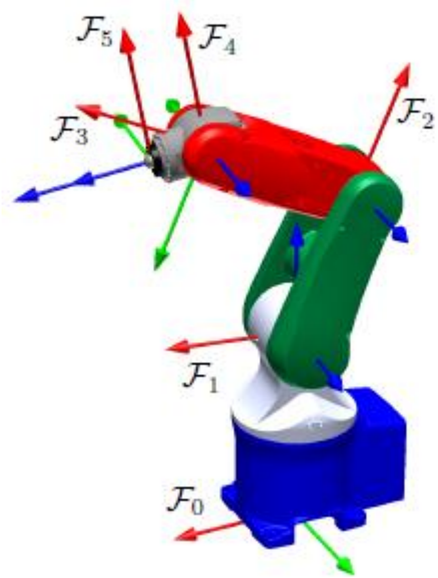
1. Placer un référentiel sur chaque lien du robot;
2. Ensuite, pour chaque paire de référentiels consécutifs, trouver quatre paramètres géométriques qui décrivent la pose de l'un par rapport a l'autre. Il s'agit de la méthode Denavit-Hartenberg qui a été proposée en 1955 et reste toujours la méthode de loin la plus utilisée en robotique sérielle.

Méthode Denavit-Hartenberg

Pour résoudre la cinématique directe d'un robot sériel spatial à n articulations (rotoïdes ou prismatiques), il est presque inévitable de placer un référentiel sur chaque lien du robot, chose que nous n'avons pas eu besoin de faire dans l'exemple de la section précédente. Ainsi, dans le cas d'un robot à n articulations, donc à n+1 liens, le modèle de la cinématique directe du robot sera exprimé par l'équation suivante :

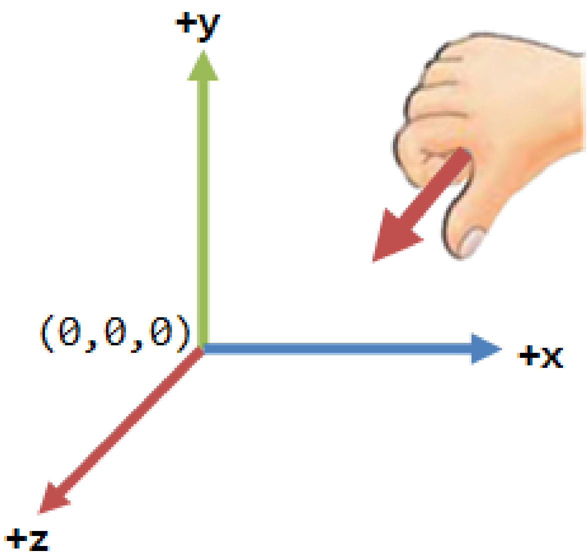
$$\mathbf{H}_n^0 = \mathbf{H}_1^0 \mathbf{H}_2^1 \mathbf{H}_3^2 \ldots \mathbf{H}_n^{n-1},$$

où $\mathbf{H}_n^0$ représente la pose du référentiel $\mathcal{F}_n$ (celui de la bride du robot, qu'ABB appelle tool0) par rapport au référentiel $\mathcal{F}_0$ (celui de la base). Le problème principal avec un choix aléatoire de référentiels est que l'obtention des matrices $\mathbf{H}_i^{i-1}$ serait assez laborieux. Un autre problème est bien sûr le fait qu'une telle approche ne serait pas systématique.

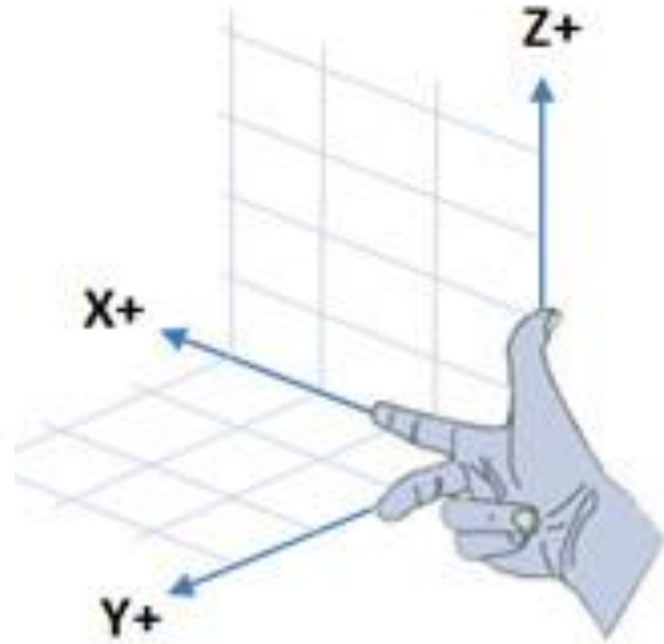


1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Règle de la main droite



Right-Hand System (RHS) or
Counter-Clockwise (CCW) System



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

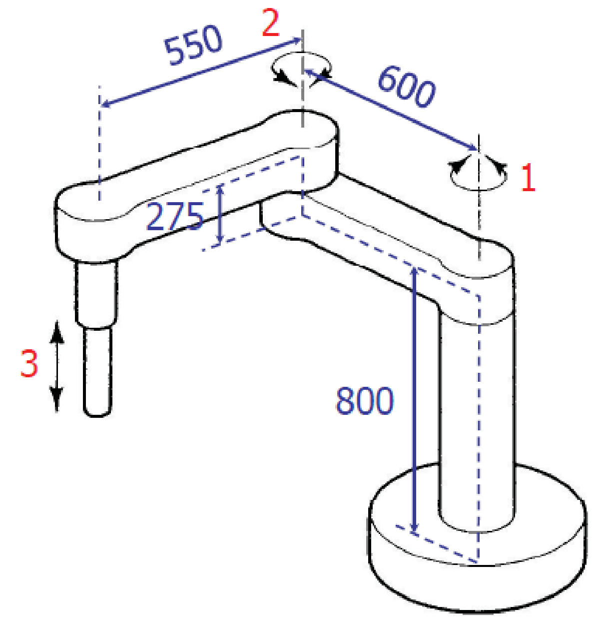
Algorithme pour placer les référentiels DH

- Pour le référentiel $\mathcal{F}_0$, placez son axe z_0 le long de l'axe de l'articulation 1, dans le cas d'une articulation rotoïde, en respectant la règle de la main droite, ou parallèle à la direction de l'articulation $i+1$ et dans le même sens, dans le cas d'une articulation prismatique. Placez l'origine du référentiel $\mathcal{F}_0$ et les axes x_0 et y_0 selon vos préférences. ⚠ Il est important de comprendre que le référentiel $\mathcal{F}_0$ est fixé à la base du robot. Donc, lorsque les articulations du robot se déplacent, ce référentiel reste immobile par rapport à la base du robot.
- Pour le référentiel $\mathcal{F}_i$, où $i = 1, 2, \ldots, n-1$, placez son axe z_i le long de l'axe de l'articulation $i+1$, dans le cas d'une articulation rotoïde, en respectant la règle de la main droite, ou parallèle à la direction de l'articulation $i+1$ et dans le même sens, dans le cas d'une articulation prismatique. Choisissez l'origine du référentiel $\mathcal{F}_i$ de telle manière que l'axe x_i intersecte l'axe z_{i-1} à angle droit. Si les axes z_i et z_{i-1} sont parallèles ou confondues, il existe infiniment de possibilités. Sinon, il existe une seule possibilité pour l'origine $\mathcal{F}_i$ et deux pour l'axe x_i. Choisissez parmi ces possibilités selon vos préférences. ⚠ Il est très important de comprendre que le référentiel $\mathcal{F}_i$ est fixé au lien i. Donc, lorsque seul l'articulation $i+1$ se déplace, le référentiel $\mathcal{F}_i$ reste immobile par rapport à la base du robot.
- Pour le référentiel $\mathcal{F}_n$, placer l'axe x_n de telle manière qu'il intersecte l'axe z_{n-1} à angle droit. Placez l'origine du référentiel $\mathcal{F}_n$ et les axes z_n et y_n selon vos préférences. Normalement, on positionne l'origine au centre de l'extrémité de la bride du robot, comme dans le cas des robots ABB. ⚠ Il est important de comprendre que ce référentiel est fixé à la bride du robot (lien n).

Algorithme pour placer les référentiels DH

– Algorithme

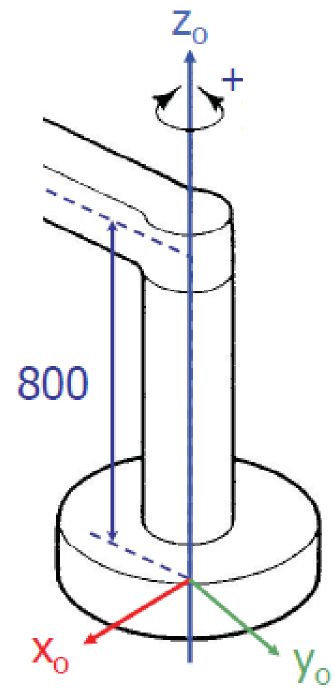
1. Numéroter les articulations de « 1 à n ».



