M1

(CE, ER, RE et robotique)

Cours

Présenté par Dr Abdelhakim IDIR
Enseignant/Chercheur
Maitres Conférences A –Université de M'sila
Maitre de recherche – Université de Boumerdes
Laboratoire d'Autmatique Appliquée-UMBB

Module:

Méthodes Numériques et Optimisation

abdelhakim.idir@univ-msila.dz

Chapitre 1
Rappels sur quelques méthodes numériques

Introduction

L'analyse numérique a **commencé** bien **avant la conception des ordinateurs** et leur utilisation quotidienne que nous connaissons aujourd'hui. **Les premières méthodes** ont été **développées pour essayer de trouver des moyens rapides et efficaces, de s'attaquer à des problèmes soit fastidieux (ممل)à résoudre à cause de leur grande dimension** (systèmes à plusieurs dizaines d'équations par exemple), **soit** parce **qu'il n'existe pas solutions explicites connues** même pour certaines équations assez simples en apparence.

Le but de ce cours et s'initier aux bases de l'analyse numérique en espérant qu'elles éveilleront de l'intérêt, de la curiosité et pourquoi pas une vocation.

Résolution des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthodes itératives :

La méthode itérative contrairement **à d'autres à l'avantage de ne pas avoir besoin de garder en mémoire la totalité d'une matrice de très grande taille gourmande en capacités mémoire**. Cette méthode permet de garder en mémoire que les coefficients non nuls d'une matrice de grande taille. **Cependant**, le succès de calcul n'est pas assuré quelque soit la matrice, certaines conditions sont nécessaire afin d'obtenir un résultat convergent, ce que nous allons voir dans ce document au travers ***des méthodes de Jacobi*** et ***de Gauss-Seidel***.

On considère un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$Ax = b \quad (1.1)$$

avec A inversible.

Résolution des systèmes d'équations linéaires
Méthodes itératives :

L'idée est de déduire un schéma itératif de la décomposition de A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible.

Le système (1) s'écrit alors :

$$(M-N)\,x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{M^{-1}M}_{I}x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x = M^{-1}Nx + M^{-1}b}$$

qui définit une équation de point fixe.

Résolution des systèmes d'équations linéaires
Méthodes itératives :

On considère alors **le schéma itératif associé** :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{k} + M^{-1}b \qquad (1.2)$$

Avec $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ (vecteur de départ). L'algorithme est initialisé par un vecteur arbitraire $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots., \ x_n^0)$

et s'arrête :

quand $\forall i \in \mathbb{N}, \ \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$ pour un ε donné.

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthodes itératives :

Selon les choix des matrices *M* et *N* on a différentes méthodes itératives.
Le point de départ de chacune de ces méthodes est l'unique décomposition de la matrice:

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sous la forme $A = D - (E + F)$

Avec:

- $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ diagonale, telle que $d_{i,j} = a_{i,j}$ et $d_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$;
- $-E = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ triangulaire inferieure **stricte** telle que $e_{i,j} = a_{i,j}$ *si* $i > j$

  ET $e_{i,j} = 0$ si $i \leq j$;
- $-F = (f_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ triangulaire supérieure **stricte**, telle que $f_{i,j} = a_{i,j}$ *si* $i < j$

  ET $f_{i,j} = 0$ si $i \geq j$;

Résolution des systèmes d'équations linéaires
Méthodes itératives :

Exemple: Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La décomposition de sous la forme $A = D - (E + F)$ décrite ci-dessus s'écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{-E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{-F}$$

Donc : **E=?** ET **F=?** (Compléter!!)

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthode de Jacobi

On suppose que A est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul $(a_{ii} \neq 0,\ \forall i)$.

<u>**Cette méthode consiste**</u> à isoler le coefficient de la diagonale **de chaque ligne du système**, si l'un des coefficients diagonaux est nul, **il est parfois possible de permuter certaines lignes pour éviter cette situation.**

On considère un système linéaire suivant :

$$Ax = b, \text{ avec } A \text{ inversible.}$$

On pose :

$$A = M - N,\ \text{avec}\ M = D\ et\ N = (E + F)\ ;\ \text{sachant que } D \text{ est inversible.}$$

Le schéma itératif s'écrit alors :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b \qquad (1.3)$$

avec $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$

La matrice $B_J = D^{-1}(E+F)$ est appelée **matrice de Jacobi**.

L'algorithme de Jacobi

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j\neq i, j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad \forall i = 1, \dots \dots, n. \end{cases}$$

Cet algorithme nécessite $a_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$

Explicitement, on obtient :

$$a_{11}x_1^{(k+1)} = -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1$$

$$a_{22}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}x_n^{(k+1)} = -a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n$$

Méthode de Jacobi

Test de convergence

La méthode ne converge pas toujours. On démontre que **si est une matrice définie positive**, la méthode itérative converge. **De même**, si est une matrice diagonalement dominante, c'est-à-dire si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (1.4)$$

alors la méthode de Jacobi converge.

Par conséquent, on peut avoir intérêt à réarranger les termes de de façon à mettre sous la forme d'une matrice dont les éléments diagonaux sont les plus grands possibles.

Quand est ce que la Matrice est Définie + ??????????????

Exemple

- Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ une matrice symétrique de taille 2×2.

  A est définie positive si ses valeurs propres sont strictement positives.

  Les valeurs propres de A sont strictement positives :

  1. Si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$
  2. Si et seulement si les pivots sont positifs : $a > 0$ et $\frac{ac-b^2}{a} > 0$

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Méthode de Gauss-Seidel

Comme pour la méthode de Jacobi, on suppose que A est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul $(a_{ii} \neq 0, \ \forall i)$.

Cette méthode consiste à isoler le coefficient de la diagonale **de chaque ligne du système**, si l'un des coefficients diagonaux est nul, **il est parfois possible de permuter certaines lignes pour éviter cette situation.**

On considère un système linéaire suivant :

$$Ax = b, \text{ avec } A \text{ inversible.}$$

On suppose:

$$A = M - N, \ \text{avec} \ M = D - E \ \ et \ \ N = F \ ; \ \text{avec } (D-E) \text{inversible}$$

Le schéma itératif s'écrit alors :

$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1} F x^k + (D-E)^{-1} b$$

avec $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ (vecteur de départ).

