|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M’SILAFACULTE DE TECHNOLOGIEDEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE**Module : Optimisation****Année d’étude : Master 1****Spécialité : Automatique et systèmes** |  logo-final-umbm  | **جامـــعــــة محمد بوضياف بالمسـيلــة****كــــلـيــة التكنولوجيا****قسم الهندسة الكهربائية****Année Universitaire : 2020/ 2021** |

**Corrigé type de l’examen de rattrapage**

**Exercice n°1 :** (09 points)soit la fonction f définie par :

f(x,y)= y3+2x2 y-6 x2 - 6 y2 + 2

1. points stationnaires de f :

 $∇f\left(x,y\right)=\left[\begin{matrix}\frac{∂f}{∂x}\\\frac{∂f}{∂y}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}4xy-12x\\3y^{2}+2x^{2}-12y\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}4x\left(y-3\right)\\3y\left(y-4\right)+2x^{2}\end{matrix}\right] $(0.5)

Pour trouver les points stationnaires, il faut résoudre le système d’équations suivant :

$\begin{matrix}4x\left(y-3\right)=0 (1)\\3y\left(y-4\right)+2x^{2} (2)\end{matrix} $(0.25)

L’équation (1) implique que : $x=0$ (0.25) ou $y-3=0$ (0.25)

Si $x=0$ à partir de l’équation (2) on a : $y=0$ (0.25) ou $y=4$ (0.25)

Si $y=3 $à partir de l’équation (2) on a : $2x^{2}-9=0$ (0.25) ceci implique que : $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ (0.25) ou $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ (0.25)

Les points stationnaires sont : (0,0), (0,4), ($\frac{3}{\sqrt{2}}$ ,3) et ($-\frac{3}{\sqrt{2}}, 3$) (1)

1. Nature des points critiques:

La Hessienne $∇^{2}f\left(x,y\right)=\left[\begin{matrix}\frac{∂^{2}f}{∂x^{2}}&\frac{∂^{2}f}{∂x∂y}\\\frac{∂^{2}f}{∂x∂y}&\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}4y-12&4x\\4x&6y-12\end{matrix}\right]$ (0.5)

Pour le point (0,0) : $∇^{2}f\left(0,0\right)=\left[\begin{matrix}-12&0\\0&-12\end{matrix}\right]$ (0.25$⇒\left\{\begin{matrix}\left|-12\right|<0\\\left|\begin{matrix}-12&0\\0&-12\end{matrix}\right|\end{matrix}\right.=144>0$ $(0.5)⇒$ la Hessienne est définie négative $ ⇒$ (0,0) est un maximum local. (0.5)

Pour le point (0,4) : $∇^{2}f\left(0,4\right)=\left[\begin{matrix}4&0\\0&12\end{matrix}\right]$ (0.25) $⇒\left\{\begin{matrix}\left|4\right|>0\\\left|\begin{matrix}4&0\\0&12\end{matrix}\right|\end{matrix}\right.=48>0$ $(0.5)⇒$ la Hessienne est définie positive $⇒$ (0,4) est un minimum local. (0.5)

Pour le point ($\frac{3}{\sqrt{2}}$ ,3): $∇^{2}f(\frac{3}{\sqrt{2}} ,3) =\left[\begin{matrix}0&\frac{12}{\sqrt{2}} \\\frac{12}{\sqrt{2}}&6\end{matrix}\right]$ (0.25) $⇒\left\{\begin{matrix}\left|0\right|=0\\\left|\begin{matrix}0&\frac{12}{\sqrt{2}} \\\frac{12}{\sqrt{2}}&6\end{matrix}\right|\end{matrix}\right.=-72<0$ $(0.5)⇒$ la Hessienne est non définie, $(\frac{3}{\sqrt{2}} ,3) $est un point selle. (0.5)

Pour le point ($-\frac{3}{\sqrt{2}}$ ,3): $∇^{2}f(-\frac{3}{\sqrt{2}} ,3) =\left[\begin{matrix}0&-\frac{12}{\sqrt{2}} \\-\frac{12}{\sqrt{2}}&6\end{matrix}\right]$ (0.25)

 $⇒\left\{\begin{matrix}\left|0\right|=0\\\left|\begin{matrix}0&-\frac{12}{\sqrt{2}} \\-\frac{12}{\sqrt{2}}&6\end{matrix}\right|\end{matrix}\right.=-72<0$ $(0.5)⇒$ la Hessienne est non définie, $(-\frac{3}{\sqrt{2}} ,3) $est un point selle. (0.5)

**Exercice n°2 :** (11points)

f(x,y)= x ySoumise à : x2 + y2=1

1. Points stationnaires de f :

Le Lagrangien : L(x,y,$ λ$)=x y +$ λ$(x2 + y2 -1) (0.25)

$$∇L\left(x\_{1},x\_{2},λ\right)=\left\{\begin{matrix}y+2λx=0 \left(1\right) (0.25)\\x+2λy=0 (2) (0.25)\\x^{2}+y^{2}-1=0 \left(3\right) (0.25)\end{matrix} \right.$$