2. Référentiels des liens :

2.1 - fixer F_o :

- $\vec{z}_o$: sens + de l'axe #1 ;
- Origine : arbitraire sur $\vec{z}_o$;
- $\vec{x}_o$ et $\vec{y}_o$: arbitraires.



Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Algorithme pour placer les référentiels DH

2.2 – FAIRE (i = 1 à n-1)

a) $\vec{z}_i$: sens + de l'articulation « i+1 ».

b) Fixer l'origine « i » à la 1ère règle qui s'applique :

- Intersection de $\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$;
- Intersection de la normale commune de $\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ sur $\vec{z}_i$;
- Arbitraire sur $\vec{z}_i$ à l'articulation « i+1 ».

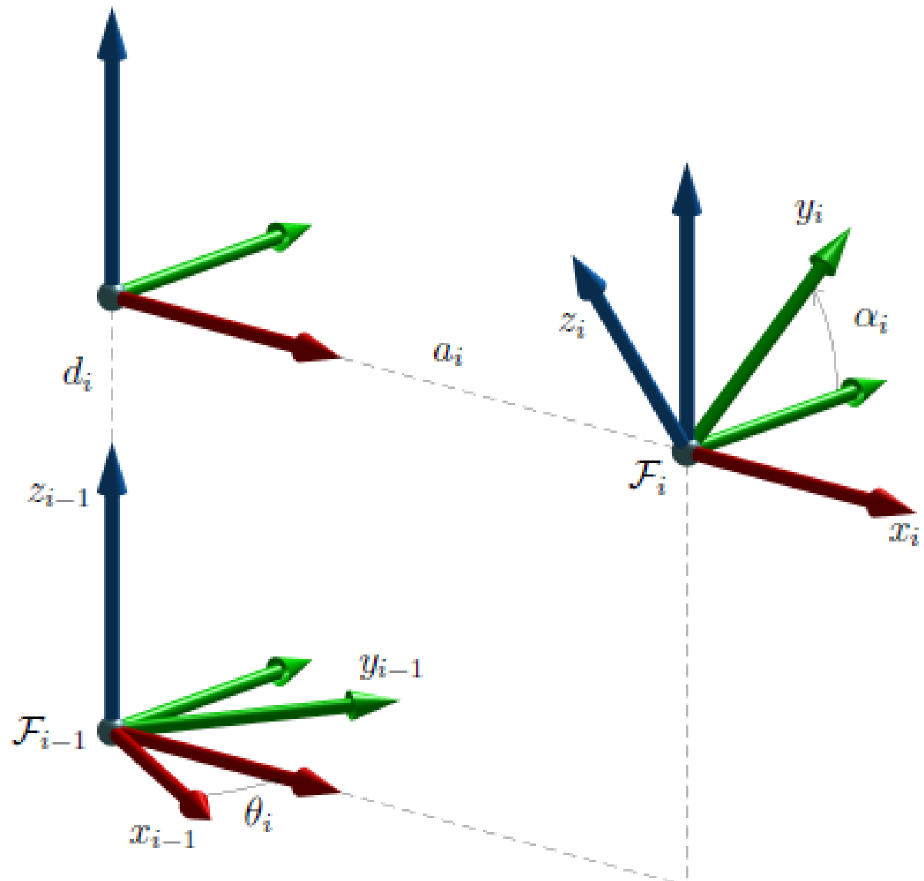
c) Fixer $\vec{x}_i$ à la 1ère règle qui s'applique :

- $\vec{x}_i = \pm(\vec{z}_{i-1} \times \vec{z}_i)$ si $\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ ne sont pas // ;
- Le long de la normale commune lorsque $\vec{z}_i$ et $\vec{z}_{i-1}$ sont //;
- Arbitrairement $\perp$ à $\vec{z}_i$ lorsque $\vec{z}_i \equiv \vec{z}_{i-1}$ (généralement, on choisit // à $\vec{x}_{i-1}$).

d) $\vec{y}_i = (\vec{z}_i \times \vec{x}_i)$.

FIN FAIRE

Méthode Denavit-Hartenberg



– Les quatre transformations consécutives de base pour obtenir $\mathcal{F}_i$ à partir de $\mathcal{F}_{i-1}$.

1 rotation de θ_i autour de l'axe z_{i-1} ;

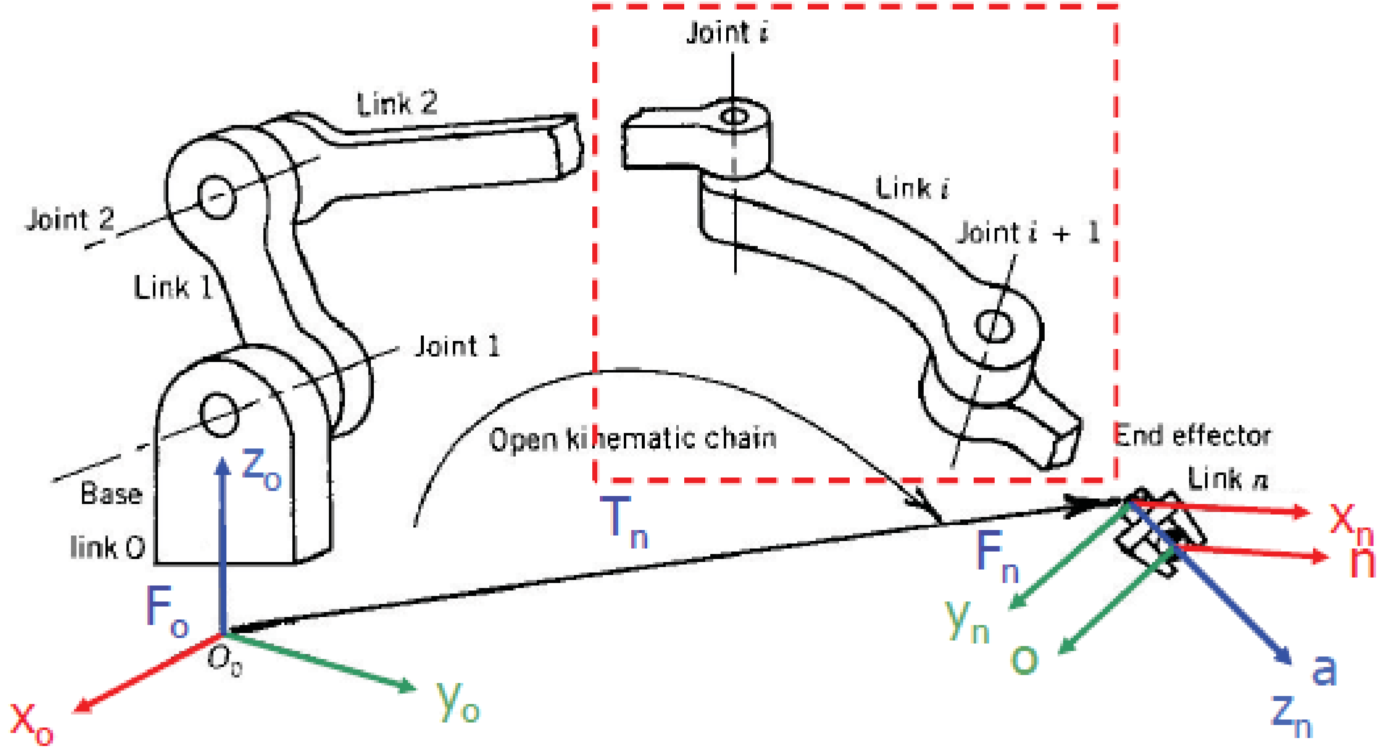
2 translation de d_i le long de l'axe z du nouveau référentiel ;

3 translation de a_i le long de l'axe x du nouveau référentiel ;

4 rotation de α_i autour de l'axe x du nouveau référentiel.

Méthode Denavit-Hartenberg

A – Numéroter les articulations : 1 à n.