La matrice $\boxed{B_{GS}(D-E)^{-1}F}$ est appelée matrice de Gauss-Seidel. A chaque pas, on calcule

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \tag{1.5}$$

L'algorithme de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \displaystyle\sum_{j<1}^{i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad \forall i = 1, \dots \dots, n. \end{cases}$$

Cet algorithme nécessite $a_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$

Explicitement, on obtient :

$$a_{11}x_1^{(k+1)} = -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1$$

$$a_{22}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -a_{i1}x_1^{(k+1)} - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} \dots - a_{in}x_n^{(k)} + b_n$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}x_n^{(k+1)} = -a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n$$

Test d'arrêt

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon \text{ pour un } \varepsilon \text{ donné.}$$

Exemple

b) Erreurs absolues

Soit « x » un nombre réel, et x^* une approximation de nombre x, l'erreur absolue est définie par :

$$\boxed{\Delta x = |x - x^*|}$$

c) Erreurs relative

L'erreur relative est définie par :

$$\boxed{E_r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|}}$$

De plus, en multipliant par 100, on aura l'erreur relative en pourcentage :

$$\boxed{E_{r\%}(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} \times 100}$$

Exemple d'Application

Exercice 1 :

Résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases} ; \quad \varepsilon = 10^{-5} \text{ et } \quad x^{(0)} = (0{,}0{,}0)^T$$

-à l'aide de :

- la méthode de Jacobi

-Et La méthode de Gauss-Seidel

Calculer les 3 premières itérations

Solution :

On a le système suivant:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases} ; \quad \varepsilon = 10^{-5} \text{ et } \quad x^{(0)} = (0,0,0)^T$$

-Vérification de test de convergence

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad (1.4)$$

Un volontaire au tableau!!?

Méthode de Jacobi:

On a:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

Solution :

1- La méthode de Jacobi:

Un volontaire au tableau!!?

Solution :

1- La méthode de Jacobi:

On a:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 - 2(0) - (0)) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(9 - 2(0) - 0) = 9/4 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = (1,1,9/4)^T$$

Continuer pour l'itération 2 et 3

Solution :

2- La méthode de Gauss-Seidel:

On a:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(k+1)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Itération (1) $(pour\ k = 0)$

En partant de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(1)}\right) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 - 2(0) - (0)) = 1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(2 + 1) = 3/2 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(9 - 2(1) - 3/2) = 11/8 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right)^T \cong (1, 1.5000, 1.3750)$$

Solution :

***La méthode de Gauss-Seidel*:**

Itération (2) $(pour\ k = 1)$

En partant de $x^{(1)} = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{8})^T$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(2)}\right) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(2)} - x_2^{(2)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{11}{8}\right)\right) = \frac{-3}{32} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{-3}{32}\right) = \frac{61}{64} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2\left(\frac{-3}{32}\right) - \frac{61}{64}\right) = \frac{527}{256} \end{cases}$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{-3}{32}, \frac{61}{64}, \frac{527}{256}\right)^T \cong (-0.0937, 0.9521, 2.0585)$$

Test d'arrêt:

$$\left| x^{(2)} - x^{(1)} \right| > \varepsilon = 10^{-5} \text{ on continue}$$

Solution :

La méthode de Gauss-Seidel:

Itération (3) $(pour\ k = 2)$

En partant de $x^{(2)} = (\frac{-3}{32}, \frac{61}{64}, \frac{527}{256})^T$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}\right) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + x_1^{(3)}\right) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2x_1^{(3)} - x_2^{(3)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2\left(\frac{61}{64}\right) - \left(\frac{527}{256}\right)\right) = \frac{9}{1024} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{9}{1024}\right) = \frac{2057}{2048} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(9 - 2\left(\frac{9}{1024}\right) - \left(\frac{2057}{2048}\right)\right) = \frac{16339}{8192} \end{cases}$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{9}{1024}, \frac{2057}{2048}, \frac{16339}{8192}\right)^T \cong (0.0087, 1.0043, 1.9945)$$

Test d'arrêt:

$$\left| x^{(3)} - x^{(2)} \right| > \varepsilon = 10^{-5}$$ ***Normalement on continue!!***

A résoudre avec un algorithme à l'aide du logiciel MTALAB (durant le TP)

Solution :

***La méthode de Gauss-Seidel*:**

D'après les résultats obtenues à partir de l'itération:

$$x^{(3)} = \left(\frac{9}{1024}, \frac{2057}{2048}, \frac{16339}{8192}\right)^T \cong (0.0087, 1.0043, 1.9945)$$

La solution exacte converge vers quelles valeurs!???

La suite $x^{(3)}$ converge vers la solution du système $x = (0, 1, 2)$

RESOLUTION DES SYSTEMES D’EQUATIONS NON LINEAIRES

4-Résolution des systèmes d'équations non linéaires

Nous abordons dans ce 4ème chapitre la résolution des systèmes d'´equations non linéaires. Plus précisément, nous considérons le problème suivant :

$$\text{pour } \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ trouver } \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad \textbf{(4.1)}$$

En utilisant:

- **La méthode de Newton Raphson.**

4 - Résolution des systèmes d'équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton(ou Newton-Raphson) consiste à prendre pour x_{k+1} la racine du développement de Taylor de premier ordre autour de $x^{(k)}$;cela revient, pour autant que $f'(x^{(k)}) \neq 0$, à déterminer $x^{(k+1)}$ qui satisfait :

$$f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = 0$$

Et donc

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}}$$

Algorithme de Newton

(entrée : $f, f', x^{(0)}$, Sortie : $x^{(k+1)}$)
Répéter jusqu'à l'arrêt
Pour autant que $\boldsymbol{f'\left(x^{(k)}\right) \neq 0}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\boldsymbol{f}\left(x^{(k)}\right)}{\boldsymbol{f'}\left(x^{(k)}\right)}$$

4 - Résolution des systèmes d'équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

Critère de convergence

Soit une fonction f définie sur $[a, b]$ telle que :

i. $f(a)f(b) < 0$

ii. $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

Critère d'arrêt

En général, pour toutes les méthodes étudiées, on peut utiliser deux critères d'arrêt différents : les itérations s'achèvent dès que :

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \quad \text{(Contrôle de l'incrément)}$$

4 - Résolution des systèmes d'équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

