DISTRIBUTIONS

Cours + exercies:

Madani Moussai

23 février 2021

Notations

– Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.
– Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times ... \times x_n^{\alpha_n}$.
– Les dérivées partielles $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\partial^\alpha f = f^{(\alpha)} = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_1} f$.
– Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, on définit l'opérateur de translation par $\tau_a f(x) = f(x - a)$ et l'opérateur de délatation par $h_\lambda f(x) = f(x/\lambda)$ pour tout $x, a \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$.

Chapitre 1

DISTRIBUTIONS

Dans la suite de ce programme on s'intéresse à l'espace dual de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact.

1.1 Espace des fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.1 (Support d'une fonction) *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$). Le support de φ, noté $\operatorname{supp}\varphi$, est défini par*

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{A}, \quad \textit{où} \quad A = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.2 (L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$) de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont les $\operatorname{supp}\varphi$ sont bornés.

Comme $\operatorname{supp}\varphi$ est fermé, donc il est un compact dans $\mathbb{R}^n$, on dit que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact.

Remark 1.1 Les assertions suivantes sont faciles à vérifier :
(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.
(b) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial_j\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\partial^2_{j,k}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,..., $(j, k = 1, \ldots, n)$, etc.
(c) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

L'exemple suivant est essetiel dans la suite car il montre que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est non vide

Exemple 1.1 (Exemple fondamental) *Dans $\mathbb{R}^n$, soit*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & si \quad |x| < 1, \\ 0 & si \quad |x| \geq 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

si on considère la fonction "forte" :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < \frac{1}{2}, \\ 0 & si \quad |x| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

on a $\varphi(x) = \Pi\left(\frac{|x|}{2}\right)\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right)$. Rappelons que $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.
Dans $\mathbb{R}$, il suffit de remplacer dans (1.1) la variable $|x|$ par x.

Définition 1.3 (La convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$)
Une suite des fonctions $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $n \to +\infty$, si on a :

(a) *Il existe un ensemble B borné de $\mathbb{R}^n$ tel que* $\operatorname{supp} \varphi_n \subset B$.

(b) *Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ fixé, la suite $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$. C'est-à-dire qu'on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)\right| = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}^n.$$

On termine ce paragraphe par une application dans l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui consiste à montrer qu'on peut écrir une fonction constante $f(x) := c$ comme étant la somme des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

Théorèm 1.1 (Partition de l'unité)
Il existe une suite des fonctions $(\varphi_j)_j$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Preuve. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, une fonction positive à support dans la boule $|x| \leq 2$ et telle que $\theta(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Posons

$$\psi(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \theta(x+j).$$

Alors $\psi(x) \geq 1$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Posons ensuite $\varphi(x) := \frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ et $\varphi_j(x) := \varphi(x+j)$. Alors les fonctions φ_j sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, elles vérifient aussi l'égalité (1.2). ■

1.2 Espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Voici la définition de l'espace des distributions noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Aussi les distributions d'ordre fini :

Définition 1.4 (de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) *Toute application linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est appelée une distribution. Explicitement, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on doit écrire et vérifier :*

- *on écrit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to T(\varphi)$ ou en général $\langle T, \varphi\rangle$, i.e.,*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}.$$

- *on vérifie $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,*

$$\langle T, \varphi + \lambda\psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \lambda\langle T, \psi\rangle.$$

- *on vérifie aussi*

$$\begin{aligned} \langle \lambda T, \varphi\rangle &= \lambda\langle T, \varphi\rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ \langle T_1 + T_2, \varphi\rangle &= \langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.5 *Une distribution T est dite d'ordre N, si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$ on a*

$$\big|\langle T, \varphi\rangle\big| \leq c \sum_{j\leq N} \sup_{x\in K} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp}\varphi \subset K),$$

la constante positive c dépende de K.

Il exsite deux types de distributions :

1.2.1 Distributions régulières

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), telle que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire,

$$\forall \text{ compact } K \subset \mathbb{R}^n : \int_K |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ existe ($\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) car φ est nulle à l'extérieur d'un ensemble borné, alors f définie une distribution, noteé T_f, telle que

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Remark 1.2 Soient f et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g \quad \text{p.p.}$$

Définition 1.6 (Distribution régulière)
Toute distribution définie par (1.3) *est dite distribution régulière, c-à-d si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors T_f est une distribution régulière.*

1.2.2 Distributions singulières

La distribution de Dirac δ (resp. δ_a) est défini par

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \text{à l'origine},$$

resp.