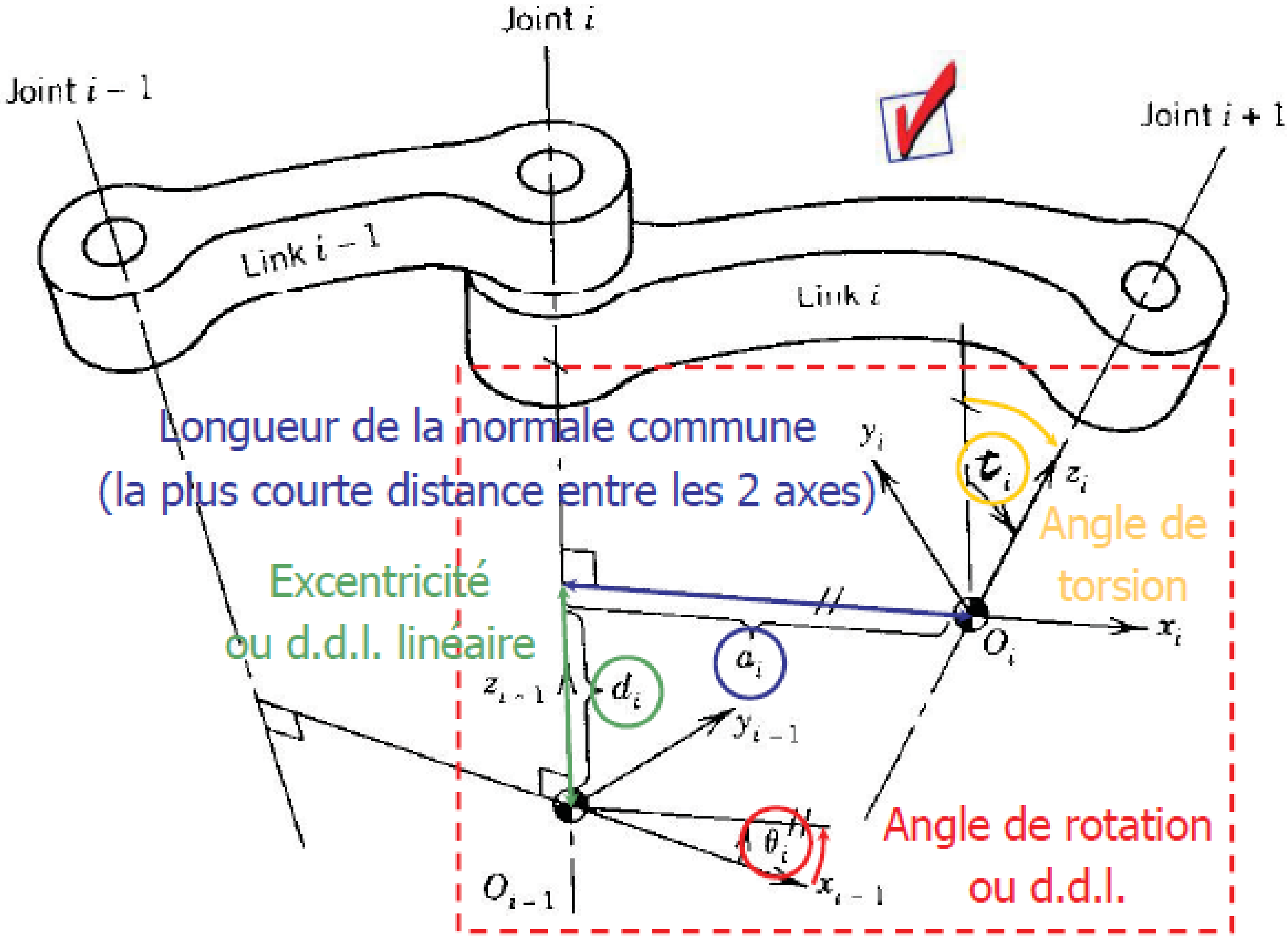


L'algorithme permettra de fixer :

- F_o : référentiel de base du robot ;
- F_1 à F_n : référentiels des liens ;
- F_n : référentiel du poignet.

Méthode Denavit-Hartenberg

B – Quatre paramètres de la matrice D-H

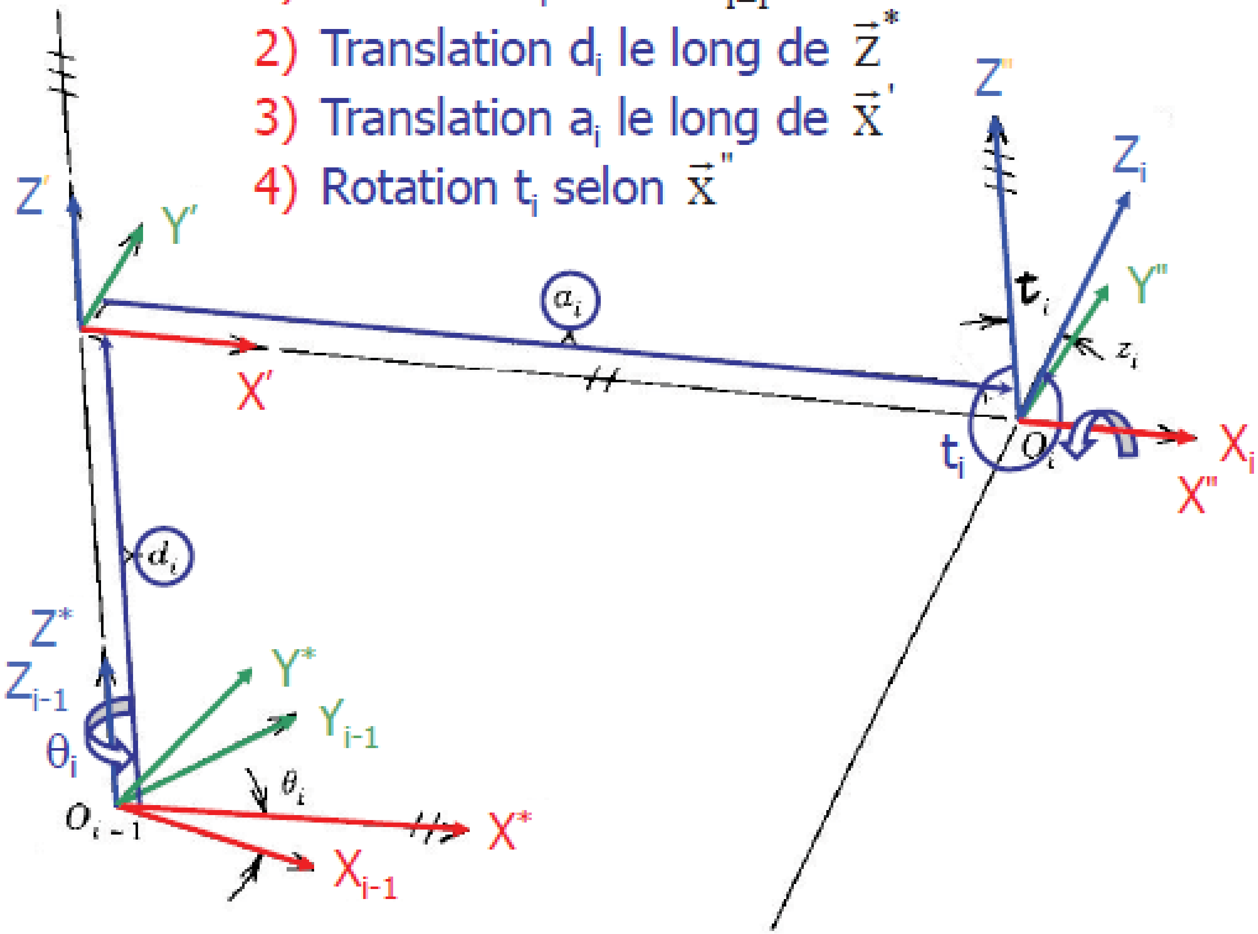


1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

C – Développement de la matrice D-H

4 paramètres $\Rightarrow$ 4 transformations :

1) Rotation θ_i selon $\vec{Z}_{i-1}$
2) Translation d_i le long de $\vec{Z}^*$
3) Translation a_i le long de $\vec{X}'$
4) Rotation t_i selon $\vec{X}''$



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

En post-multipliant les transformations :

$$A_i^{i-1} = \underbrace{Rot(\vec{z}_{i-1}, \theta_i)}_{1} \; \underbrace{Trans(0,0,d_i)}_{2} \; \underbrace{Trans(a_i,0,0)}_{3} \; \underbrace{Rot(\vec{x}'', t_i)}_{4}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(t_i) & \sin(\theta_i)\sin(t_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(t_i) & -\cos(\theta_i)\sin(t_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(t_i) & \cos(t_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Méthode Denavit-Hartenberg

Nous allons appeler θ_i, d_i, a_i et α_i, les quatre paramètres DH. Ainsi, la matrice $\mathbf{H}_i^{i-1}$ qui représente la pose du référentiel $\mathcal{F}_i$ par rapport au référentiel $\mathcal{F}_{i-1}$ peut être obtenue en fonction des quatre paramètres DH par l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_i^{i-1} &= \mathbf{H}_{rot,z}(\theta_1)\mathbf{H}_{trans}(0,0,d_i)\mathbf{H}_{trans}(a_i,0,0)\mathbf{H}_{rot,x}(\alpha_1) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Algorithme pour obtenir les paramètres DH

Une fois tous les $n+1$ référentiels DH placés, il faut trouver les paramètres DH pour chaque référentiel $\mathcal{F}_i$ (où $i = 1, 2, \ldots, n$). En se référant à la figure 1 , il est facile de déduire les quatre règles suivantes pour les paramètres DH :

