Chapitre 3:
Transfert de chaleur par conduction en régime Permanent

En régime permanant, la température en chaque point du milieu est indépendante du temps .

L'équation générale se réduit à l'équation de POISSON (conduction vive) dans le cas où le milieu comporte des sources internes, où à l'équation de LAPLACE
(conduction morte) pour un milieu sans sources.

I. L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan .

.

Le mur simple est un milieu limité par 2 plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. $\vec{n} = \vec{i}$.

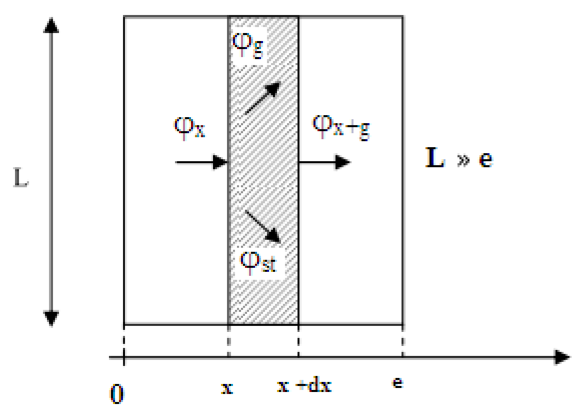


Fig. 1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+g} + \varphi_{st}$$

Avec :

$$= -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_x \quad \text{et} \quad _{+dx} = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_g = \dot{q}\, SdX$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dX \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx, nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda s \frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x+dx} - \left(\lambda s \frac{\partial T}{\partial t}\right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda s \frac{\partial T}{\partial X}\right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : q• =0

c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

$$\boxed{\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{d\lambda}{dT}\left[\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial x^2}\right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$\boxed{a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}}$$

Le rapport $a = \lambda / c\rho$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\boxed{\nabla^2 T = 0}$$

I. 2 Transfert unidirectionnel

I. 2.1 Mur simple

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :

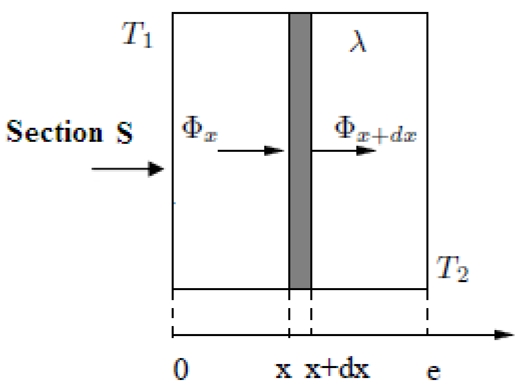


Fig.2 : Bilan thermique élémentaire sur un mur simple

En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et x + dx, En régime stationnaire :

Le flux thermique est conservé à travers les différentes sections droites du solide. Pour une plaque plane de largeur L, on a :

$$\mathring{Q}_{cond} = -\lambda A\left(\frac{dT}{dx}\right) = C_1$$

En supposant que la conductivité thermique du matériau est constante, l'intégration de cette équation différentielle ordinaire permet d'établir le profil de la température qui est une droite dont l'allure est :

$$T(x) = C_1 x + C_2$$

En utilisant les conditions aux limites de part et d'autre de la paroi, on a :

$$C.L.1: \quad x = 0, \qquad T = T_0 \qquad \Rightarrow C_2 = T_0$$

$$C.L.2: \quad x = L, \qquad T = T_L \qquad \Rightarrow C_1 = \frac{T_L - T_0}{L}$$

D'où le profil recherché :

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

Et le flux thermique entre les deux faces est :

$$\overset{\circ}{Q} = -\lambda * A * \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda A}{L}\left(T_0 - T_L\right)$$

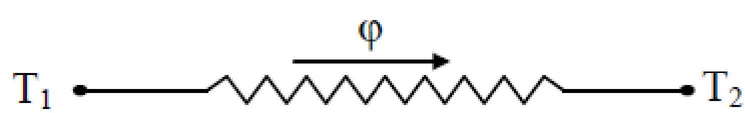
Pour un matériau composite dont le nombre de couches est n, le flux thermique à travers les différentes lamelles du mur a pour expression :

$$\overset{\circ}{Q} == \frac{\lambda_i A}{L_i}\left(T_{i-1} - T_i\right) = Cste$$

La relation précédente peut également se mettre sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{S\lambda}}$$

cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme e/Sλ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de surface latérale S. On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la Fig.3.