Remarque

Dans le cas d'un système de deux équations non linéaires à 2 inconnues, par exemple :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Newton-Raphson devient :

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ f_2(x_1^k, x_2^k) \end{pmatrix}$$

- La suite de cours **06/02/2021**

4 - Résolution des systèmes d'équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

Exemple

Trouver la première racine de l'équation:

$$f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$$

qui appartient à **[0.1, 0.5] avec une précision ε=0.0001.**

Solution

a) vérifier la première condition de convergence:
f(a)*f(b) <0?:

b) calculer la dérivée première et seconde de ***f et vérifier la conditions de convergence.***

4 - Résolution des systèmes d'équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

Exemple

Trouver la première racine de l'équation: $f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$

qui appartient à **[0.1, 0.5] avec une précision ε=0.0001.**

Solution

a) Conditions 1 vérifiée.

b) On calcule la dérivée première et seconde de ***f et on vérifie les conditions de convergence.***

On a $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$

qui est strictement décroissante et positive sur l'intervalle donné.

$$f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2, \quad f''(x) < 0$$

La condition de convergence est vérifiée

4 - Résolution des systèmes d'équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

Exemple

Trouver la première racine de l'équation: $f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$

qui appartient à **[0.1, 0.5] avec une précision ε=0.0001.**

Solution

On écrit donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - {x_n}^2 + 2}{\frac{1}{x_n} - 2x_n}, \quad (n=0,1,2,\ldots..).$$

Commençons *x 0 = 0.3 le milieu de l'intervalle initial donné :*

$$n = 0, \qquad x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0) - {x_0}^2 + 2}{\frac{1}{x_0} - 2x_0} = 0.0417$$

4 - Résolution des systèmes d’équations non linéaires

4.2 Méthode de Newton

Solution de l’exemple

On calcule	$\|x_1 - x_0\| > \varepsilon$;
On continue	$\boldsymbol{n} = \mathbf{1},\ \boldsymbol{x_2} = 0.0910.$
On calcule	$\|x_2 - x_1\| => \varepsilon$
On continue	$\boldsymbol{n} = \mathbf{2},\ \boldsymbol{x_3} = 0.1285.$
On calcule	$\|x_3 - x_2\| > \varepsilon$;
On continue	$\boldsymbol{n} = \mathbf{3},\ \boldsymbol{x_4} = 0.1376.$
On calcule	$\|x_4 - x_3\| => \varepsilon$
On continue	$\boldsymbol{n} = \mathbf{4},\ \boldsymbol{x_5} = 0.1379.$
On calcule	$\|x_5 - x_4\| => \varepsilon$

On continue:

$\boldsymbol{n} = \mathbf{5},\ \boldsymbol{x_6} = \mathbf{0.1379}.$ **La solution est** $\boldsymbol{x_4} = \mathbf{0.1379}$

Résolution des équations différentielles ordinaires (EDO)

Résolution des équations différentielles ordinaires

6.1 Equations différentielles ordinaires

De **nombreux modèles** **s'expriment** au moyen **d'équations différentielles ordinaires** (en abrégé EDO). **L'adjectif ordinaire** est surtout là pour **faire la distinction** entre les **EDO** et les **EDP** (équations aux dérivées partielles).**Si toutes les dérivées** sont **prises par rapport** à **une seule variable**, **on parle d'équation différentielle ordinaire** (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP).

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle $t \in I, I$ intervalle réel une fonction inconnu $t \to x(t)$ et ses dérivées par rapport à t définie par :

$$F\left(t, x, x'', \dots, x^{(n)}\right) = 0 \qquad (6.1)$$

Une fonction **x** qui vérifie l'équation (6.1) s'appelle solution de l'EDO.

Résolution des équations différentielles ordinaires

6.1 Equations différentielles ordinaires

Exemple1

Les équations suivantes :

$$y'(t) - t = 0$$
$$y''(t) - y(t) = 0$$

Sont des équations différentielles ordinaires.

Exemple2: L'EDO d'ordre 2 la plus célèbre est la deuxième ***loi de Newton*** :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

qui décrit per exemple la dynamique d'un point matérielle soumis à la résultante des forces.

On peut réécrire la loi de Newton sous la forme d'un système d'´équations différentielles, en posant

$$v = \frac{dx}{dt}$$

On obtient alors le système du premier ordre autonome :

$$\begin{cases} v = \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}F(x) \end{cases}$$

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

La **méthode d'Euler** est une procédure numérique qui **permet de résoudre de façon approximative des équations différentielles ordinaires du premier ordre avec condition initiale.** Elle a le **mérite d'être simple à comprendre et à programmer.**

On cherche donc une solution approchée d'une équation ordinaire se mettant sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad 0 \leq t \leq T \\ t(0) = t_0,\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (6.2)$$

Avec une durée bien déterminée dans e temps.

Soit à intégrer numériquement le **problème de Cauchy** (6.2), et **soit** $y(t_k)$ la **valeur exacte de la solution** de ce problème à l'abscisse (t_k).
Une **méthode d'analyse numérique** pour **intégrer** cette équation différentielle consistera à **fournir des approximations** y_k **de** $y(t_k)$ **pour** $k = 0, \ldots, N-1$**, N: entier donné.**

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

On peut intégrer cette équation comme suit :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt \qquad (6.2)$$

La méthode d'Euler consiste à approcher l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt \cong h \times f(t_k, y(t_k))$$

D'où le ***schéma itératif*** suivant

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{h\,:\,\text{Taille de pas}} f(t_k, y_k)}$$

Donc

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \\ y_0 = y(0), \qquad k = 0,1, \dots, n \end{cases} \qquad (6.3)$$

Où y_k désigne l'approximation numérique de $y(t_k)$.

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler (suite)

Algorithme d'Euler

1. Initialisation du pas h et de la durée T.
2. Initialisation des conditions initiales : $t = 0$ et $y = y(0)$.
3. Tant que $t \leq T$ faire :
   (a) Calcul de $k_1 = f(t, y)$.
   (b) $y = y + hk_1$; $t = t + h$.
   (c) Enregistrement des données.