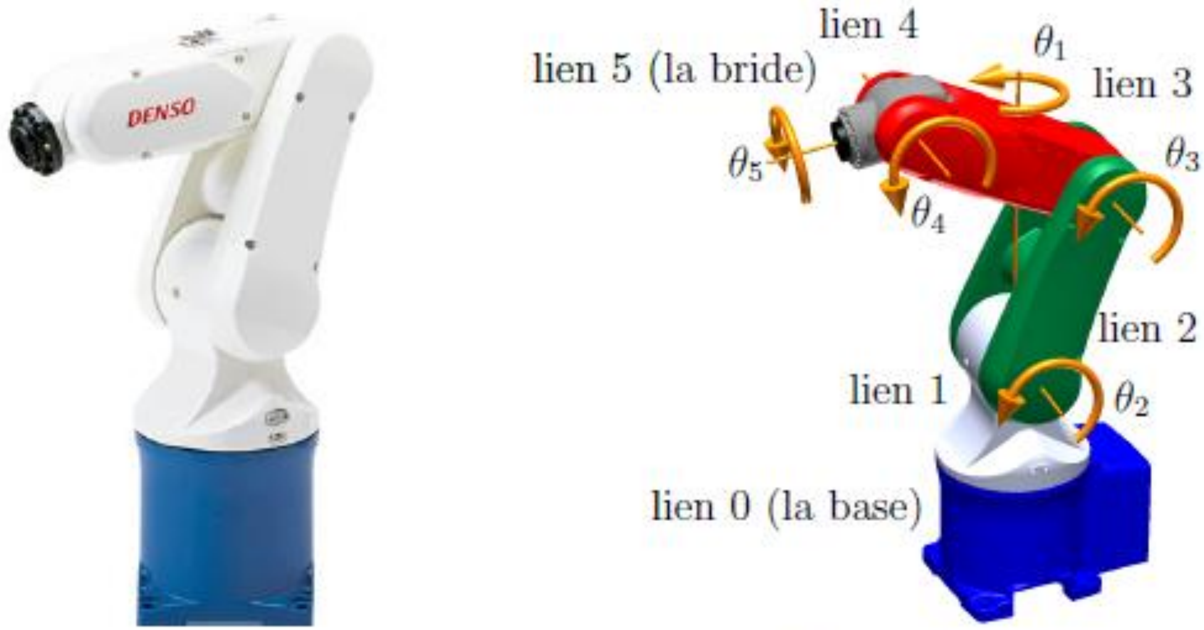
- θ_i est l'angle entre l'axe x_{i-1} et l'axe x_i, mesuré autour de l'axe z_{i-1} en utilisant la règle de la main droite. ⚠ Il est important de comprendre que si l'articulation i est rotoïde, θ_i est une *variable articulaire*, alors que si l'articulation i est prismatique, θ_i est une constante (positive, zéro ou négative).

- d_i est la distance *dirigée* de l'axe x_{i-1} vers l'axe x_i, mesurée le long de l'axe z_{i-1}. ⚠ Il est important de comprendre que si l'articulation i est prismatique, d_i est une *variable articulaire*, alors que si l'articulation i est rotoïde, d_i est une constante (positive, zéro ou négative).

- a_i est la distance dirigée de l'axe z_{i-1} vers l'axe z_i, mesurée le long de l'axe x_i. ⚠ Il est important de se rappeler que a_i est toujours une constante (positive, zéro ou négative). Par exemple, dans la figure 1 , a_i est positive.

- α_i est l'angle entre l'axe z_{i-1} et l'axe z_i, mesuré autour de l'axe x_i en utilisant la règle de la main droite. ⚠ Il est important de se rappeler que α_i est toujours une constante. Par exemple, dans la figure 1 , α_i est environ $+30°$.

Equation de la cinématique directe



(a) (b)

FIGURE 1 – (a) Le robot VP-5243 de la compagnie DENSO Robotics et (b) un schéma illustrant les sens positives de rotations

Enfin, si vous avez un référentiel outil, et un référentiel atelier, la pose du premier par rapport au dernier est définie par l'équation suivante :

$$\mathrm{H}_{outil}^{atelier} = \mathrm{H}_{0}^{atelier}\mathrm{H}_{n}^{0}\mathrm{H}_{outil}^{n}.$$

Exemple d'un robot sériel a cinq articulations rotoïdes

Jamaa Mohamed Boudiaf - M'sila (جامعة محمد بوضياف - المسيلة)
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Exemple 2. : référentiels sur les liens.

2.2 – FAIRE (i = 1 à 2)

i = 1

a) $\vec{z}_1$: sens + du joint 2.

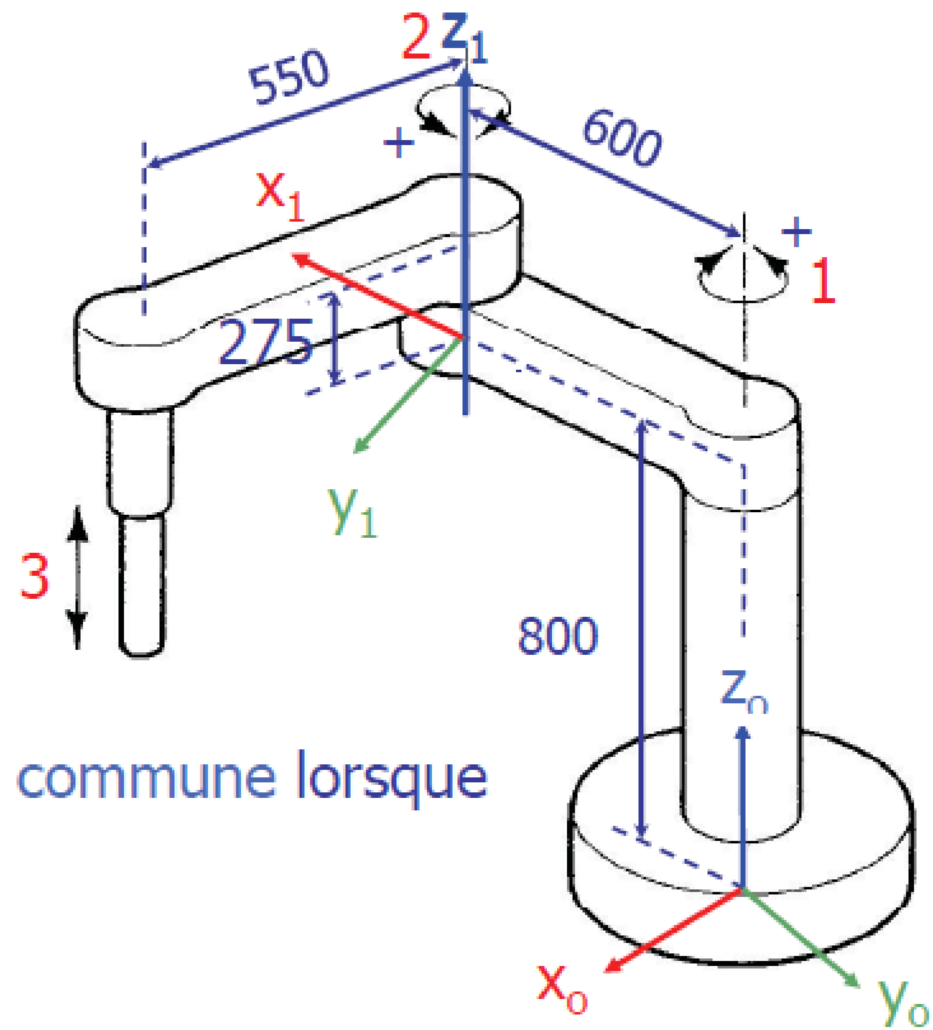
b) Fixer 0_1 :

Arbitraire sur $\vec{z}_1$ à l'articulation « 2 ».

c) Fixer $\vec{x}_1$:

Le long de la normale commune lorsque $\vec{z}_1$ et $\vec{z}_o$ sont //.

d) $\vec{y}_1 = \vec{z}_1 \times \vec{x}_1$.



référentiels sur les liens.