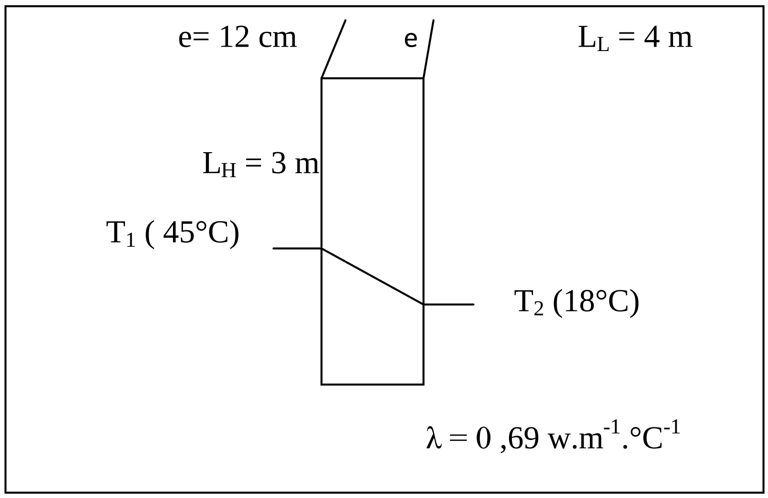
Avec $R = \frac{e}{S\lambda}$

Fig.3 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple

Exemple 2 :

Calculer la perte calorifique au travers d'un mur en briques de 12 cm d'épaisseur, 3 m de hauteur et de 4 m de largeur. Les températures des deux faces du mur sont respectivement de 45°C et de 18°C. (λ = 0,69 W/m.°C)

Corrigé :



La densité du flux de Conduction en régime permanent : Φ est constant

$$\Phi\ .dx = \varphi.S = -\frac{\lambda dT}{dX}.S \Rightarrow \Phi\ .dx = -.dT \Rightarrow \Phi\int_0^e dx = \int_{T1}^{T2} -\lambda S dT$$

$\Rightarrow$ $\Phi.e = \lambda.S(T_1\text{-}T_2)$ donc

$$\Phi = \frac{\lambda.S\ (T_1 - T_2)}{e}$$

A.N. $$\Phi = \frac{0.69\ (45-18)*3*4}{0.12} = 1863 \text{ watt}$$

I. .2.2 Mur multicouches

C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S:Les surfaces isothermes sont planes et parallèles, la résistance d'un mur s'écrit R = e /λS avec e, épaisseur du mur et S sa surface.

D'où

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S}$$

Alors le flux φ échangé lors de la traversée du mur multicouche est donné par la relation:

$$\varphi(W) = \frac{T_{fl1} - T_{fl2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S} + \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

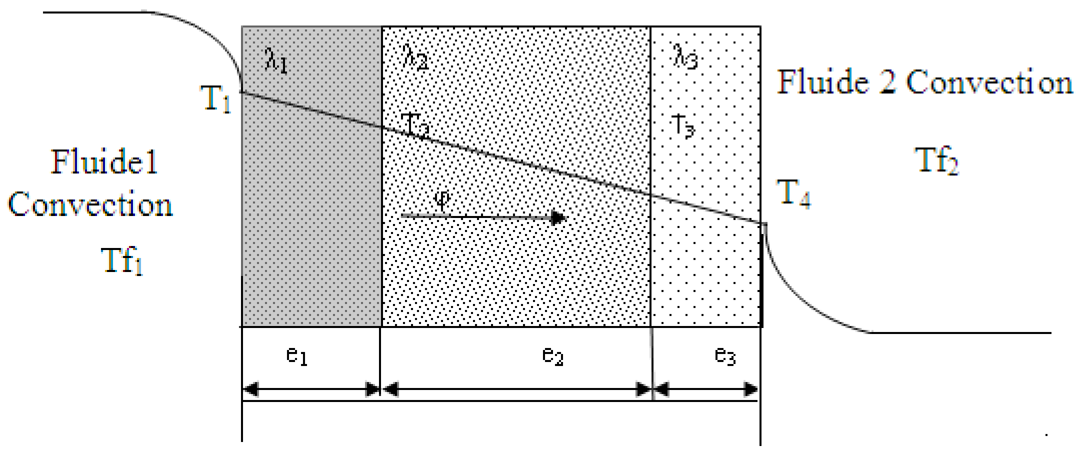


Fig.4 : flux et températures dans un mur multicouches

Nous avons considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuités de températures aux interfaces. En réalité, compte tenu de la rugosité de surfaces, une. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard et il créa une résistance thermique R (l'air est isolant) appelée résistance thermique de contact.