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Exemple

Pour le problème de valeur initiale suivant:

$$\begin{cases} y' + 2y = 2 - e^{-4t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. vérifier que la solution analytique est:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

2. Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0{,}1$ ***pour trouver les valeurs approximatives de la solution*** à $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 \; et \; 0.5.$

3. Comparez-les aux valeurs exactes de la solution à ces points.

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Solution

1. La solution analytique $y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ est la solution de L'équation différentielle.

$$\begin{cases} y' + 2y = 2 - e^{-4t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

De cela nous pouvons constater que :

$f(t, y) = ?$ $\qquad$ $f(t, y) = y' = 2 - e^{-4t} - 2y$

Notez également que: $t_0 = 0$ et $y_0 = y(0) = 1.$

Nous pouvons maintenant commencer à faire des calculs.
On a :

$$y_{k+1} = y_k + h \times f(t_k, y_k)$$

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Solution (suite 1)

Pour k=0 ?!! **(un volontaire pour le calcul de la 1ère itération)**

Pour $k = 0$

$$y_1 = y_0 + h \times f(t_0, y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1 f(0,1)$$

$$f_0 = f(0,1) = 2 - e^{-4(0)} - 2(1) = -1$$

$$\Rightarrow y_1 = 0.9$$

Donc, l'approximation de la solution à $t_1 = 0.1$ est $y_1 = 0.9$.

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Solution (suite 2)

Pour $k = 1$

$$y_2 = y_1 + h \times f(t_1, y_1) \Rightarrow \; y_1 = 1 + 0.1f(0.1{,}0.9)$$

$$f_1 = f(0.1{,}0.9) = 2 - e^{-4(0.1)} - 2(0.9) = -0.4703$$

$$\Rightarrow \; y_2 = 0.9 + (0.1)(-0.4703) = 0.85297$$

Donc, l'approximation de la solution à $t_2 = 0.2$ est $y_2 = 0.85297.$

Je vous laisse le soin de vérifier le reste de ces calculs pour k=2, 3 et 4.

$f_2 = -0.1553$	$y_3 = 0.8374$
$f_3 = 0.02392$	$y_4 = 0.8398$
$f_4 = 0.11843$	$y_5 = 0.8517$

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Solution (suite 3)

Le tableau (6.1) donne **les approximations** **ainsi** que **la valeur exacte** des **solutions** aux points donnés. Nous avons également **inclus l'erreur en pourcentage.** Il est souvent plus facile de voir à quel point une approximation est efficace si vous examinez les pourcentages. **La formule pour cela est,**

$$Erreur\ (\%) = \frac{|valeur\ exacte - valeur\ approxim\acute{e}e|}{valeur\ exacte} \times 100$$

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Solution (suite 4)

Tableau 6.1 Approximations et valeur exacte des solutions aux points donnés

Temps t_k	*Approximation*	*Exacte*	*Erreur*
$t_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y(0) = 1$	0%
$t_1 = 0.1$	$y_1 = 0.9$	$y(0.1) = 0.9258$	2.79%
$t_2 = 0.2$	$y_2 = 0.8529$	$y(0.2) = 0.8895$	4.11%
$t_3 = 0.3$	$y_3 = 0.8374$	$y(0.3) = 0.8762$	**4.42%**
$t_4 = 0.4$	$y_4 = 0.8398$	$y(0.4) = 0.8763$	4.16%
$t_5 = 0.5$	$y_5 = 0.8517$	$y(0.5) = 0.8837$	3.63%

D'après le tableau (6.1), l'erreur maximale dans les approximations du dernier exemple était de **4,42%,** ce qui **n'est pas si mal**, mais qui **n'est pas non plus une si grande approximation**. **Ce type d'erreur** est cependant **généralement inacceptable dans la plupart des applications réelles**. **Alors**

Comment pouvons-nous obtenir de meilleures approximations?

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.1 Méthode d'Euler

Solution (suite 5)

Rappelons que nous obtenons **les approximations en utilisant une ligne tangente pour approximer la valeur de la solution** et que nous avançons dans le temps par pas de **Donc**, **si nous voulons une approximation plus précise**, il semble alors **qu'il existe** **une seule façon d'obtenir une meilleure approximation** c'est de **ne pas avancer autant à chaque étape**. **En d'autres termes, il faudrait prendre des** **h plus petits**.

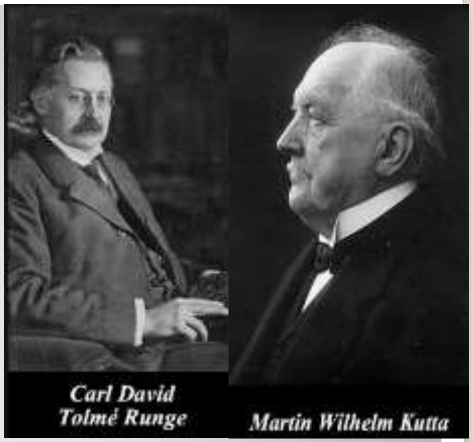
Remarque

- ***La diminution de la taille de pas h améliore la précision de l'approximation.***
- ***La diminution d'un facteur 10 la taille du pas h, réduit l'erreur d'un facteur de 10 environ.***

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.2 Méthode de Runge-Kutta



Permet de résoudre les équations différentielles ordinaires.

Elles font parties des méthodes les plus populaires de par leur facilité de mise en œuvre et leur précision. C'est ***Carle Runge*** et ***Martin Kutta*** qui, au début du 20e siècle, ont inventé ces méthodes.

À l'instar de la ***méthode d'Euler***, celle de ***Runge-Kutta*** sont des schémas numériques à un pas **basée** sur la **discrétisation** de la variable ***t*** .

On note: ***h*** ce pas et y_k la valeur approchée de $y(t_k)$ pour les différents instants $t_k = kh.$

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.2 Méthode de Runge-Kutta

En intégrant l'équation différentielle entre t_k et $t_k + h$ on a la relation :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_k+h} f(t, y(t))dt \quad (1.13)$$

L'idée consiste à approcher

de façon **plus précise** que ne le fait la méthode d'Euler.