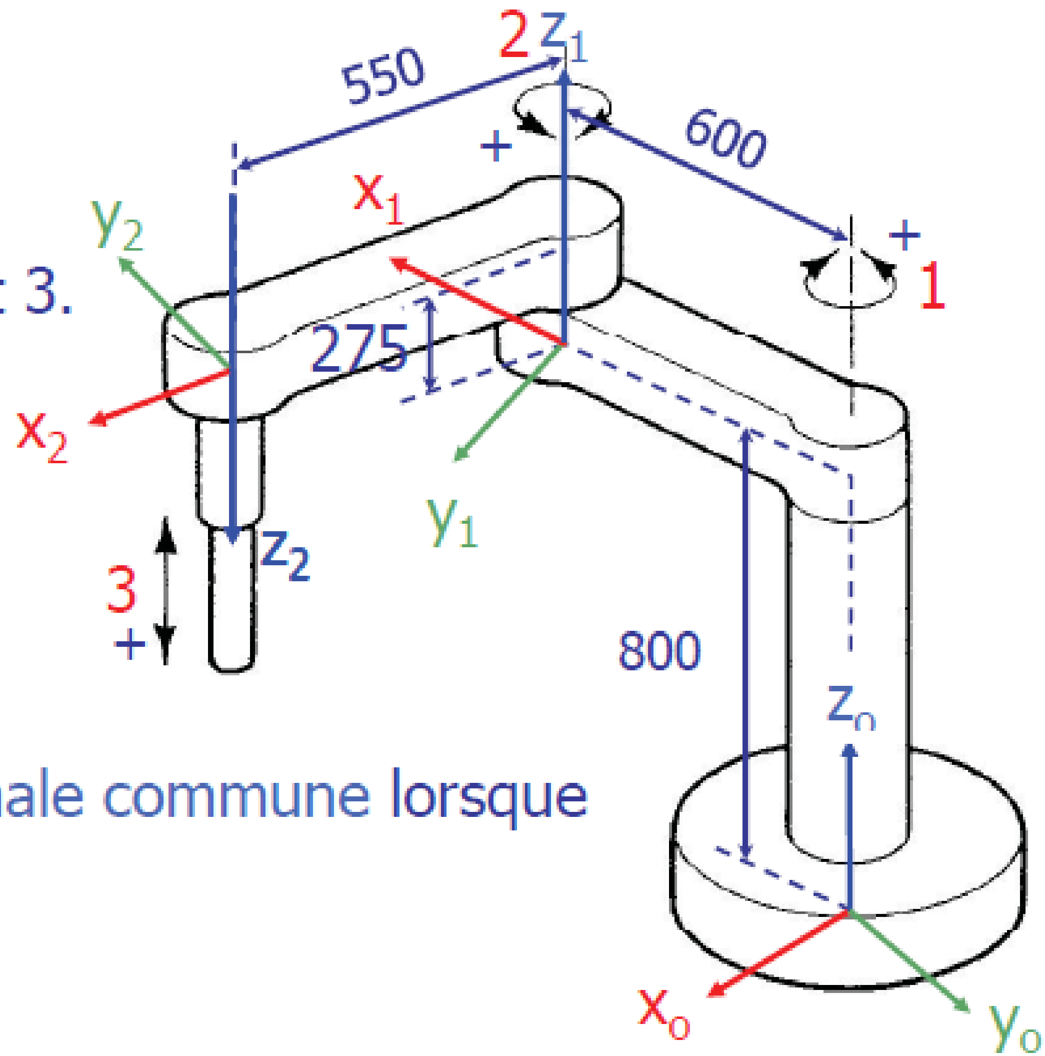
2.2 – FAIRE (i = 1 à 2)

i = 2

a) $\vec{z}_2$: sens + du joint 3.

b) Fixer 0_2 :

Arbitraire sur $\vec{z}_2$ à l'articulation « 3 ».



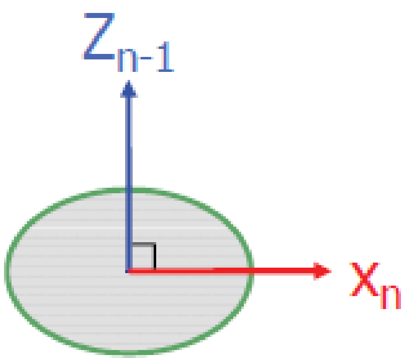
c) Fixer $\vec{x}_2$:

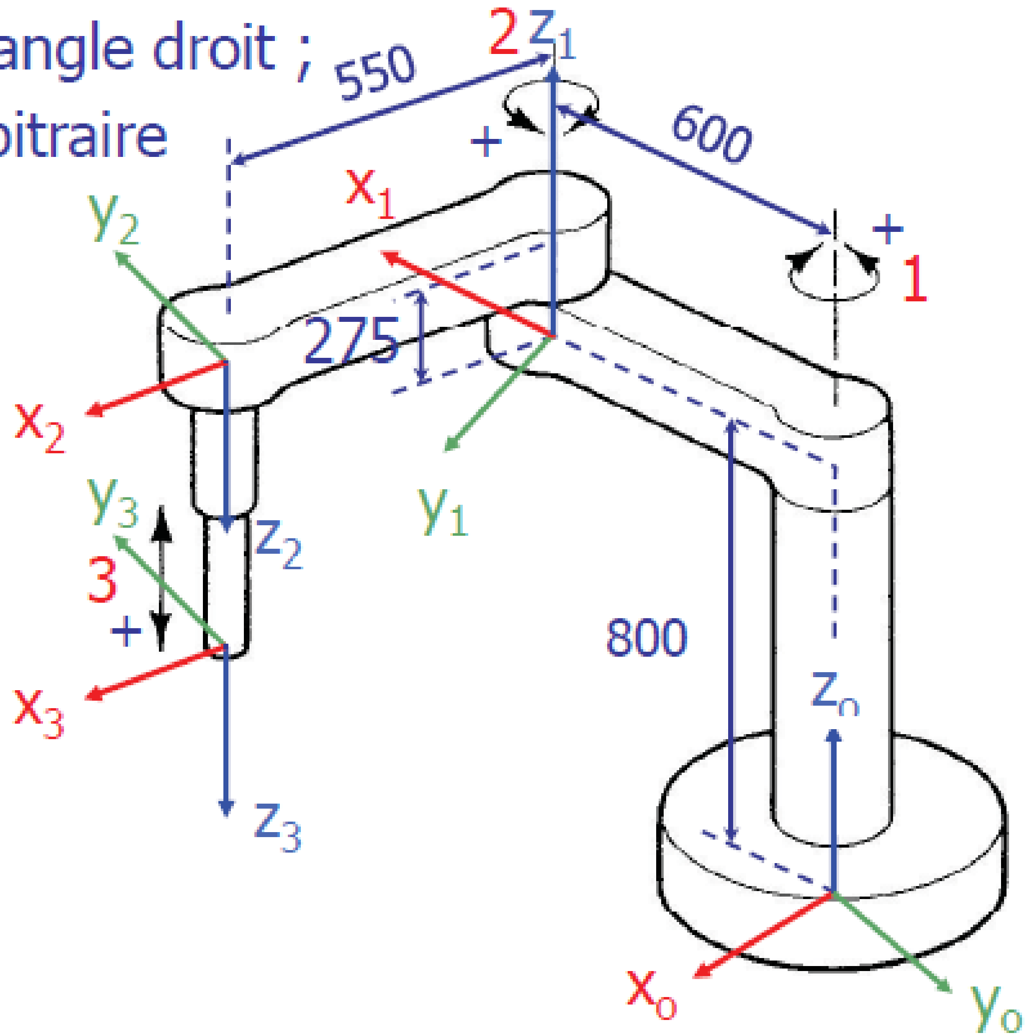
Le long de la normale commune lorsque $\vec{z}_2$ et $\vec{z}_1$ sont //.

d) $\vec{y}_2 = \vec{z}_2 \times \vec{x}_2$.

2.3 – Fixer F_n (poignet) :

- $\vec{x}_n$ doit couper $\vec{z}_{n-1}$ à angle droit ;
- L'origine « n » est arbitraire sur le poignet ;
- $\vec{y}_n$ et $\vec{z}_n$ sont placés arbitrairement.





جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

3. Construire le tableau des paramètres :

θ_i : angle pour aligner $\vec{x}_{i-1}$ avec $\vec{x}_i$ en tournant autour de $\vec{z}_{i-1}$.

d_i : distance de $\vec{x}_{i-1}$ vers $\vec{x}_i$ le long de $\vec{z}_{i-1}$.

a_i : distance de $\vec{z}_{i-1}$ vers $\vec{z}_i$ le long de $\vec{x}_i$.

t_i : angle pour aligner $\vec{z}_{i-1}$ avec $\vec{z}_i$ en tournant autour de $\vec{x}_i$.

