✍ Examen de Session Normale ✍

1[er] Année Socle Commun Durée : 1 h et 30 min Module Analyse 1

Exercice 1: 6 points

Soit l'ensemble E définie par $E = \left\{e^{1-2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Alors,

1. Montrer que E est borné.
2. Déterminer $\sup(E)$. Est ce que E admet le grand élément $(\max(E))$?
3. En utilisant le propriété caractéristique de la borne inférieure (inf), montrer que $\inf(E) = 0$. Est ce que E admet le petit élément $(\min(E))$?

Exercice 2: 7 points

Soient $a > 0$ et la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 > a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right) \end{cases} \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > a$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. En déduit la nature de la suite (u_n). Puis calculer sa limite.

Exercice 3: 7 points

Soit k est un réel positif. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1 + x^2} & : x \leq 0 \\ \ln(k + x^2) & : x > 0. \end{cases}$

1. Déterminer k pour que f soit continue au point 0.
2. Posons $k = e^2$. Alors,
   (a) Étudier la dérivabilité de f au point 0.
   (On peut utiliser la règle de l'Hôpital en cas de besoin)
   (b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. Puis exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.