Exemple 3 :

Le mur d'un four comporte trois couches de matériaux différents accolées les unes aux autres (en serie) :

- Une couche de briques réfractaires (λ = 1,21 W/m.°C);
- Une couche de revêtement calorifuge (λ = 0,08 W/m.°C);

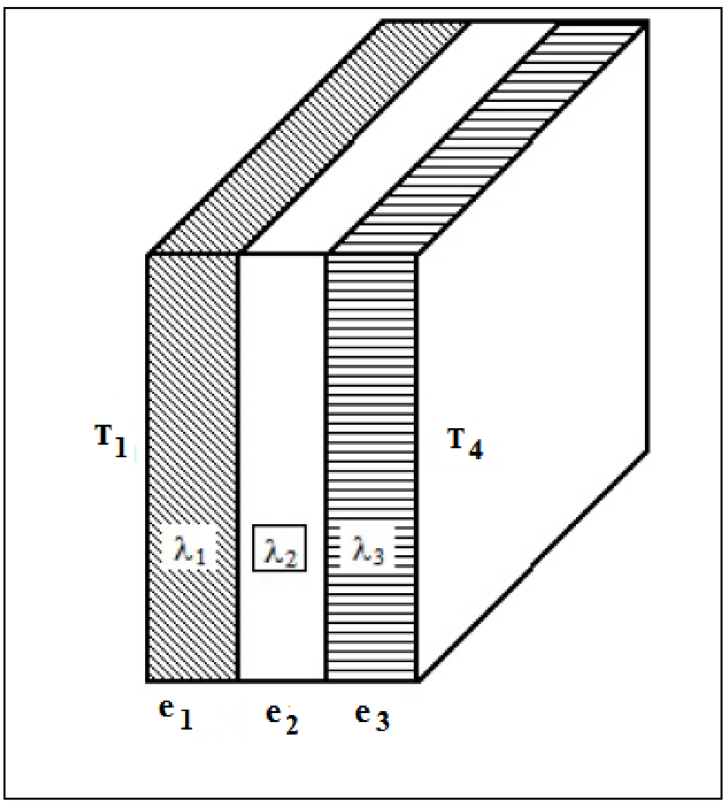
- Une couche de briques (λ = 0,69 W/m.°C).

Chaque couche a une épaisseur de 10 cm. La température est de 872°C à l'intérieur du four et de 32°C à l'extérieur.

1. Si la surface du mur est de 42 m^2, calculer la perte calorifique par conduction pendant 24 heures en joule.
2. Quelle est la température T_m au milieu du revêtement ?

Corrigé :

1) Calcul de la perte calorifique



La conduction à travers un mur composites en régime permanent : Φ est constant

$$\Phi = \varphi.S = -\frac{\lambda dT}{dX}.S$$

On intègre pour chaque épaisseur l'équation de flux de chaleur chaque valeur de λ constante

$\Phi\int_0^e dx = \int_{T1}^{T2} -\lambda 1 SdT$ on aura $\Phi.e_1 = \lambda.S_1(T_1\text{-}T_2)$

Puisque Φ est constant nous pouvons écrire :

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

Finalement

$$\Phi = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}}$$

A.N. $\Phi = \frac{872-32}{\frac{0.1}{1.21*42} + \frac{0.1}{0.08*42} + \frac{0.1}{0.69*42}}$ **Φ = 23,877 Kw**

La perte calorifique par conduction pendant 24 heures ce n'est que Φ .24 h .

D'où Φ = 24*23.877 = **573,048 kw.h**

Sachant que, Un kilowattheure vaut 3 600 kilojoules.

Φ = 573,048*3600*1000= **$2{,}06*10^9$ J**

2) Pour calculer Tm il est impératif de calculer T_2 et T_3 car Tm se trouve entre les deux températures.

$\mathbf{T_2 = T_1 - \Phi} \frac{e_1}{\lambda_1 S}$; $\mathbf{T_3 = T_4 + \Phi} \frac{e_3}{\lambda_3 S}$ et $T_m = \frac{T_{2+} T_3}{2}$

T_2 = **825 °C ;** T_3 **=114.4 °C** T_m = **469,7 °C**

I. .2.3 Section cylindrique

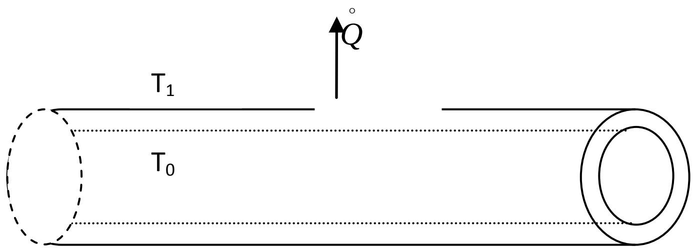


Fig.5 : Schéma de transfert dans un cylindre creux

En régime stationnaire, le flux thermique est conservé à travers les différentes couches cylindriques du solide. Pour un cylindre d'épaisseur dr et de longueur L, le flux thermique s'écrit :

$$\phi = -\lambda A\left(\frac{dT}{dr}\right) = C_1$$
$$avec \quad A = 2\pi r L$$