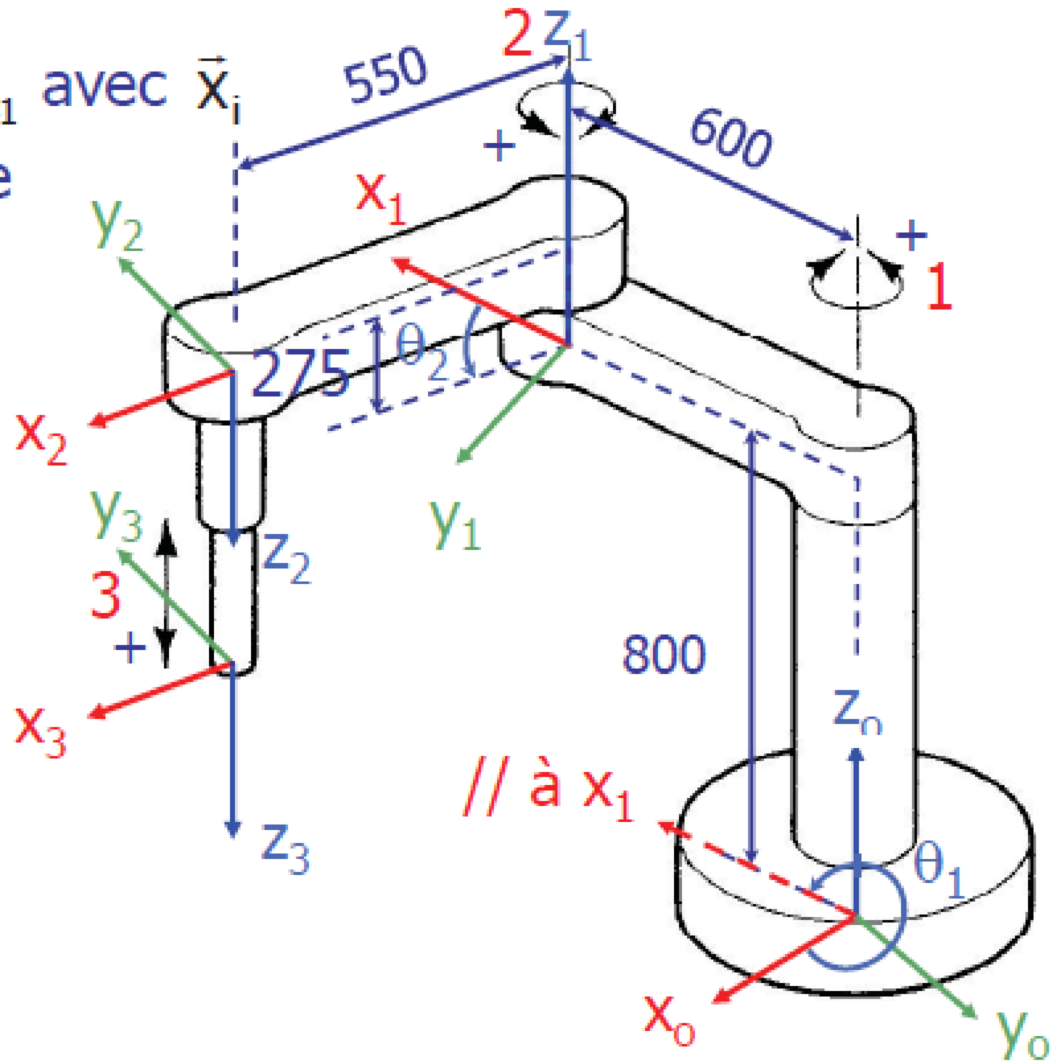
Lien #	Référentiels $F_{i-1} \rightarrow F_i$	θ_i	d_i	a_i	t_i

تامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

tableau.

θ_i : angle pour aligner $\vec{x}_{i-1}$ avec $\vec{x}_i$ en tournant autour de $\vec{z}_{i-1}$.

Lien #	θ_i	d_i	a_i	t_i
1	θ_1			
2	θ_2			
3	0^o			

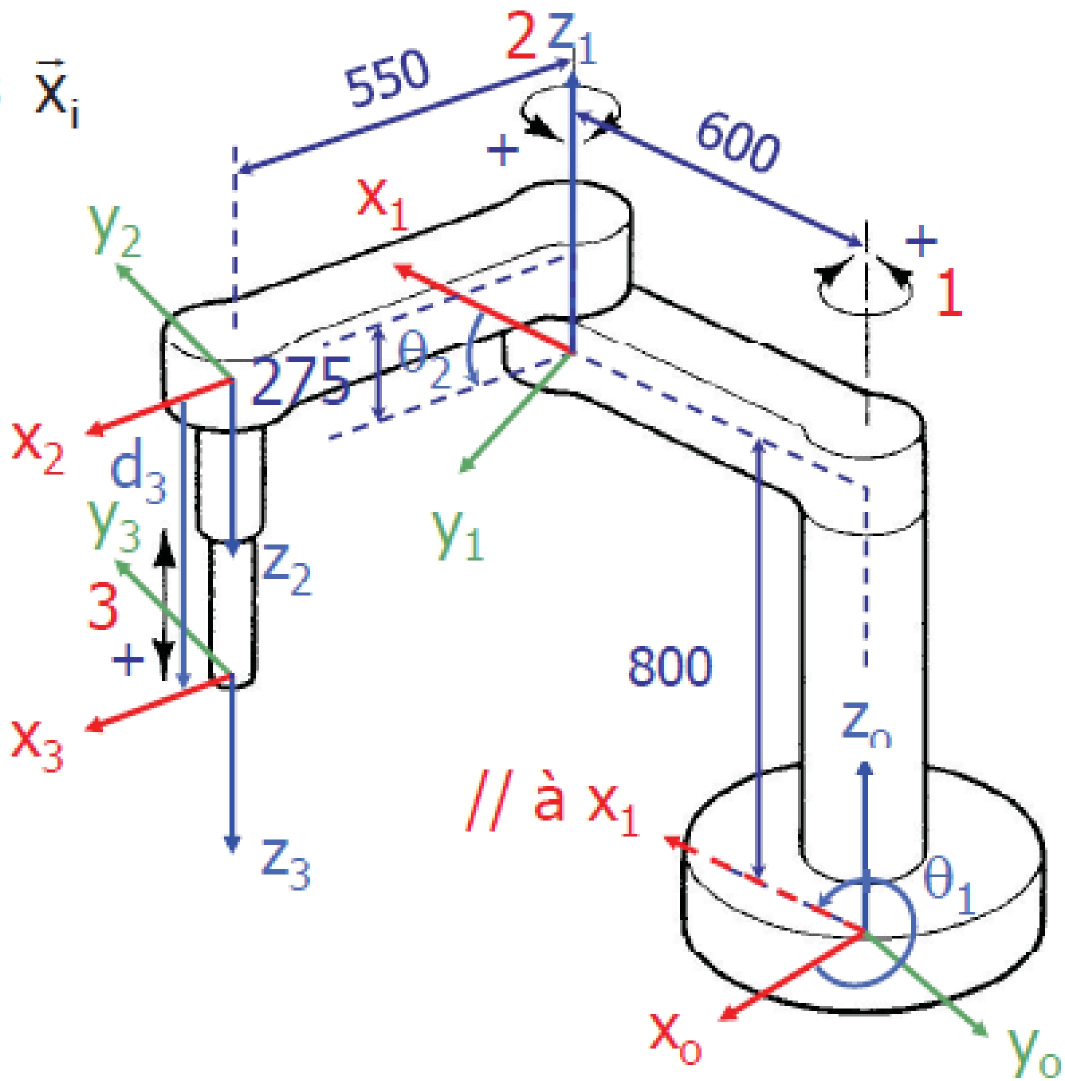


جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

: tableau (suite).

d_i : distance de $\vec{x}_{i-1}$ vers $\vec{x}_i$ le long de $\vec{z}_{i-1}$.

Lien #	θ_i	d_i	a_i	t_i
1	θ_1	800		
2	θ_2	275		
3	0°	d_3		



: tableau (suite).

a_i : distance de $\vec{z}_{i-1}$ vers $\vec{z}_i$ le long de $\vec{x}_i$.

