Université Mohamed BOUDIAF de M'SILA — Année universitaire 2021/2022

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique — $2^{\text{ème}}$ Année Licence

Département de l'informatique — Durée : 1 H et 30 min

Epreuve finale de module : Méthodes numériques

Exercice 1 : (4 points)

Soit **(S)** le système linéaire suivant:

$$(S): \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 17x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

1. Montrer que le système **(S)** admet une solution unique.
2. Résoudre le système **(S)**.

Exercice 2 : (8 points)

On considère la matrice **A** et le vecteur **b** définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que les processus itératifs de Gauss-Seidel associés au système linéaire **AX=b** convergent, quelque soit le vecteur initial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.
2. Calculer les trois (3) premiers itérés de la méthode de Gauss-Seidel du système **AX=b** en partant de $X^{(0)} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, et estimer l'erreur.
3. Ecrire un algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 3 : (8 points)

Soit $(\mathbf{S_1})$ le système linéaire suivant:

$$(S_1): \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

1. Ecrire le système $(\mathbf{S_1})$ sous la forme matricielle **AX=b**.
2. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système $(\mathbf{S_1})$.
3. Déduire une décomposition de la matrice **A**, (**A=LU**), comme produit d'une matrice triangulaire inférieure **L** par une matrice triangulaire supérieure **U**.
4. Calculer le déterminant de la matrice **A**.
5. Ecrire un algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss.

Bon Courage