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \text{au point } a \in \mathbb{R}^n.$$

Elle représente la charge (ou la masse) à l'origine (resp. au point a) par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

resp.

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq a \\ +\infty & \text{si} \quad x = a. \end{cases}$$

Théorèm 1.2 *La distribution de Dirac n'est pas une distribution régulière.*

Preuve. Il suffit de raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\delta = T_f$, i.e.

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.4}$$

Comme $f = 0$ p.p sur $\mathbb{R}^n$ alors $\langle T_f, \varphi\rangle = 0$ pour presque tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On choisit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(0) = 1$ on obtient une contradiction. ■

1.2.3 Exemples

1. La valeur principale : Considérons la distribution $\mathrm{pv}\frac{1}{x}$ définie par :

$$\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad (\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})). \tag{1.5}$$

En effet, soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que $\operatorname{supp}\varphi = K\subset\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq M\}$; on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x), \quad \psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ avec } \sup_{x\in K}|\psi(x)|\leq c\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|,$$

donc

$$\begin{aligned}\Big|\int_{|x|\geq\epsilon,\, x\in K}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\varphi(0)\int_{|x|\geq\epsilon,\, x\in K}\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq\epsilon,\, x\in K}\psi(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq |\varphi(0)|\Big|\int_{\epsilon\leq|x|\leq M}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int_{\epsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)\mathrm{d}x\Big|.\end{aligned}$$

On a

$$\int_{\epsilon\leq|x|\leq M}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \Big(\int_{-M}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{M}\Big)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0,$$

par contre

$$\Big|\int_{\epsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)\mathrm{d}x\Big| \leq 2M\sup_{|x|\leq M}|\psi(x)|\leq c'\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|.$$

Ce qui donne

$$\big|\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\rangle\big| \leq c\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|. \tag{1.6}$$

La formule (1.6) montre que $vp\frac{1}{x}$ est d'ordre 1.

2. Une inégalité pour des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: Dans $\mathbb{R}^n$, il existe $c = c(n) > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\leq c\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\big|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\big|^2\mathrm{d}x, \quad (\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.7}$$

En effet, par intégration par partie par rapport à la composante $j$ème on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x = -2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n}x_j\psi(x)\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}x, \quad (\forall j = 1,\dots,n,\ \forall\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

3. Une distribution dans $\mathbb{R}^n$: Soit $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$ et $f(x,y) = 0$ sinon. Nous avons par les coordonnées polaires

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

ce qui montre que $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$, donc on définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ par T_f. Il en est de même en dimension supérieure, T_f avec $f(x) = \frac{1}{|x|}$, si $|x| \leq 1$ et $f(x) = 0$ sinon., en considérons le changement de variables en coordonnées sphérique dans $\mathbb{R}^n$, c-à-d :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x &\leq \int_{|x'|=1}\int_0^1 t^{n-1} f(tx')\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma_{x'} \\ &= \int_{|x'|=1}\int_0^1 t^{n-1} t\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma_{x'} = \frac{1}{n}\nu(n)\end{aligned}$$

où $\nu(n) := \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+(n/2))}$ est le volume de la sphère unité $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Exercices

1. Dans $\mathbb{R}^n$, tracer la fonction

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin]a,b[, \\ \exp \frac{1}{2}\{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\} & \text{si} \quad x \in]a,b[, \end{cases}$$

dans les cas : $b = a = 1$, $b = 2a = 2$.

2. Démontrer que les applications suivantes définissent des distributions (préciser l'ordre) :

(a)

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{|x|\leq 1} \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

(b)

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq N} \varphi^{(\alpha)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

(c)

$$\langle \mathrm{pf}\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big\{\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\Big\}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(d)

$$\langle \mathrm{pf}\frac{H}{x^2}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big\{\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0)\log\epsilon\Big\}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Indications pour les solutions de l'exercice 2

(a) La fonction caractéristique sur $|x| \leq 1$ est dans $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, elle est d'ordre 0.

(b) Nous avons $T = \sum_{|\alpha|\leq N}(-1)^{|\alpha|}\delta^{(\alpha)}$, de plus

$$\langle T, \varphi\rangle \leq \sum_{|\alpha|\leq N} |\varphi^{(\alpha)}(0)| \leq \sum_{|\alpha|\leq N} \|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty,$$

elle est d'ordre $\leq N$.