Lien #	θ_i	d_i	a_i	t_i
1	θ_1	800	600	
2	θ_2	275	550	
3	0°	d_3	0	

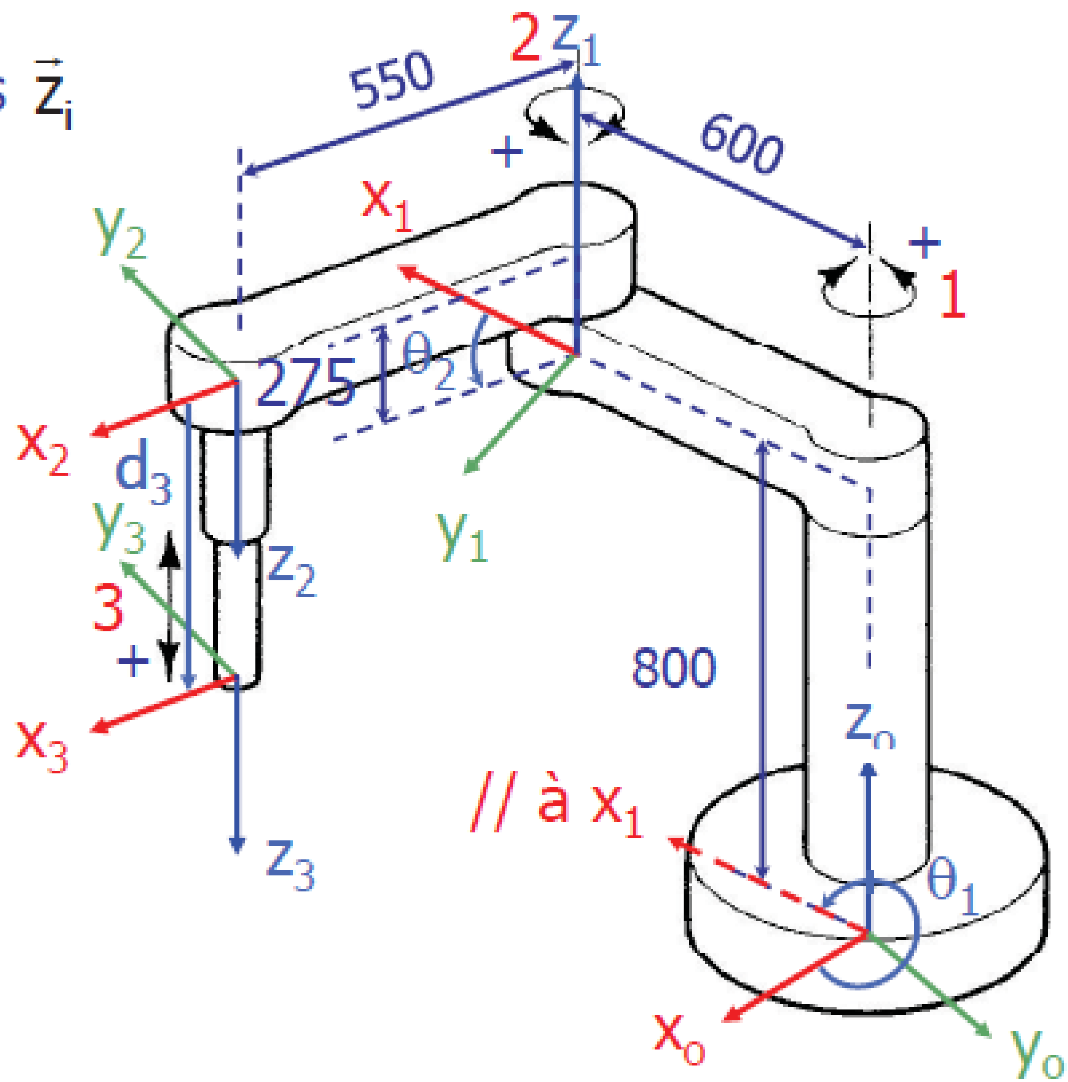
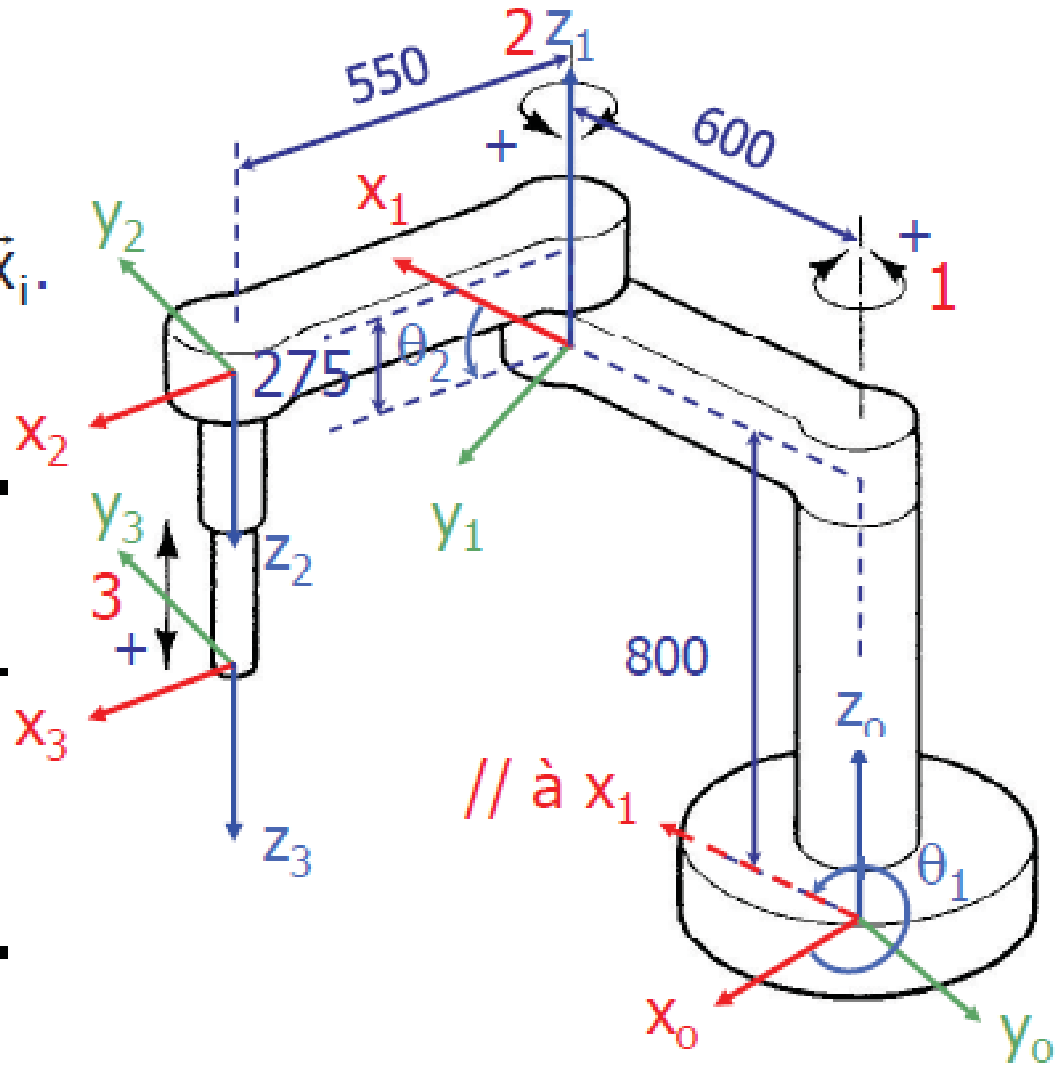


tableau (suite).

t_i : angle pour aligner $\vec{z}_{i-1}$ avec $\vec{z}_i$ en tournant autour de $\vec{x}_i$.

Lien #	θ_i	d_i	a_i	t_i
1	θ_1	800	600	0°
2	θ_2	275	550	180°
3	0°	d_3	0	0°



4. Écrire les matrices de D-H

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(t_i) & \sin(\theta_i)\sin(t_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(t_i) & \cos(\theta_i)\sin(t_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(t_i) & \cos(t_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tableau des paramètres du robot Adept One.

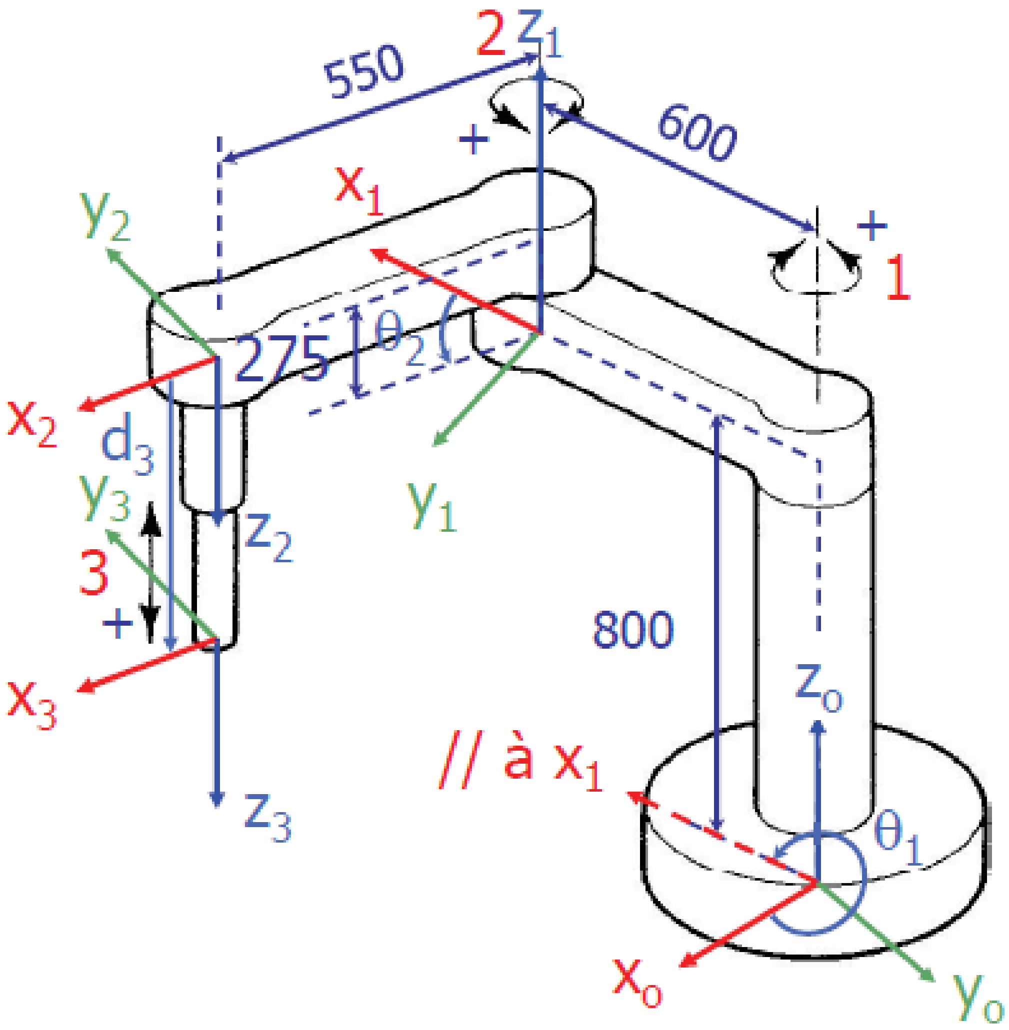
Lien	θ_i	d_i	a_i	t_i
1	θ_1	800	600	0°
2	θ_2	275	550	180°
3	0°	d_3	0	0°

5. Trouver le modèle du robot :

$$T_n = A_1 A_2 \cdots A_n$$

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

vérification graphique.

