Corrigé type de l'examen

Exercice 1 : (4 points)

1. **Le système (S) admet une solution unique).** (1,5 points)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 17 & 3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -3\\ -2\end{pmatrix}}_{b}$$

$\det(A) = -17 \neq 0$. Donc la matrice A est inversible, alors le système (S) admet une solution unique.

2. **La résolution du système (S).** (2,5 points)

Le système (S) est un système Tri-diagonale. (Toutes les méthodes directes sont acceptables)

La solution de (S) est: $\begin{cases} x_1 = 7\\ x_2 = -3\\ x_3 = -1\\ x_4 = 5\end{cases}$

Exercice 2 : (8 points)

1. **Vérification que les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel convergent, quelque soit le vecteur initial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.** (1,5 points)

On a : $\begin{cases}|6| > |2| + |-1|\\ |4| > |1| + |1|\\ |4| > |-2| + |1|\end{cases}$. Donc la matrice A est à diagonale strictement dominante. Alors, les processus itératifs de Gauss-Seidel associés au système linéaire **AX=b** convergent, quelque soit le vecteur initial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2. **Les trois (3) premiers itérés de la méthode de Gauss-Seidel :** (4,5 points)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(7 - 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/6\\ x_2^{(k+1)} = \left(12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)/4\\ x_3^{(k+1)} = \left(15 + 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)/5\end{cases}$$

K	0	1	2	3
x_1	1	1	0.81667	0.96181
x_2	1	2.5	2.07083	2.03142
X_3	1	2.9	2.91250	2.97844
L'erreur		1.9	0.42917	0.14514

3. **L'algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss-Seidel**. (2 points)

- Étant données A, b, $X^{(0)}\left(x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; \ldots; x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$, Tol la précision, et/ou *Nb_iter* le nombre d'itérations.
- Pour *k*=1 jusqu'à *Nb_iter*, ou bien, tant que $Erreur > Tol$, On calcule

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j^{(k)}\right)/A_{i,i};\ \text{pour } i = 1 \text{ jusqu'à } n$$

$$Erreur = \left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|$$

Exercice 3 : (8 points)

1. **La forme matricielle AX=b.** (0,5 points)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}}_{b}$$

2. **La résolution du système (S_1) par la méthode de Gauss.** (3,5 points)

Etape 1 : $\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 2 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{10}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{10}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{7}{10}L_1 \end{array}$; Etape 2 : $\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{18}{5} & \frac{17}{5} & \frac{37}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{17}{5} & \frac{51}{10} & \frac{43}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$

Etape 3 : $\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_3$; On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ ($\hat{A}$ | $\hat{b}$)

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ \frac{1}{10}x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{5}{3} \\ 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc la solution de (S_1) est: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

3. **La décomposition de la matrice A, (A=LU).** (1,5 points)

La matrice $U = \hat{A}$ obtenue dans (Q2), alors,

$$U = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{10} & 4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{10} & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Le déterminant de la matrice A.** (0,5 points)

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = 1(10)(\frac{1}{10})(2)(\frac{1}{2}) = 1.$$

5. **L'algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss.** (2 points)

- L'algorithme d'élimination de Gauss qui va triangulariser la matrice **A**. Il procède de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 1 \text{ jusqu'à } n-1: \\ Ligne_i \leftarrow Ligne_i - \frac{A_{ik}^{(k)}}{A_{kk}^{(k)}} Ligne_k \ \text{ ; pour } i = k+1 \text{ jusqu'à } n \end{cases}$$

- Et suit, on extrait la solution du système suivant l'algorithme de substitution rétrograde:

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{A_{n,n}} \\ x_i = \frac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j\right); \text{ pour } i = n-1 \text{ jusqu'à } 1 \end{cases}.$$