On cherche donc une solution approchée d'une équation ordinaire se mettant sous la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) & 0 \leq t \leq T \\ t(0) = t_0, & y(0) = y_0 \end{cases}$$

6.2.2 Méthode de Runge-Kutta

a) Runge-Kutta d'ordre 2 : RK2

Le schéma itératif de **Runge-Kutta** d'ordre 2 est :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \\ t_{k+1} = t_k + h\,; \qquad k = 0, \ldots, N-1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + h, y_k + hk_1) \end{cases}$$

b) Runge-Kutta d'ordre 4 : RK4

Dans la pratique on utilise la méthode plus performante de ***Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4),***

Le schéma itératif de ***Runge-Kutta*** d'ordre 4 est :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ t_{k+1} = t_k + h \quad , k = 0, \ldots, N-1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3) \end{cases} \quad (1.14)$$

Exemple (Exercice 1 de TD 2)

On considère des équations différentielles suivantes :

$$(a)\ \frac{dy}{dt} = e^t y(t) \quad ; \qquad (y(0) = 2)$$

Utilisez la **méthode d'Euler**, puis la **méthode de Runge-Kutta** avec un pas de $h = 0{,}1$ pour trouver les valeurs approximatives de la solution à $t = 0.1, 0.2, 0.3.$

Solution

On a : $y'(t) = y(t)e^t,\ y(0)$ et $h = 0{,}1.$ on a également que $t_0 = 0\,, y_0 = 2$

Comme: $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ **Alors** $f(t_k, y_k) = ?$ **Donc**: $\boxed{f(t_k, y_k) = y_k e^{t_k}.}$

On a le ***schéma itératif d'Euler***

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \\ y_0 = y(0), \qquad k = 0,1,\dots,n \end{cases} \qquad (6.3)$$

On trouve

$$\textbf{Euler :}\quad \begin{aligned} y_1 &= 2{,}2 \\ y_2 &= 2{,}443\,1376 \\ y_3 &= 2{,}741\,543 \end{aligned}$$

Exemple (Exercice 1 de TD 2)

On considère des équations différentielles suivantes :

$$\text{(a)}\ \frac{dy}{dt} = e^t y(t) \quad ; \qquad (y(0) = 2)$$

$h = 0{,}1$

$t = 0.1, 0.2, 0.3.$

Solution (avec la méthode de Runge-Kutta)

Le schéma itératif de ***Runge-Kutta*** d'ordre 4 est :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \\ t_{k+1} = t_k + h \quad , k = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f(t_k, y_k) \\ k_2 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3) \end{cases} \quad (1.14)$$

1ère Itération:

$k_1 = 0{,}2 \quad k_2 = 0{,}220\,767 \quad k_3 = 0{,}221\,859 \quad k_4 = 0{,}245\,553$

$y_2 = 2{,}221\,8007$

2ème Itération:

$k_1 = 0{,}245\,547 \quad k_2 = 0{,}272401 \quad k_3 = 0{,}273961 \quad k_4 = 0{,}304833$

$y_2 = 2{,}495651$

3ème Itération:

$k_1 = 0{,}304820 \quad k_2 = 0{,}340\,018 \quad k_3 = 0{,}342\,278 \quad k_4 = 0{,}383\,080$

$y_2 = 2{,}837\,7328$

6.2 Méthodes de résolution

6.2.3 Méthode de d'Adams-Bashforth

La méthode **d'Adams- Bashforth** est une méthode à pas multiples qui repose sur une approximation de l'intégrale suivant :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

Les schémas itératifs de la méthode d'Adams-Bashforth:

On note en abrégé $f_k = f(t_k, y_k)$. Voici trois schémas :

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 2 à 2 pas ($AB2$):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(3f_k - f_{k-1}\right) \quad (1.15)$$

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 3 à 3 pas($AB3$) :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right) \quad (1.16)$$

- schéma explicite d'Adams-Bashforth d'ordre 4 à 4 pas ($AB4$):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right) \quad (1.17)$$

6 – Résolution des équations différentielles ordinaires

6.2 Méthodes de résolution

6.2.4 Méthode d'Adams- Moulton (AM)

Cette méthode est l'une des méthodes fermées, son algorithme est :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}^{(i)})\right)(1.18)$$

Avec $y_{k+1}^{(i)}$ est donnée pour $i = 0,1,2,\ldots$

$y_{k+1}^{(0)}$ est dite **le prédicteur** de y_{k+1}, les $y_{k+1}^{(i)}$ sont appelés **les correcteurs**, pour les calculés, on utilise la méthode d'Euler comme prédicteur et la méthode d'Adams-Moulton comme **correcteur**. On obtient :

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(i)} = y_k + hf(t_k, y_k) & \textit{Prédiction} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}^{(i)})\right) & \textit{Correction} \end{cases} \quad (1.19)$$

Suite de cours 13-12-2021

Chapitre II
Equations aux Dérivées Partielles

Equations aux Dérivées Partielles

Introduction

Les **Equations aux Dérivées Partielles (EDP)** interviennent dans la description de très nombreux problèmes de **l'électronique**, **physique**, **chimie**, **sciences de la terre**, **biologie**...etc.
Elles **sont primordiales** dans des domaines tels que **la simulation aéronautique**, la **synthèse d'images**, la **prévision météorologique**, la **démographie**, **ou les finances** (équation de Black-Scholes).

Les équations les plus importantes de **la relativité générale**, de **la mécanique** quantique(**équation de Schrödinger**), **d'électromagnétisme** (**équations de Maxwell**), et de **la mécanique des fluides** (**équation de Navier-Stokes**), sont également des EDP.

Equations aux Dérivées Partielles

Introduction

Une équation différentielle aux dérivées partielles, est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, les variables $(x, y, \ldots,) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles, qu'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(x, y, \ldots . u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{yy}, \ldots ..\right) = 0$$

Exemples

- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ qui admet comme solutions : $u(x,y) = 2x + y^2$, $u(x,y) = e^{-x}\sin(y)$.....
- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ qui admet comme solutions : $u(x,y) = (x+y)^3$, $u(x,y) = \sin(x-y)$.....

2-2 Généralités sur les EDP

Définition 1

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est **l'ordre de la dérivée partielle** **le plus élevé** **intervenant dans l'équation.**

Exemple

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1er Ordre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2ème Ordre

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$$

1er Ordre

2-2 Généralités sur les EDP

Définition 2

Si ***u*** et **ses dérivées partielles** apparaissent séparément **et** "***à la puissance 1***" dans l'EDP, **celle-ci** est dite **linéaire. Si on multiplie** par une fonction **qui dépend elle-même de la solution**, **celle-ci** est dite **non linéaire.**

Exemple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

EDP Linéaire

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$$

EDP Non Linéaire

$$u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = y$$

EDP Non Linéaire

2-2 Généralités sur les EDP

Définition 3

Une équation aux dérivées partielles est dite **homogène** si elle est vérifiée pour ***u=0*** (tous les termes de l'équation contiennent la fonction ***u*** ou l'une de ses dérivées partielles).