(c) On écrit :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x) \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \sup_{|x|\leq M} |\psi(x)| \leq c \sup_{|x|\leq M} |\varphi''(x)|,$$

où M est défini par $\operatorname{supp}\varphi = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq M\}$. Un simple calcul donne ce qui donne

$$|\langle \mathrm{pf}\frac{1}{x^2}, \varphi\rangle| \leq c \sum_{j=0}^{2} \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

(d) La même façon que (c).

Chapitre 2

Opérations sur les distributions

2.1 Opérations élémentaires

2.1.1 Addition

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables, on définit l'addition par

$$\begin{aligned}\langle T_f + T_g, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_g, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

d'où la formule

$$\langle T_f + T_g, \varphi\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle + \langle T_g, \varphi\rangle.$$

2.1.2 Multiplication

• Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, le produit αT a un sens et $\alpha T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ déninie par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle.$$

Remark 2.1

1. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $\alpha T_f = T_{\alpha f}$.
2. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $xT = 0$ alors $T = c^{\text{te}}\delta$.
   En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi\rangle = 0 \quad \begin{cases} \text{si} \quad x \neq 0 \Rightarrow T = 0, \\ \text{si} \quad x = 0 \quad (T \neq 0), \end{cases}$$

   d'où T peut s'identifier à la distribution de Dirac par une constante.

2.1.3 Translation et homothétie

• On note $\tau_a\varphi(x) = \varphi(x-a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ est l'opérateur de translation au point $a \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in L^1_{loc}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a)\mathrm{d}x.$$

D'où on obtient la formule

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a})\varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

• De même, $h_\lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ fixé, est l'opérateur de d'homothétie. Si $f \in L^1_{loc}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{\lambda^n},$$

d'où on obient la formule

$$\langle h_\lambda T, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^n}\langle T, h_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Exemple 2.1 *1.* $\langle \tau_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$.

2. $\langle h_\lambda \delta, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^n}\langle \delta, h_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^n}\varphi(0) = \frac{1}{\lambda^n}\langle \delta, \varphi \rangle$.

D'où $\tau_a \delta = \delta_a$ *et* $h_\lambda \delta = \frac{1}{\lambda^n}\delta$.

2.2 Dérivation

C'est la partie la plus intéréssante dans les opérations sur les distributions.
Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ on a par une intégration par partie à la $j$ème composante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_j\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

D'où on tire la formule suivante (sous forme de définition) :

Définition 2.1 *On définit la dérivation dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *par la formule :*

$$\langle \partial_j T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_j \varphi \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Il découle alors pour un ordre supérieur

$$\langle T^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi^{(\alpha)} \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Exemple 2.2 *Dans* $\mathbb{R}$ *on a* $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$ *pour tout* $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

2.2.1 Exemples de dérivation

a) δ (masse de Dirac), on a vu déjà que

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

b) H (Heaviside)

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

D'où $H' = \delta$.

c) $\log|x|$ (dans le cas $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\langle(\log|x|)',\varphi\rangle &= -\langle\log|x|,\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}}\log|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{\infty}\Big)\log|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x\Big\}.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{+\infty}\varphi'(x)\log x\mathrm{d}x &= -\int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x-\varphi(\epsilon)\log\epsilon\\ \int_{-\infty}^{-\epsilon}\varphi'(x)\log(-x)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x+\varphi(-\epsilon)\log\epsilon.\end{aligned}$$

Comme $|\varphi(\epsilon)-\varphi(-\epsilon)|\leq 2\epsilon\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|$ (d'après le théorème des accroissements finis) et que $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\epsilon\log\epsilon=0$, et comme aussi

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{\infty}\Big)\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\Big\}=\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

on a alors $(\log|x|)'=\mathrm{vp}\frac{1}{x}$.

d) x_+^λ, $-1<\lambda<0$ (i.e., $x_+^\lambda:=H(x)x^\lambda$), (dans le cas $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\langle(x_+^\lambda)',\varphi\rangle &= -\langle x_+^\lambda,\varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty}x^\lambda\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &= -\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon}^{+\infty}x^\lambda\mathrm{d}(\varphi(x)+c),\quad\text{avec on choix, } c=-1\\ &= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big[\lambda\int_{\epsilon}^{+\infty}x^{\lambda-1}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\mathrm{d}x-\big[x^\lambda\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\big]_{\epsilon}^{+\infty}\Big]\\ &= \lambda\int_0^{+\infty}x^{\lambda-1}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où on peut définir la dérivée $(x_+^\lambda)'$ par cette dernière formule.

