Département de physique

Université de M'sila

Mécanique analytique

Msila le : 30/01/2022

Durée 1h30min

Examen de Mécanique analytique

Exercice 1 (6points)

On donne l'expression du hamiltonien d'un système à 2 dimensions (x, y) par :

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(x, y)$$

Montrer que le moment cinétique est donné par : $\vec{L} = L_z.\vec{k}$

Tel que $L_z = x.p_y - y.p_x$ et $\vec{k}$ le vecteur unitaire selon la direction (z)

On donne : $[A, B] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right]$

Calculer : $[L_z, H]$

On donne : $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$

Calculer $\frac{dL_z}{dt}$ et donner les conditions pour que L_z soit une constante du mouvement

Exercice 2 (7 points)

Une particule de masse m est contrainte de se déplacer le long d'une cycloïde représentée par les équations paramétriques suivantes :

$x = a(\varphi - sin\varphi)$ $\quad y = a(1 + cos\varphi)$

La particule est aussi sous l'influence d'un champ gravitationnel.

Quel est le degré de liberté du système ?

-Écrivez le lagrangien du problème.

-Trouver l'équation du mouvement à partir des équations du mouvement de Lagrange.

Exercice3 (7 points)

Une particule de masse m est suspendue à un ressort de constante k dans le champ gravitationnel $\vec{g}$. Près de la surface de la Terre, On pose que seul le mouvement vertical est permis et aucun mouvement en x et en y.

Quel est le degré de liberté du système ?

On suppose que à t=0, la masse se trouve à z_0 à l'instant t se trouve à z de l'origine

Montrer que le lagrangien est donnée par l'expression suivante :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 + mgz$$

Calculer le hamiltonien du système.Pourquoi le hamiltonien est constant.

-Trouver l'équation du mouvement à partir des équations du mouvement de Hamilton.

-écrire l'équation de Hamilton-Jacobi du système

1

Ex1 : Le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ 0,5

1) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} \Rightarrow L_x = L_y = 0,\ L_z = xp_y - yp_x$$

$$\vec{L} = L_z \vec{k} = (xp_y - yp_x)\vec{k}.$$ 0,5

2) $$[L_z, H] = \sum\left(\frac{\partial L_z}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial L_z}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right).$$

1 $$= \frac{\partial L_z}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\right) + \frac{\partial L_z}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\right) - \frac{\partial L_z}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial L_z}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$= p_y\left(\frac{p_x}{m}\right) + (-p_x)\cdot\frac{p_y}{m} - (-y)\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y}$$ 1

$$[L_z, H] = y\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial y}.$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{\partial L_z}{\partial t} + [L_z, H]$$ 0,5 on a $\frac{\partial L_z}{\partial t} = 0$ 0,5

0,5 $$(L_z = \text{cte}) \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Longrightarrow y\frac{\partial V}{\partial x} = x\frac{\partial V}{\partial y}$$ 0,5

Ex3 : $q_\alpha = z$ (le nombre de degré de liberté $= 1$) 0,5

0,25

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2,\quad U = -mgz + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2.$$ 0,5 0,5

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 + mgz$$

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L}$$ 0,5 $$\Rightarrow H = p\dot{z} - \mathcal{L}.$$ 0,5

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p}{m}$$ 0,5

$$H = p\left(\frac{p}{m}\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 - mgz$$

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 - mgz}$$ 0,5

2) H est constant puisque il ne dépend pas explicitement du temps 0,5

Les équations de Hamilton : $\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{cases}$ 0,5 0,25 $\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$ 0,25

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \dfrac{p}{m} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{z} \quad (1) \\ \dot{p} = -k(z-z_0) + mg \quad (3) \end{cases}$ 0,5

$(1) = (3) \Rightarrow m\ddot{z} = -k(z-z_0) + mg$ 0,25

$$\boxed{m\ddot{z} + k(z-z_0) - mg = 0}$$

l'équation de Hamilton Jacobi : 0,5

$$H\left(z, p = \frac{\partial S}{\partial z}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}k(z-z_0)^2 - mgz + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$ 0,5

EX2 : $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(1+\cos\varphi) \end{cases}$, $q_\alpha = \varphi$ 0,5 on a 1 seul degré de liberté

Le lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ 0,5 , $U = mgy = mga(1+\cos\varphi)$ 0,5

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = a\dot{\varphi}(1-\cos\varphi) \\ \dot{y} = -\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$ 0,5 0,5

$T = ma^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi)$.

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = ma^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi) - mga(1+\cos\varphi)}$$ 0,5

0,5 Equation de Lagrange $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$ 1

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2ma^2\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)$ 0,5 $\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2ma^2\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) + 2ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi$. 0,1

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mga\sin\varphi$ 0,5

$\Rightarrow 2ma^2\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) + 2ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi - ma^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi - mga\sin\varphi = 0$ 0,5

$$\Rightarrow \boxed{2\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi) + \dot{\varphi}\sin\varphi - \frac{g}{a}\sin\varphi = 0}$$ 0,5