2.3 EDP du 1er ordre

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du 1er ordre est :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = D(x,y) \qquad (2.2)$$

Où $A, B, C\ et\ D$ sont des fonctions.

EDP du 2ème ordre

Une EDP linéaire du 2ème ordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \qquad (2.3)$$

Les trois premiers termes correspondent à la **partie principale**. $a, b, c, d, e, f\ et\ g$ sont des constantes. Le type de l'EDP dépend du signe de $b^2 - 4ac$.

❑ *Classification des EDPs*

- $Si\ b^2 - 4ac > 0$, alors l'EDP est dite **hyperbolique.**
- $Si\ b^2 - 4ac = 0$, alors l'EDP est dite **parabolique.**
- $Si\ b^2 - 4ac < 0$, alors l'EDP est dite **elliptique.**

Exemple:

Les EDPs suivantes sont elles hyperbolique, parabolique ou elliptiques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ avec\ c > 0.$$

Equation des ondes

$b^2 - 4ac = 4c^2 > 0$.Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ avec\ d > 0.$$

Equation de la diffusion

$b^2 - 4ac = 4c^2 = 0$.Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad avec\ c > 0.$$

Equation de Laplace

$b^2 - 4ac = -4 < 0$.Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

Méthodes de résolution

Les méthodes numériques **ne donnent pas la solution véritable du problème que l'on cherche à résoudre.**

Des méthodes numériques **mal utilisées peuvent conduire à des résultats totalement faux.**

Le **but** est de savoir **comment calculer explicitement une solution approchée qui soit facilement calculable** tout en ayant une idée assez précise **de l'erreur commise par rapport à la solution exacte?**

Plusieurs méthodes existent pour cet approche citons

- la **méthode des différences finies**
- la **méthode des éléments finis**
- **La méthode de Galerkin(Ritz)**,
- ..etc.

Méthodes de résolution

Méthode des différences finies (MDF)

La **méthode MDF** <u>est très classique</u>, <u>simple à mettre en œuvre</u> et **convient pour beaucoup de problèmes rencontrés en pratique**. Les calculs sont effectués suivant un **maillage** obtenu ***par un double réseau de parallèles aux axes*** et ***régulièrement espacées.***

Elle **<u>repose</u>** sur **deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation** ou **différentiation** **<u>et</u>** **la convergence du schéma numérique ainsi obtenu.**

<u>Son inconvénient</u>

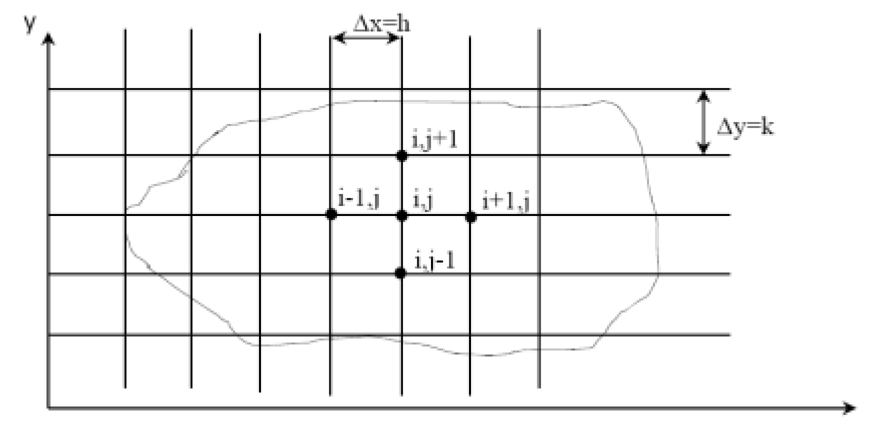
est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Méthodes de résolution

Méthode des différences finies (MDF)

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème

nous devons approcher les dérivées partielles de l'E.D.P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) <u>en utilisant</u> les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et **aux nœuds avoisinants**.



Maillage

Méthodes de résolution

Méthode des différences finies (MDF)

L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud M de coordonnées (x_M, y_M).

Si les parallèles à l'axe x sont espacées de $\Delta x = h$ et les parallèles à l'axe $y$de $\Delta y = k$, le noeud acomme coordonnées :

$$x_M = i\Delta x = ih \ \ \textbf{et} \ y = j\Delta y = jh$$

Ou d'une manière condensée (i, j).
Ainsi la fonction $u(x, y)$prend au point $\mathrm{M}(x_M, y_m)$ la valeur $u(i\Delta x, j\Delta y) = u(ih, jh) = u_{i,j}$

Reamrque1: A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ *au point* (x_i, y_j) *nous avons besoin de connaitre les points* $u_{i-1,j}, u_{i,j-1}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i,j+1}$.
Reamrque2: Si $\Delta x = \Delta y$le *maillage* est dit *régulier* sinon il est *irrégulier*.

Méthodes de résolution

Méthode des différences finies (MDF)

Expressions discrètes de la première et deuxième dérivée

La méthode des différences finies pour la résolution des problèmes aux limites remplace chaque dérivée dans l'équation différentielle aux dérivées partielles par une approximation appropriée en termes de rapport aux différences.

a) Première dérivée

- Différence en avant : $u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} + \theta(h) = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$
- Différence en arrière : $u'(x_i) = \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h} + \theta(h) = \frac{u_i-u_{i-1}}{h}$
- Différence centrée : $u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} + \theta(h^2) = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$

b)Deuxième dérivée:

dans le cas d'une différence centrée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{h^2}$$

Chapitre III
Techniques d'optimisation

Techniques d'optimisation

Introduction

L'optimisation numérique est **une branche des mathématiques** permettant de **choisir automatiquement la meilleure solution** parmi **un ensemble de solutions possibles.** **Les applications** **possibles couvrent des domaines variés de la recherche opérationnelle aux statistiques et bien sûr l'industrie.**

Résoudre un problème d'optimisation numérique **signifie trouver les meilleurs paramètres** (ou variables de contrôle) résolvant le problème à minimiser (ou à maximiser) une quantité mathématique donnée, **appelée fonction objectif (ou critère**). Cette fonction objectif peut **être sujetté à des contraintes (conditions).**

Définition et formulation : problèmes d'optimisation

Définition et formulation : problèmes d'optimisation

Modélisation

Exemple :Problème de production :

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700Kg de Lait et 300 de sucre. La vente de 1Kg de yaourts A et B rapporte 200 Da et 300Da respectivement et . Le fabricant cherche `a maximiser son profit.