e) $\log(x+\mathrm{i}0)$, $\log(-x+\mathrm{i}0)$

On sait que $\log(x+\mathrm{i}\epsilon)=\log|x+\mathrm{i}\epsilon|+\mathrm{i}\arg(x+\mathrm{i}\epsilon)$ quand $\epsilon\downarrow 0$, on a alors

$$\log(x+\mathrm{i}0)=\log|x|+\mathrm{i}\pi H(-x).$$

En effet, soit $\theta=\lim_{\epsilon\to 0}\theta_\epsilon$ où θ_ϵ est définit par $\theta_\epsilon=\arg(x+\mathrm{i}\epsilon)$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\arg(x+\mathrm{i}\epsilon)=\pi H(-x),\quad\text{car}\ \left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{|x|}=\left\{\begin{array}{rcl}1 & \text{si} & x>0,\\ -1 & \text{si} & x<0.\end{array}\right.\\ \sin\theta=0,\end{array}\right.$$

donc $\theta=0$ si $x>0$ et $\theta=\pi$ si $x<0$. D'où

$$\big(\log(x+\mathrm{i}0)\big)'=\mathrm{vp}\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta,$$

de même

$$\big(\log(-x+\mathrm{i}0)\big)'=\mathrm{vp}\frac{1}{x}+\mathrm{i}\pi\delta.$$

2.3 La convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.2 *Soit (T_j) une suite d'éléments dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On dit que T_j converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $\lim_{j\to\infty}\langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

On obtient quelques propriétés simples à vérifier :

— Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\partial_k T_j \to \partial_k T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

— Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $\alpha T_j \to \alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

— Si $T_j \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, alors $\tau_a T_j \to \tau_a T$ et $h_\lambda T_j \to h_\lambda T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.3 *Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Soit $T_j := T_{j^n f(j\cdot)}$. Calculons $\lim_{j\to\infty} T_j$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nous avons*

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} j^n f(jx)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)[\varphi(x/j) - \varphi(0)]\mathrm{d}x + \varphi(0)$$

Nous avons aussi
– $\lim_{j\to\infty} f(x)[\varphi(x/j) - \varphi(0)] = 0$
– $|f(x)[\varphi(x/j) - \varphi(0)]| \leq 2\|\varphi\|_\infty |f(x)|$, *avec* $\|\varphi\|_\infty f \in L_1(\mathbb{R}^n)$
en appliquant donc le théorème de la convergence dominée on obtient $\lim_{j\to\infty}\langle T_j, \varphi\rangle = \varphi(0)$, c-à-d $\lim_{j\to\infty} T_j = \delta$. ■

De l'Exemple 2.3, on observe que $\lim_{j\to\infty} j^n f(jx) = \delta$ (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) malgré que f est une fonction intégrable. Nous allons voir maintenant un exemple où la limite au sens de fonctions n'existe pas, cependant elle existe dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.4 *Soit $f_j(x) := \sin(jx)$, $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ n'existe pas. Calculons alors cette limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On pose $T_j := T_{f_j}$. On a $\sin(jx) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, puisque $|\sin(jx)| \leq 1$, donc $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de plus par intégration par partie on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(jx)}{j}\varphi'(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Nous avons
– $\lim_{j\to\infty} \dfrac{\cos(jx)}{j}\varphi'(x) = 0$ *puisque* $\left|\dfrac{\cos(jx)}{n}\varphi'(x)\right| \leq \dfrac{1}{j}\|\varphi'\|_\infty$
– $\left|\dfrac{\cos(jx)}{j}\varphi'(x)\right| \leq |\varphi'(x)|$ *avec* $\varphi' \in L_1(\mathbb{R})$.
Par le théorème de la convergence dominée on obtient $\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$, c-à-d $\lim_{j\to\infty} T_j = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On peut éviter le théorème de la convergence dominée par le fait que d'après (2.1) on

