إمتحان دورة عادية

مقياس تحليل 1 | المدة 1 سا و 30 د | المستوى : أولى جذع مشترك

التمرين الأول: (6 نقط)

لتكن E مجموعة معرفة كمايلي: $E = \left\{ e^{1-2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

1 بين أن E محدودة.

2 حدد $\sup(E)$. هل تملك E أكبر عنصر $(\max(E))$؟

3 بإستعمال الخاصية المميزة للحد الأدنى inf, برهن أن $\inf(E) = 0$. هل تملك E أصغر عنصر $(\min(E))$؟

التمرين الثاني: (7 نقط)

ليكن $a > 0$ والمتتالية (u_n) المعرفة كمايلي: $\begin{cases} u_0 > a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 برهن بالتراجع أنه: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > a$

2 أدرس رتابة المتتالية (u_n).

3 إستنتج طبيعة المتتالية (u_n). ثم أحسب نهايتها.

التمرين الثالث: (7نقط)

ليكن k عدد موجب. نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{1+x^2} & : x \leq 0 \\ \ln(k + x^2) & : x > 0. \end{cases}$

1 حدد العدد k حتى تكون f مستمرة عند 0.

2 نضع $k = e^2$ إذن،

(ا) أدرس قابلية إشتقاقية الدالة f عند 0. (يمكن إستخدام قاعدة لوبيتال عند الضرورة)

(ب) برهن أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال $]-\infty, 0]$. ثم عين عبارة $f^{-1}(x)$ بدلالة x.