

✍ Examen de Session Normale ✍

1^{er} Année Socle Commun

Année Universitaire : 2020/21

Module Analyse 2

Exercice 1:

7 points

1. Déterminer le développement limité des fonctions définies par $\sin x$ et $\arctan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 - \arctan x}$.
 - (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 0.
 - (b) Déduire $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.
 - (c) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Exercice 2:

7 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{3}{x^3 + 1}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} : \frac{3}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}.$$

2. Calculer l'intégrale $I = \int f(x) dx$.

[Indication : $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$].

3. Déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 3:

6 points

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$y' - 2xy = -x. \quad (1)$$

2. En utilisant le résultat de (1) résoudre l'équation de Bernoulli suivante

$$y' = -2xy + xy^2. \quad (2)$$

3. Donner la solution de (2) qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$.