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\,\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{j}\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|\mathrm{d}x = \frac{\|\varphi'\|_1}{j} \to 0 \quad \text{quand} \quad j \to +\infty.$$

■

Exemple 2.5 *Soit* $T_j := \dfrac{\sin(jx)}{x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Calculons* $\lim_{j\to\infty} T_j$. *On a* $\dfrac{\sin(jx)}{x} \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *puisque* $\left|\dfrac{\sin(jx)}{x}\right| \leq j$, *donc* T_j *est un élément de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *On a (pour* $0 < \theta < 1$*) :*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(jx)}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x &= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(jx)}{x}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi'(\theta x)\mathrm{d}x \\ &= \pi\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi'(\theta x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

mais d'après l'Exemple 2.4 on a $\lim_{j\to\inf}\int_{\mathbb{R}} \sin(jx)\varphi'(\theta x)\mathrm{d}x = 0$. *Donc* $\lim_{j\to\infty} T_j = \pi\delta$.

■

Exemple 2.6 *Appliqons l'Exemple 2.3 avec la fonction* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. *Nou savons alors*

– $\lim_{j\to\infty} j^n f(jx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{j\to\infty} j^n e^{-j^2x^2} = 0$,

– $\lim_{j\to\infty} j^n f(jx) = \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, *puisque* $\lim_{j\to\infty} T_j = \lim_{j\to\infty} T_{j^n f(j\cdot)} = \delta$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

■

2.4 Exercices

1. Dans $\mathbb{R}$. Calculer au sens de distributions

$$T = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\Big)H(x)e^{\lambda x}, \quad S = \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k^2\Big)H(x)\frac{\sin kx}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

où H est la fonction de Heaviside.

2. Même question dans $\mathbb{R}$: $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|)$, $T_2 = \big(H(x)\cos\pi x\big)'$, $T_3 = \big(H(x)\sin\pi x\big)'$.

Indications de solution :

$T_1 = \operatorname{sgn} x$,

$T_2 = H'(x)\cos\pi x - \pi H(x)\sin\pi x = \delta - \pi H(x)\sin\pi x$,

$T_3 == H'(x)\sin\pi x + \pi H(x)\cos\pi x = \delta\sin\pi x + \pi H(x)\cos\pi x = \pi H(x)\cos\pi x$. ■

3. Même question dans $\mathbb{R}^n$: $T = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}H(x)$ où $H(x) = 1$ si $x_j \geq 0$ et $H(x) = 0$ si $x_j < 0$ et $\alpha = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = n$.

Indications de solution :

Nous avons

$$\langle\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}H, \varphi = (-1)^n \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Maintenant il suffit d'intégrer comme suit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^\infty \dots \int_0^{\infty_1} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^\alpha}\varphi(0,x')\mathrm{d}x' \quad |\alpha_1| = n-1, x' = (x_2,...,x_n) \\ &= (-1)^2 \int_0^\infty \dots \int_0^{\infty_2} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^\alpha}\varphi(0,x'')\mathrm{d}x'' \quad |\alpha_2| = n-2, x'' = (x_3,...,x_n) \\ &.... \\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

Ainsi $T = \delta$. ■

4. Dans $\mathbb{R}$. Soit $f(x) := \begin{cases} e^x & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0. \end{cases}$ Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et Calculer sa dérivée.
Même question pour T_g avec $g(x) = e^{x^3+x^2+x}$ si $x \geq 0$, $g(x) = 0$ si $x < 0$.
Indications de solution :
Comme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \infty$ (un calcul simple) on a $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Donc $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Maintenant $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ona

$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = \int_0^\infty e^x \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) + \int_{-\infty}^\infty f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi $T_f' = \delta + T_f$.
Pour T_g, on a $g = f \circ h$ où $h(x) := x^3 + x^2 + x$. Alors comme $T_g = T_{f\circ h}$, on ontient que $T_g' = h' T_{f\circ h}'$, c-à-d $T_g' = (3x^2+2x+1)(\delta + T_{f\circ h})$, mais $(3x^2+2x+1)\delta = \delta$, donc $T_g' = \delta + (3x^2+2x+1)T_{f\circ h}$. ■

5. Dans $\mathbb{R}$. (a) En appliquant la formule de Leibniz à la fonction $x^p\varphi(x)$ où $\varphi \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}\big(x^p\varphi(x)\big)_{|x=0} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > q, \\ C_q^p p!\varphi^{(q-p)}(0) & \text{si} \quad p \leq q. \end{cases}$$

(b) En déduire l'expression exacte de la distribution $T = x^p\delta^{(q)}$. (Solution. $T = 0$ si $p > q$, $T = C_q^p p!\delta^{(q-p)}$ si $p \leq q$).