Modélisation

Sur quelles quantités peut-on travailler ?

Variables : xA et xB •

Que cherche-t-on à optimiser ? **Le profit z Calculé à partir de xA et xB**

On parle de fonction objectif : $z = 4xA + 5xB$

Définition et formulation : problèmes d'optimisation

Modélisation (suite)

Quelles sont les contraintes du problème ?

Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles

- la quantité utilisée dépend de la production : 2xA + xB
- $2xA + xB \leq 800$

Deuxième contrainte : 700 Kg de lait disponibles

- la quantité utilisée dépend de la production : xA + 2xB
- $xA + 2xB \leq 700$

Troisième contrainte : 300 Kg de sucre disponibles

- la quantité utilisée dépend de la production : xB
- $xB \leq 300$

Dans le problème linéaire (PL) à résoudre sera :

$$\begin{array}{rrl}
\max 4x_A + & 5x_B & \\
2x_A + & x_B & \leq 800 \\
x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & x_B & \leq 300 \\
x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}$$

Techniques d’optimisation

Programmation linéaire (PL)

PL est l’un des outils les plus puissants et les plus utilisés en applications « industrielles » parmi les technologies d’aide à la décision

- ❑ Planification de la production
- ❑ Répartition des ressources
- ❑ Choix de produits à fabriquer
- ❑ Planification d’investissements
- ❑ Planification des acheminements
- ❑ Logistique
- ❑ Distribution
- ❑ Affectation et gestion du personnel
- ❑ Gestion de projet, …

Techniques d’optimisation

Programmation linéaire (PL)

La méthode du simplexe est la première méthodologie proposée par (George B. Dantzig – 1949) :

- ❑ Facile à résoudre;
- ❑ Permet de traiter de façon systématique des problèmes complexes où plusieurs activités sont en compétition pour des ressources limitées et un objectif global (maximisation des profits, minimisation des coûts, ...) est recherché.

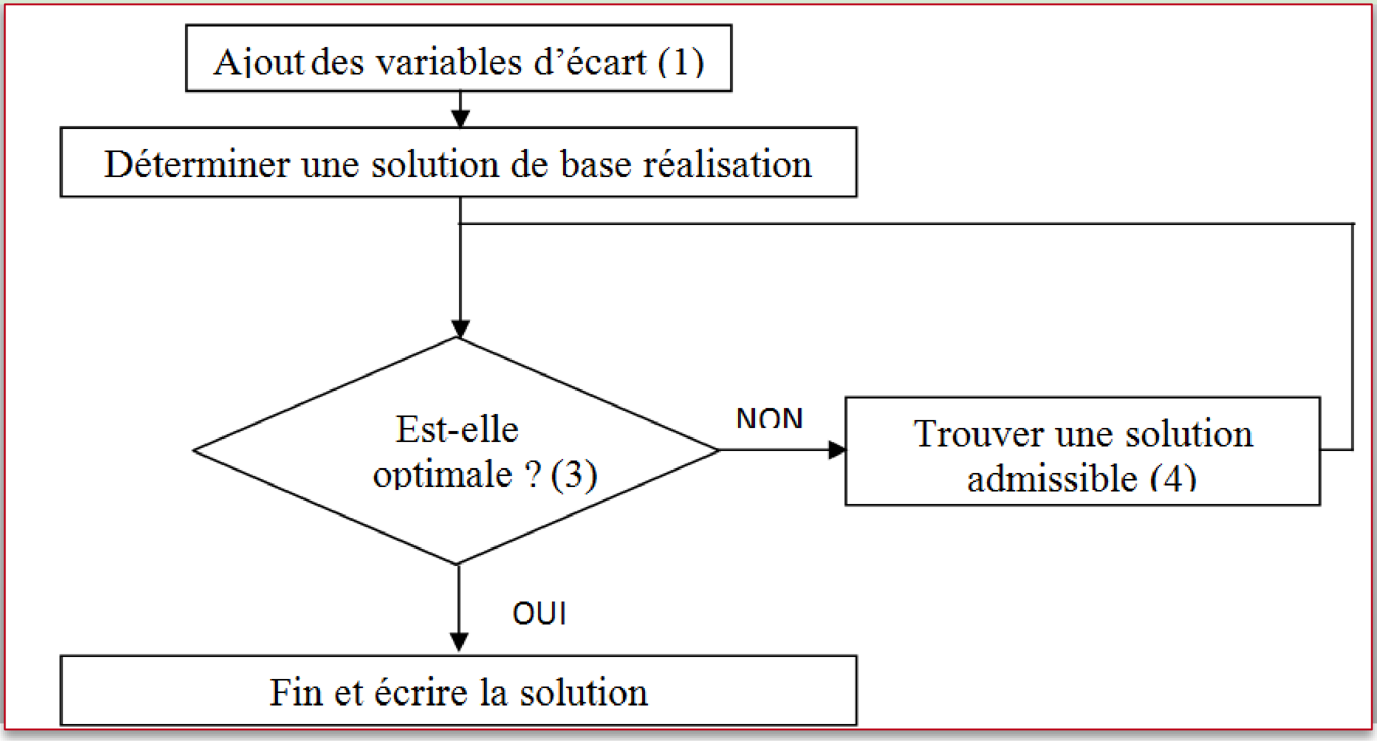
La PL est un outil qui permet de :

- ❑modéliser
- ❑résoudre toute une classe de problèmes d’optimisation.

Techniques d'optimisation

Algorithme du simplexe (avec contrainte)

L'algorithme du simplexe est un algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig en 1947. Cet algorithme est donné par :



Algorithme du simplexe (avec contrainte)

L'étape (4) est composée de :

- Tableau de la solution,
- Variable entrante (colonne pivot : plus basse entre les négatifs),
- Variable sortante (ligne pivot : positif),
- Mise à jour du tableau,
- Critère de sortie.