L’équation (1) $⟹ λ=-\frac{y}{2x} $(0.25)

L’équation (2) $⟹ λ=-\frac{x}{2y} $(0.25)

On a:$ \left\{\begin{matrix}-\frac{y}{2x}=-\frac{x}{2y}\\x^{2}+y^{2}-1=0\end{matrix} \right.\left(0.25\right)⟹\left\{\begin{matrix}x^{2}=y^{2}\\2x^{2}-1=0\end{matrix} \left(0.25\right)\right.⟹x^{2}=\frac{1}{2}$ $\left(0.25\right)⟹$

$x=\pm \frac{1}{\sqrt{2}} et y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}} $(0.5)

Les points stationnaires sont : ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{2}$), ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{2}$), (-$\frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{2}$) et (-$\frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{2}$) (1)

1. Nature des points critiques.

Pour retrouver les points stationnaires, on calcule le signe du déterminant de la matrice suivante :

$\left[\begin{matrix}w\*I\_{nxn}- ∇^{2}\_{(x,y)}L\left(x,y,λ\right)&G(x,y)^{T}\\G(x,y)&0\end{matrix}\right]$(0.5)

 Où $ G\left(x\right)=\left[\begin{matrix}\frac{∂g}{∂x}&\frac{∂g}{∂y}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}2x&2y\end{matrix}\right] $(0.5)

Et $ ∇^{2}\_{(x,y)}L\left(x,y,λ\right)=\left[\begin{matrix}2λ&1\\1&2λ\end{matrix}\right]$(0.25)

Pour le point ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{2}$) on a:

$$\left|\begin{matrix}\left[\begin{matrix}w&0\\0&w\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2λ&1\\1&2λ\end{matrix}\right]&\left[\begin{matrix}2x\\2y\end{matrix}\right]\\\left[\begin{matrix}2x&2y\end{matrix}\right]&0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\begin{matrix}w+1&-1\\-1&w+1\end{matrix}&\begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}\\\begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{2}}& \frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}&0\end{matrix}\right| \left(0.5\right) $$

$=-2\left(w+1\right)+\left(0-2\right)+2\left(-1-\left(w+1\right)\right)=-4w-8=0 ⇒w=-2<0 $(0.5)

Le point ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{2}$)est un maximum local. (0.5)

Pour le point ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{2}$) on a :

$$\left|\begin{matrix}\left[\begin{matrix}w&0\\0&w\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2λ&1\\1&2λ\end{matrix}\right]&\left[\begin{matrix}2x\\2y\end{matrix}\right]\\\left[\begin{matrix}2x&2y\end{matrix}\right]&0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\begin{matrix}w-1&-1\\-1&w-1\end{matrix}&\begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{2}}\\-\frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}\\\begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{2}}& -\frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}&0\end{matrix}\right| \left(0.5\right) $$

$=-2\left(w-1\right)+\left(0+2\right)+2\left(1-\left(w-1\right)\right)=-4w+8=0 ⇒w=2>0 $(0.5)

Le point ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{2}$) est un minimum local. (0.5)

Pour le point ($-\frac{1}{\sqrt{2}}$,$\frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{2}$) on a:

$$\left|\begin{matrix}\left[\begin{matrix}w&0\\0&w\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2λ&1\\1&2λ\end{matrix}\right]&\left[\begin{matrix}2x\\2y\end{matrix}\right]\\\left[\begin{matrix}2x&2y\end{matrix}\right]&0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\begin{matrix}w-1&-1\\-1&w-1\end{matrix}&\begin{matrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}\\\begin{matrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}& \frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}&0\end{matrix}\right| \left(0.5\right) $$

$=-2\left(w-1\right)+\left(0+2\right)-2\left(-1+\left(w-1\right)\right)=-4w+8=0 ⇒w=2>0 $(0.5)

Le point ($-\frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$ \frac{1}{2}$) est un minimum local. (0.5)

Pour le point ($-\frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$-\frac{1}{2}$) on a :

$$\left|\begin{matrix}\left[\begin{matrix}w&0\\0&w\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2λ&1\\1&2λ\end{matrix}\right]&\left[\begin{matrix}2x\\2y\end{matrix}\right]\\\left[\begin{matrix}2x&2y\end{matrix}\right]&0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\begin{matrix}w+1&-1\\-1&w+1\end{matrix}&\begin{matrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}\\-\frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}\\\begin{matrix}-\frac{2}{\sqrt{2}}& -\frac{2}{\sqrt{2}}\end{matrix}&0\end{matrix}\right| \left(0.5\right)$$

$=-2\left(w+1\right)+\left(0-2\right)-2\left(1+\left(w+1\right)\right)=-4w-8=0 ⇒w=-2<0 $(0.5)

Le point ($-\frac{1}{\sqrt{2}}$,-$ \frac{1}{\sqrt{2}}$,$-\frac{1}{2}$) est un maximum local. (0.5)