5. Dans $\mathbb{R}$. Soit $T_n = \frac{1}{2n}|x|^{\frac{1}{n}-1}$. (a) Démontrer $T_n \in \mathcal{D}'$.
(b) Démontrer que T_n converge vers δ.

Chapitre 3

Produit de convolution des distributions

3.1 Produit tensoriel

Définition 3.1 *Soient φ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, le produit tensoriel $\varphi \otimes \psi$ est défini par*

$$\varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad (\varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)),$$

avec $\operatorname{supp} \varphi \otimes \psi = \operatorname{supp} \varphi \times \operatorname{supp} \psi$.

On accepte le résultat suivant : Il existe une distribution unique $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\langle U, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle.$$

On écrit aussi $U = S \otimes T$.
Pour la dérivation, on écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(S_x \otimes T_y) = \frac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}x} \otimes T_y,$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(S_x \otimes T_y) = S_x \otimes \frac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}y}.$$

3.2 Produit de convolution de deux fonctions

Définition 3.2 *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. On définit produit de convolution de f par g la fonction*

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y.$$

Si on fait le changement de variable $x - y = z$, il vient que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z)g(z)\mathrm{d}z = g * f(x),$$

d'où la commutativité de la convolution, c-à-d

$$f * g = g * f.$$

Il en est de même pour l'associativité.

Théorèm 3.1 *Le produit de convolution est commutatif et associatif.*

3.3 Produit de convolution des distributions

Soient f et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$:

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(u)\varphi(y+u)\mathrm{d}u\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\langle T_g, \varphi(y+\cdot)\rangle \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\langle T_f, \varphi(\cdot+u)\rangle \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Ce calcul n'est justifié, mais on l'accepte formelement. Ce qui ramène à la définition suivante :

– *Soient S et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit de convolution de S par T par la formule*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Cette définition n'est pas tout à fait correcte, car dans le 2è le terme $\langle T_y, \varphi(x+y)\rangle$ peut n'appartenir pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par conséquent $\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$ n'est pas défini.

3.4 Convolution avec une distribution à support compact

Définition 3.3 (Distribution à support compact $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit qu'une distribution T est nulle sur U si*

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec} \quad \operatorname{supp}\varphi \subset U.$$

On dit alors que $C_{\mathbb{R}^n}U$ (le complémentaire de U dans $\mathbb{R}^n$) est le support de T.

Remark 3.1 On considère (et on choisit toujours) que le $\operatorname{supp} T$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.1 *1-* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $0 \notin \operatorname{supp}\varphi$ *(i.e.,* $\varphi(0) = 0$*), on a directement* $\langle \delta, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{supp}\delta = \{0\}$. *Par conséquent* $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.
2- $\operatorname{supp} H = [0, +\infty]$.
3- $\operatorname{supp} \operatorname{pv}\frac{1}{x} = [-\infty, +\infty]$. ■

Nous allons voir un exemple intéréssant qui utilise les opérateurs de différences : Pour une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $m = 1, 2, \ldots$, on définit Δ_h^m par

$$\Delta_h^1 g(x) = g(x+h) - g(x),$$

$$\Delta_h^2 g(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^1 g)(x) = g(2x+h) - g(x+h) + g(x)$$

$$...$$

$$\Delta_h^m g(x) = \Delta_h^1(\Delta^{m-1} g)(x) = ...$$

$$\Delta_h^m g(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} g\left(x + (m-k)h\right), \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 3.2 *Dans* $\mathbb{R}$*, soit* T_1 *la distribution défine par*

$$\langle T_1, \varphi \rangle := \int_0^{2\pi} \Delta_x^1 \varphi(0)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{3.1}$$

Si on prend φ *telle que* $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\backslash[0, 2\pi]$*, on obteint alors* $\langle T_1, \varphi \rangle = 0$*, d'où* $T_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ *avec* $\operatorname{supp} T_1 = [0, 2\pi]$.
Dans $\mathbb{R}^n$*, soit* $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$ *la sphère unité. On pose*

$$\langle T_m, \varphi \rangle = \int_{S^{n-1}} \Delta_x^m \varphi(0)\,\mathrm{d}x \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,, m = 1, 2, ... \tag{3.2}$$