En supposant que la conductivité thermique du matériau est constante, l'intégration de cette équation différentielle ordinaire permet d'établir le profil de la température dont l'allure est :

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

En utilisant les conditions aux limites de part et d'autre de la paroi du cylindre, on a :

$$C.L.1: \quad r = R_0, \qquad T = T_0 \qquad \Rightarrow T_0 = C_1 \ln R_0 + C_2$$
$$C.L.2: \quad r = R_1, \qquad T = T_1 \qquad \Rightarrow T_1 = C_1 \ln R_1 + C_2$$

Il en découle que le profil de température suit une loi logarithmique avec :

$$C_1 = \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \qquad et \qquad C_2 = T_0 - \frac{T_1 - T_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \ln R_0$$

et le flux thermique entre les deux faces est :

$$\overset{\circ}{\phi} = -\lambda * A * \frac{dT}{dx} = -2\pi r L \lambda \frac{dT}{dr}$$
$$\overset{\circ}{\phi} = 2\pi L \lambda \frac{T_0 - T_1}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)}$$

Pour un matériau composite dont le nombre de couches est n, le flux thermique à travers les différentes couches cylindriques a pour expression :

$$\overset{\circ}{\phi} = 2\pi L \lambda_i \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)}$$

En résolvant par rapport à l'écart de températures pour les différents matériaux, on a :

$$(T_0 - T_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\overset{\circ}{\phi}}{L} \frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\overset{\circ}{\phi}}{L} \frac{1}{\lambda_2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$(T_{n-1} - T_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{\overset{\circ}{Q}}{L} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right)$$

Par addition membre à membre, la différence de température entre les bornes extrêmes des sections du tube cylindrique s'écrit :

$$(T_0 - T_n) = \frac{\overset{\circ}{\phi}}{2\pi L} * \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda}\right)_i * \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

De façon analogue, la résistance thermique de la tranche (sandwich) i est:

$$Rt_i = \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

Par conséquent, la résistance globale Rt_G d'un mur composite est :

$$Rt_G = \frac{1}{2\pi L} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{R_i}{R_{i-1}}\right)$$

Exemple 4 :

Une conduite cylindrique en acier à conductivité thermique = 46 W/m.ºC, de diamètre intérieur Ø1 =44 mm et extérieur Ø2 =54mm, transporte un fluide chaud.

Calculez le flux de chaleur perdu par mètre de longueur pour un écart de température de 1°C entre les surfaces internes et externes de la canalisation.

Solution

$$d\Phi = -\lambda\, S\,\text{grad}T = -\lambda\, S\frac{dT}{dR} = -\lambda\, 2\pi r L\frac{dT}{dR}$$

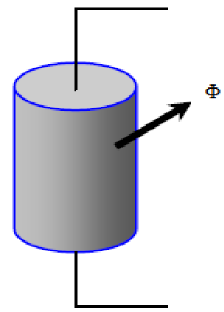
Séparation de variable ⟹

$$\int \frac{d\emptyset}{L} = \int \frac{-2\pi r dT}{dr}$$

$$\int_{r1}^{r2} \frac{d\emptyset.dr}{L.r} = \int_{T1}^{T2} -2\pi dT \quad \Longrightarrow \frac{\phi}{L} = \frac{-2\pi}{LN\frac{r_2}{r_1}} \Longrightarrow \phi = \frac{46*2*3.14}{Ln\frac{27}{22}} = 1410{,}58 \text{ w/m}$$

Exemple 5 :

Une résistance électrique de forme cylindrique, de longueur 1,5cm et de diamètre 0,4cm, est utilisée dans un circuit électrique. Cette résistance dissipe une puissance de 0,6W. On suppose que le transfert de chaleur est uniforme dans toute la résistance.



-Déterminez la quantité de chaleur dissipée par cette résistance en 24h. De même la densité de ce flux de chaleur.

Solution

-La quantité de chaleur dissipée par cette résistance en 24h est de:

$Q = \Phi.\Delta t$ = (0.6 W)(24 h) = **14.4 Wh = 51.84 kJ** avec (1Wh=3,6kJ).

-La densité du flux de chaleur est:

$$\boldsymbol{A_{s=}\ 2\frac{\pi D^2}{4} + \pi DL = 3,14\left(\frac{0.4}{2} + \ 0,4 * 1,5\right) = \ 2.136 \ \text{cm}^2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\phi}{A_s} = \frac{0.6}{2{,}136} = \mathbf{0.28\ w/cm^2}$$