SESSION NORMALE

ANALYSE-1 S1

Université de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

1^{ier} Socle commun

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Module : Analyse-1

Correction d'examen (Session normale) : ../01/ 2022

Durée de l'examen : 1 Heure et 30 Minutes

Ce sujet comporte 3 exercices :

- Exercice 1 : **Les ensembles bornées, sup, inf, max, min.** .... **6 points**
- Exercice 2 : **Les suites numériques** .... **7 points**
- Exercice 3 : **Les fonctions** .... **7 points**

Correction d'exercice 1 : (6 pts)

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

0.5 pt $2n \geq 0 \Leftrightarrow 1-2n \geq 1 \Leftrightarrow 0 < e^{1-2n} \leq e$.

0.5 pt Alors, en on déduit que $E \subset]0, e]$, c'est-à-dire E est bornée.

2 - a) Comme e est un majorant de E, car $\forall n \in \mathbb{N} : e^{1-2n} \geq e$ et $e \in E$ (pour $n = 0$). Donc,

0.5 pt $\sup(E) = e$.

0.5 pt **b)** Dans ce cas là, en on déduit que $\max(E) = e$.

3 - Maintenant, on montre que $\inf(E) = 0$.

a)

$$\inf(E) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad \forall u_n \in E & : u_n \geq 0 \\ (ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists u_{n_0} \in E & : u_{n_0} < \varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

0.5 pt Tel que $u_n = e^{1-2n}$.

0.5 pt D'après ce que précédent (i) est évident, car $E \subset]0, e]$.

Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, alors, on a, $u_n \in E \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : u_n = e^{1-2n}$. Donc, $u_{n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow e^{1-2n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - 2n_0 \ln \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{2}(1 - \ln \varepsilon)$, tel que $\ln \varepsilon < 1$. D'après le théorème d'Archimède un tel naturel n_0 existe tel que $n_0 > \frac{1}{2}(1 - \ln \varepsilon)$. On choisit,

01 pt habituellement $n_0 = \left[n_0 > \frac{1}{2}(1 - \ln \varepsilon)\right] + 1$ pour garantir (1).

01 pt **b)** Comme $0 \notin E$, car $\forall n \in \mathbb{N} : e^{1-2n} > 0$. Donc, $\min(E)$ n'existe pas.

Correction d'exercice 2 :(7 pts)

Soit la suite $\begin{cases} u_0 > a > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a^2}{u_n}\Big) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1 - On raisonner par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > a$.(On note $P(n)$).

0.5 pt **a)** (Initialisation) Pour $n = 0$ on a $u_0 > a$ (par définition). Donc $P(0)$ est vraie.

b) (Héridété) Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > a$ est vraie et on montre que : $u_{n+1} > a$. Alors, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - a &= \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a^2}{u_n}\Big) - a, \\ &= \frac{1}{2}\frac{(u_n - a)^2}{u_n} > 0. \end{aligned}$$

01 pt Car, $u_n > a > 0$. D'où $u_{n+1} > a$.

0.5 pt Par conséquent $P(n)$ est vraie.

2 - On a pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a^2}{u_n}\Big) - u_n = \frac{1}{2}\frac{(a - u_n)(a + u_n)}{u_n} < 0$, c'est-à-dire,

02 pt (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

01 pt **3 - a)** Comme la suite (u_n) est strictement décroissante et bornée inférieurement par a. Alors D'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $l \geq a$.

01 pt **b)** Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Si on passe à la limite dans la relation récurrente, on obtient, $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a^2}{l}\right) \Rightarrow l^2 = a^2 \Rightarrow (l = a)$, car $l > 0$.

Correction d'exercice 3 :(7 pts)

1 - f continue au point $0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)$. i.e, f continue à droite et à gauche au

0.5 pt point 0.

0.5 pt On a $f(0) = 2$, et $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \ln(k + x^2) = \ln(k)$.

0.5 pt et $\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} (1 + \sqrt{1 + x^2}) = 2 = f(0)$.

0.5 pt Alors, f continues au point $0 \Leftrightarrow \ln(k) = 2 \Leftrightarrow k = e^2$.

2 - Posons $k = e^2$.

01 pt **a)** On a les fonctions $x \mapsto 1 + \sqrt{1 + x^2}$ et $x \mapsto \ln(k + x^2)$ sont dérivables sur $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ (respectivement). Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

b) Au point 0. On utilisant la règle de l'Hopital.

01 pt $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{\ln(e^2 + x^2) - 2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{2x}{e^2 + x^2} = 0 = f'_d(0)$.

01 pt $\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = 0 = f'_g(0)$.

0.5 pt Comme $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$. Alors, f est dérivable au point 0. D'où la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

3×0.5pt **3 - a)** Sur $]-\infty, 0]$, on a $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x^2}$. Donc f est continue, et strictement décroissante, car $\forall x \in]-\infty, 0] :\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} < 0$. D'après le théorème de la bijection f ademet une fonction réciproque f^{-1} de $f(]-\infty, 0]) = [2, +\infty[$ dans $]-\infty, 0]$.

0.5 pt **b)** L'expression de $f^{-1}(x)$. On a
$\forall x \in]-\infty, 0] :\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f'(y)$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow x^2 = (1 - y)^2 - 1 \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \left(x = \sqrt{(1 - y)^2 - 1} \ \vee \ x = -\sqrt{(1 - y)^2 - 1}\right) \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{(1 - y)^2 - 1},\ \text{(car x<0)}. \end{aligned} \tag{3}$$

0.5 pt Donc, $f' : x \mapsto -\sqrt{(1 - x)^2 - 1}$.

FIN.