Alors $T_m \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *puisque* $\operatorname{supp} T_m = S^{n-1}$*. En effet il suffit de prendre* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$*, qui implique* $\langle T_m, \varphi \rangle = 0$. ■

3.5 Propriétés

a) Dérivation : Soient S, T deux distributions. Nous voulons dériver la quantité $S * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors on veut obtenir

$$\partial_j(S * T) = \partial_j S * T = S * \partial_j T. \tag{3.3}$$

Exemple 3.3 *Nous avons* $H' * 1 = \delta * 1 = 1$. ■

L'egalité (3.3) est vraie que lorsque $S * T$ existe, c-à-d :

$$S * T \text{ existe} \Rightarrow \partial_j S * T \text{ et } S * \partial_j T \text{ existent.}$$

Par contre, la réciproque est fausse, en effet

$$H' * 1 = 1, \quad H * 1' = H * 0 = 0, \quad (1 \neq 0),$$

n'oublions pas que $H * 1$ n'existe pas.

b) Convolution par δ :

$$\begin{aligned}\langle \delta * T, \varphi \rangle &= \langle \delta_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle = \langle T_y, \langle \delta_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_y, \varphi(y) \rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$\delta * T = T * \delta = T.$$

c) Convolution par $\partial_j \delta$:

$$\begin{aligned}\langle \partial_j \delta * T, \varphi \rangle &= \langle T_y, \langle \partial_j \delta_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle = -\langle T_y, \partial_j \varphi(y) \rangle \\ &= \langle \partial_j T, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_j \delta * T = T * \partial_j \delta = \partial_j T.$$

De même pour les dérivées d'ordre supérieur à 1.

Remark 3.2

1. On définit la convolution des distributions et des fonctions par : $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou bien $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), on a

   $$x \to T * \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \quad T * \varphi(x) = \langle T_t, \varphi(t - \cdot) \rangle.$$

   En particulier, $T * \varphi(0) = \langle T_t, \varphi \rangle$.
2. On définit la convolution de deux distributions dont l'une est à support compact par : $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ implique $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

   $$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

   En particulier, $\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{S * \widetilde{\varphi}} \rangle$, avec $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

On a les propriétés suivantes qui sont faciles à vérifier :
Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T * S = S * T, \quad S * (T * U) = (S * T) * U,$$

$$\partial^\alpha (S * T) = \partial^\alpha S * T = S * \partial^\alpha T,$$

avec

$$\operatorname{supp} S * T \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T.$$

Exemple 3.4 *Calcul de* $(x^2+x)*\delta''$. *Nous avons*

$$\begin{aligned}\langle (x^2+x)*\delta'', \varphi\rangle &= \langle \delta'', (x^2+x)\varphi\rangle = ((x^2+x)\varphi(x))''(0)\\ &= 2\varphi''(0)+2\varphi'(0),\end{aligned}$$

ce qui donne $(x^2+x)*\delta'' = 2\delta - 2\delta'$. ■

Nous retournons à l'Exemple 3.2, où nous allons traiter des disrtibutions homogènes.

Exemple 3.5 *Dans* $\mathbb{R}^n$, *on a la distribution* T_m *définie dans* (3.2) *appertient à* $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *pou tout* $m\in\mathbb{N}$. *On pose*

$$T_{m,t}(x) := t^{-n}T_m\left(\frac{x}{t}\right), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\ m=1,2,...$$

On veut démontrer que $\forall V\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$T_{m,t}*V = \int_{S^{n-1}} \Delta_{tx}^m V\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.4}$$

Commençons par

$$\langle T_{m,t}*V,\varphi\rangle = \langle T_{m,t}(x), \langle V(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle, \tag{3.5}$$

on pose

$$\phi(x) := \langle V(y),\varphi(x+y)\rangle \quad \text{et} \quad \phi_t(x) := \phi(tx)\,. \tag{3.6}$$