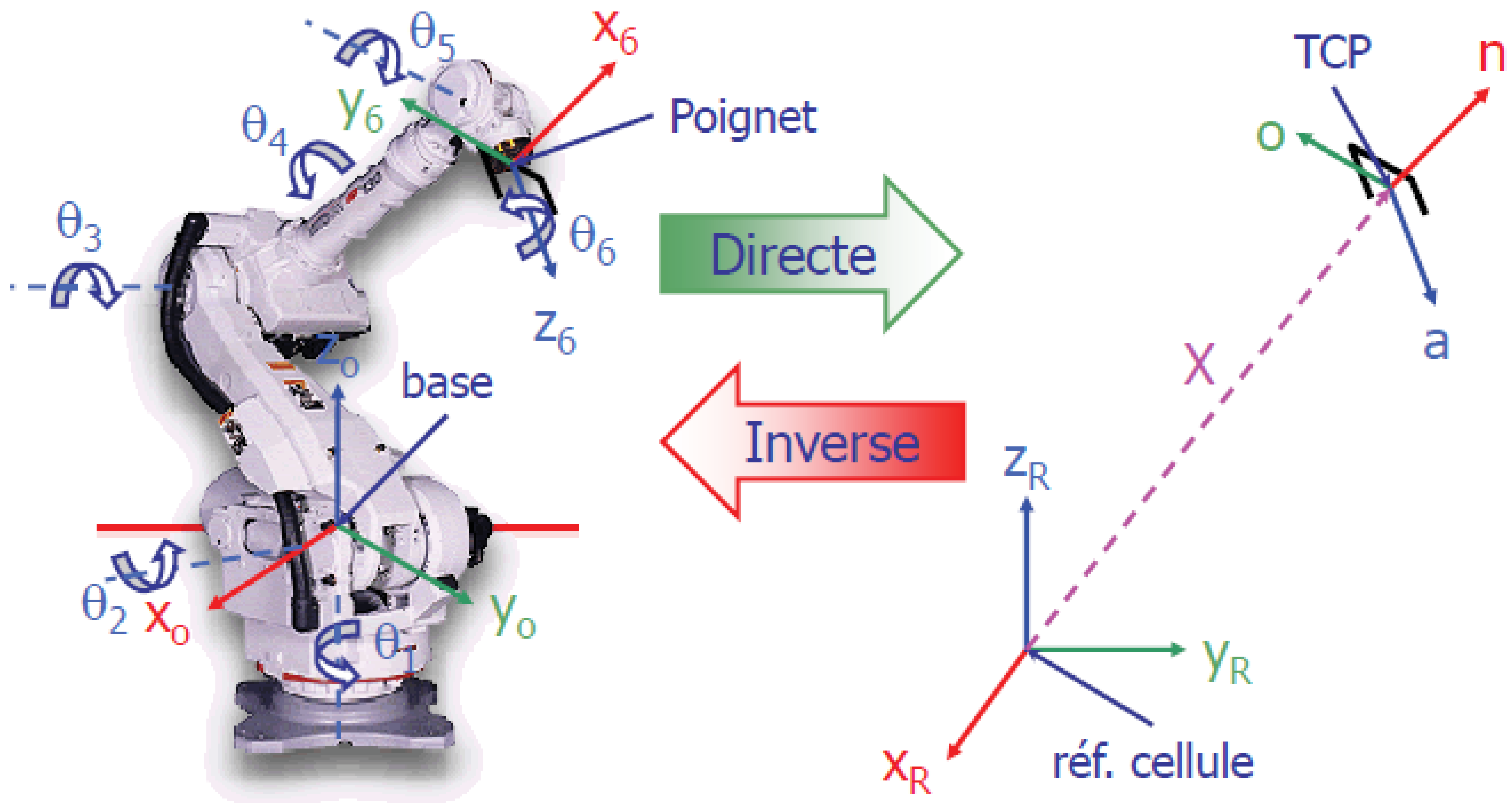


جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Cinématique directe de position

Espace articulaire

Espace cartésien



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Cinématique directe de position

Problème à résoudre :

- **Données :**
  - Caractéristiques du robot (longueurs, torsion, etc.) ;
  - Les articulations $\vec{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)^T$;
  - L'effecteur G_k ;
  - Référentiel de l'atelier C
- **Cherché :**

  $$X = f(\vec{q})$$

- **Méthode :**

  Transformations homogènes consécutives

Cinématique directe de position

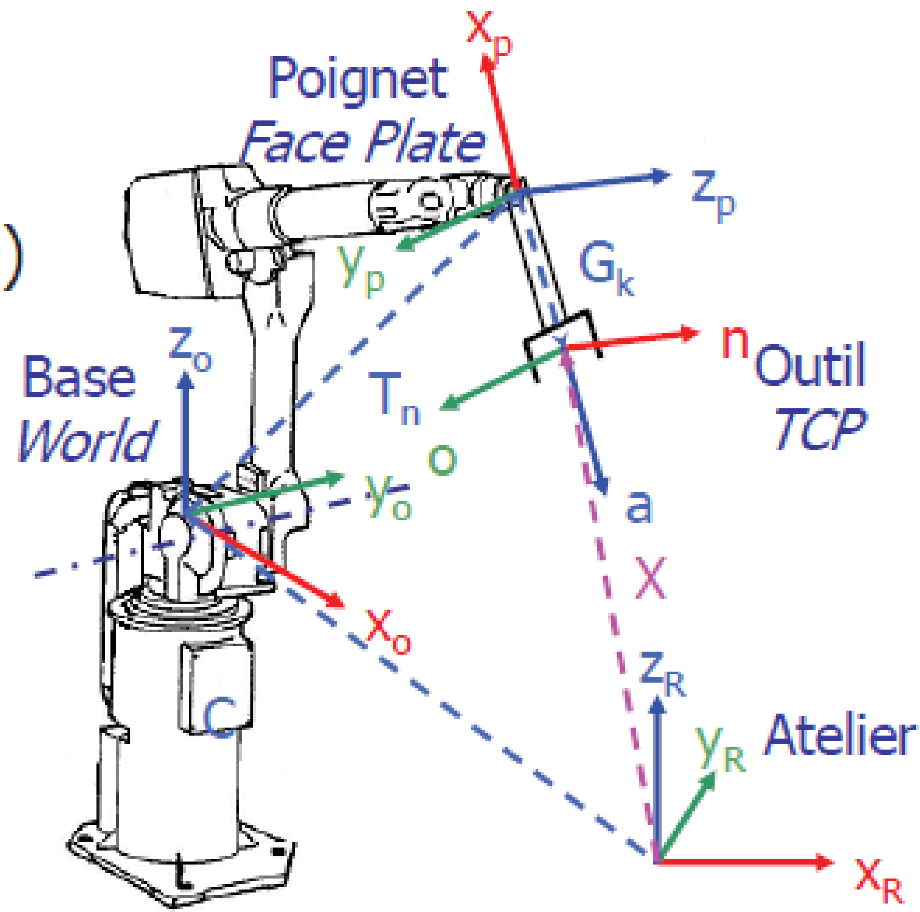
Modèle du robot :

$$T_n = A_1 A_2 \cdots A_n \qquad (2.9)$$

Cellule et effecteur :

$$X_k^R = C_o^R T_n^o G_k^n \qquad (2.10)$$

$$X = C T_n G_k$$



Cinématique directe de position

cinématique directe du Adept.

On demande :

- Faire la cinématique directe ;
- Calculer la localisation de l'effecteur si :
  - $\theta_1 = 270°$;
  - $\theta_2 = 90°$;
  - $d_3 = 200$ mm.