Exemple

Soit problème linéaire suivant (EMD Janvier 2021) :

$$Max\ F = x_1 + 2x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 21 \\ -x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Résoudre moyennant la méthode du Simplexe.

Algorithme du simplexe (Exemple corrigé

1) **Ajout des variables d'écart : on ajoute deux variables** (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + e_1 = 21 \\ -x_1 + 3x_2 + e_2 = 18 \\ x_1 - x_2 + e_3 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

0,75

2,20

2) **La solution de base réalisable** : généralement on prend $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$.
Donc $e_1 = 21$, $e_2 = 18$ et $F = 0$. La solution est-elle **optimale** ? NON. On cherche à maximiser F est nous, nous avons un minimum.

3) Tableaux de la solution

3.1) Première itération

7,0

3.2) Variable entrante (V.e)

V.e : $max(coéf(F)) = 2 \Rightarrow x_2$ est la $v.e$

3.3) Variable sortante (V.s)

V.s : $\min_{\geq 0} K = 6 \Rightarrow e_2$ est la $v.s.$ - $Pivot = C_p \cap L_p = 3$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	$K = C/C_p$
e_1	1	3	1	0	0	21	$21/3 = 7$
e_2	-1	3	0	1	0	18	$18/3 = 6$ ← L_p
e_3	1	-1	0	0	1	5	$-5/1 = -5$
F	1	2	0	0	0	0	

↑ C_p

0,5

Algorithme du simplexe (Exemple corrigé

3.4) Mise à jours du tableau

-**V.e :** $max(coéf(F)) = 5/3 \Rightarrow$
x_1 *est la v.e*
-**V.s :** $\min_{\geq 0} K = 3/2 \Rightarrow e_1$ *est la v.s*
-*Pivot* $= 2$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	$K = C/C_p$	
e_1	2	0	1	-1	0	3	3/2	$L_1 = L_1 - L_p$
x_2	-1/3	1	0	1/3	0	6	6/(-1/3)	$\frac{L_p}{p}$
e_3	2/3	0	0	1/3	1	11	11/(2/3)	$L_3 = L_3 + (1/3)L_p$
F	5/3	0	0	-2/3	0	-12		$L_4 = L_4 - (2/3)L_p$

L_p

C_p

0,1

Est-ce que c'est une solution optimale !!? **Non**, car les coéf de F ne sont pas tous négatifs, **Donc on continu !**

0,25

Algorithme du simplexe (Exemple corrigé

3.5) Mise à jours du tableau

01

-V.e : $max(coéf(F)) = 1/6 \Rightarrow$

e_2 est la v.e

-V.s : $\min_{\geq 0} K = 15 \Rightarrow e_3$ est la v.s

Pivot = 2/3

0,75

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	$K = C/C_p$	
x_1	1	0	1/2	-1/2	0	3/2	-3	$\frac{L_p}{P}$
x_2	0	1	1/6	1/6	0	13/2	39	$L_2 = L_2 + (1/6)L_p$
e_3	0	0	-1/3	2/3	1	10	15	$L_3 = L_3 - (1/3)L_p$
F	0	0	-5/6	1/6	0	-29/2		$L_4 = L_4 - (5/6)L_p$

C_p L_p

Est-ce que c'est une solution optimale !!? Non, car les coéf de F ne sont pas tous négatifs, Donc on continu !

Algorithme du simplexe (Exemple corrigé

3.6) Mise à jours du tableau

01

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	C	$K = C/C_p$	
x_1	1	0	1/4	0	3/4	9		$L_1 = L_1 + (3/4)L_p$
x_2	0	1	1/4	0	-1/4	4		$L_2 = L_2 - (1/4)L_p$
e_2	0	0	-1/2	1	3/2	15		$\longleftarrow \frac{L_p}{P}$
F	0	0	-3/4	0	-1/4	-17		$L_4 = L_4 - (1/4)L_p$

Est-ce que c'est une solution optimale !!? Oui, car tous les coéf de F sont négatifs, Donc les solutions optimales sont :

01

$$x_1^* = 9, \quad x_2^* = 4, \quad e_1^* = 0, \quad e_2^* = 15, \quad e_3^* = 0 \quad ET \quad F = 17$$

Techniques d'optimisation

Algorithme du gradient

L'algorithme du gradient à pas fixe est une méthode de descente utilisant un pas fixe et la stratégie de Cauchy pour le choix de la direction de descente :

```
GradFix(f, x0, pas, tolerance)
x ← x0
Tant que : ‖∇f(x)‖ > tolerance
    x ← x − pas ⋆ ∇f(x)
Retourner x
```

Etape1 : calcul de gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c^{(0)} = \nabla f(2{,}2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Exemple :EMD Janvier 2020) :

Méthode de gradient pour minimiser la fonction:

$$min f(x) = x_1^2 + 3x_2^2, \text{ point de départ } x_0 = (2{,}2)^T$$

Calcul de la première itération x_1 =?

Exemple :EMD Janvier 2020) :

Méthode de gradient pour minimiser la fonction:

$$minf(x) = x_1^2 + 3x_2^2, \text{ point de départ } x_0 = (2,2)^T$$

Calcul de la première itération x_1 =?

Solution

Etape1 : calcul de gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow c^{(0)} = \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Exemple :EMD Janvier 2020) : Méthode de gradient

Solution (suite)

Etape 2 : test d'arrêt

$\|c^{(0)}\| = \sqrt{4^2 + 12^2} \cong 12.65 \neq 0$ on continue **(0. 5pts)**

On pose $d_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ **(0. 5pts)**

Etape 3 :

Calcul de α qui minimise la $f(x_0 + \alpha d_0)$

On a :

$x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4\alpha \\ 2 - 12\alpha \end{pmatrix}$ **(0. 5pts)**

$f(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0) = f(2 - 4\alpha, 2 - 12\alpha) = (2 - 4\alpha)^2 + 3(2 - 12\alpha)^2$ **(0. 5pts)**

$$\Rightarrow f'(\alpha) = (-4)2(2 - 4\alpha) + 3(-12)2(2 - 12\alpha) = 23 \times (28\alpha - 5)$$

D'où $f'(\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{5}{28}$ **(0. 5pts)**

On a :

$$x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{28} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$x_1 = (1.2857, -01428)$$ **(1pts)**