On a alors (formelement)

$$\begin{aligned}\langle T_{m,t}(x), \langle V(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}T_m\left(\frac{x}{t}\right)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} T_m(z)\,\phi(tz)\mathrm{d}z\\ &= \langle T_m,\phi_t\rangle.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous avons alors

$$\Delta_h^1\phi_t(0) = \phi(th) - g(0) = \Delta_{th}^1\phi(0),$$

$$\Delta_h^2\phi_t(0) = \Delta_h^1(\Delta_h^1\phi_t)(0) = \phi(2th)-\phi(th)+\phi(0) = \Delta_{th}^2\phi(0)$$

$$...$$

$$\Delta_h^m\phi_t(0) = \Delta_{th}^m\phi(0), \quad \forall h\in\mathbb{R}^n.$$

Retournons à (3.7), *on a*

$$\langle T_m,\phi_t\rangle = \int_{S^{n-1}} \Delta_h^m(\phi_t)(0)\mathrm{d}h = \int_{S^{n-1}} \Delta_{th}^m\phi(0)\mathrm{d}h.$$

Mais d'après (3.6) *on a* $\phi(0) := \langle V,\varphi\rangle$. *On remplace dans* (3.5) *; il découle*

$$\begin{aligned}
\langle T_{m,t} * V, \varphi\rangle &= \int_{S^{n-1}} \Delta_{th}^m\Big(\langle V(y), \varphi(x+y)\rangle\Big)(0)\mathrm{d}h = \int_{S^{n-1}} \Delta_{th}^m\Big(\int_{\mathbb{R}^n} V(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y\Big)(0)\mathrm{d}h \\
&= \int_{S^{n-1}} \Delta_{th}^m\Big(\int_{\mathbb{R}^n} V(z-x)\varphi(z)\mathrm{d}z\Big)(0)\mathrm{d}h \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{S^{n-1}} \Delta_{th}^m\Big(V(z-\cdot)\Big)(0)\mathrm{d}h\Big)\varphi(z)\mathrm{d}z \\
&= \langle \int_{S^{n-1}} \Delta_{th}^m\Big(V(z-\cdot)\Big)(0)\mathrm{d}h, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\int_{|x|=1} \ldots = \int_{|-x|=1} \ldots$, *on obtient* (3.4). ■

Remark 3.3 *Nous allons revoir l'Exemple 3.5 dans le chapitre de la transformation de Fourier.*

3.6 Equations de convolution

Soient S et T deux distributions données, cherchons la solutions de l'équation

$$S * X = T. \tag{3.8}$$

Si S admet une distribution notée S^{-1} telle que

$$S^{-1} * S = \delta,$$

alors il suffit de multiplier (3.8) par S^{-1} pour obtenir la solution :

$$X = S^{-1} * T.$$

Exemple 3.6 *On sait que* $H' = \delta$. *Alors l'équation* $\delta' * X = T$ *amet comme solution* $X = H * T$ *car* $\delta' * H = \delta$.

3.7 Exercices

1. Soit $a > 0$, on pose

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < a, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq a. \end{cases}$$

(a) Calculer $f_b * f_a$ pour $a < b$.
(b) Même question $g_b * g_a$ et $h_b * h_a$ où

$$g_a(x) = x f_a(x), \quad h_a(x) = x^2 f_a(x).$$

2. Soient T_1 et $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)(\mathbb{R}^n)$. Calculer $T_1 * T_2$ dans les cas suivants
$T_1 = \delta'$, $T_2 = T$ quelconque.
$T_1 = H'$, $T_2 = 1$.
$T_1 = 1$, $T_2 = H'$.

$T_1 = 1 * \delta'$, $T_2 = H$.
$T_1 = 1$, $T_2 = \delta' * H$.
$T_1 = H(x)\cos x$, $T_2 = H(x)\sin x$.
$T_1 = (1-x)H(x)$, $T_2 = e^x H(x)$.

3. Calculer $(1 * \delta') * H$ et $1 * (\delta' * H)$.

4. Calculer $f * g$ dans les cas suivants :
(i) $f(x) = H(x)\sin x$, $g(x) = H(x)\cos x$.
(ii) $f(x) = (1-x)H(x)$, $g(x) = e^x H(x)$.

5. Soient S et T deux distributions telle que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Démontrer qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta|_{\operatorname{supp} T} = 1$ vérifiant

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \theta(y)\varphi(x+y) \rangle, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Indication il suffit de considérer $T = T_f$ avec f est à support compact puis choisir θ telle que $\theta f = f$.

6. Refaire l'Exemple 3.5 dans $\mathbb{R}$.