Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Master analyse fonctionnelle

Département de Mathématiques
1^{ere} année S_1 (2021 - 2022)

Examen final (Equations différentielles ordinaires)

Exercice 01 (10 points) : On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2 - 4x^2 \tag{1}$$

On associe à (1) l'équation homogène suivante :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{2}$$

1. Montrer que l'équation (2) admet une solution $y_1 = ax + b$ vérifiant $y_1(1) = 1$.
2. Soit y_2 telle que (y_1, y_2) forme un système fondamentale de l'équation (2).
   i) Montrer que $W(y_1, y_2)$ est une solution de l'équation :
   $$(1-x^2)W' - 2xW = 0 \tag{3}$$
   ii) Trouver W sachant que $W(y_1(0), y_2(0)) = 1$.
   iii) Endéduire une expression de y_2.
3. Trouver une solution particulière $y_p = cx^2$ de l'équation (1).
4. Endéduire la solution générale de l'équation (1).

Exercice 02 (10 points) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit le système des équations différentielles :

$$\begin{cases} y_1'(x) = \alpha y_2(x) \\ y_2'(x) = -\alpha y_1(x) \end{cases} \tag{4}$$

1. On pose $Y = (y_1, y_2)$. Ecrire le système (4) sous forme matricielle $Y'(x) = A.Y(x)$.
2. Calculer A^2, A^3, A^4.
3. Ecrire la forme générale de la matrice A^n $(n \in \mathbb{N})$.
4. Endéduire e^A l'exponentielle de la matrice A.
5. On considère le problème de Cauchy :
   $$\begin{cases} Y'(x) = AY(x) \\ Y(0) = (1, 1) \end{cases} \tag{5}$$
   i) Montrer que le problème (5) admet une solution unique.
   ii) Trouver $Y(x)$ en fonction de x et A.

Corrigé de l'examen final 2021-2022 (EDO)

Exercice 01 (**10 points**) :

1. **(1.5 points)** On pose : $y_1 = ax + b$, alors : $(1-x^2)y_1'' - 2xy_1' + 2y_1 = 0$ ssi $2b = 0$, puisque $y_1(1) = 1$ on trouve $y_1 = x$.
2. $W(y_1, y_2) \neq 0$.
   i) (02 points) On a : $W(y_1, y_2) = y_1.y_2' - y_1'.y_2 = xy_2' - y_2$.
   Donc : $(1-x^2)W' - 2xW = (1-x^2).xy_2'' - 2x(xy_2' - y_2)$.
   Alors : $(1-x^2)W' - 2xW = x(2xy_2' - 2y_2) - 2x(xy_2' - y_2) = 0$.
   ii) (02 points) On a : $(1-x^2)W' - 2xW = 0$, alors : $\dfrac{W'}{W} = \dfrac{2x}{1-x^2}$.
   Alors : $\ln|W| = \ln\left|\dfrac{k}{1-x^2}\right|$ $(k \in \mathbb{R})$ et $W(y_1(0), y_2(0)) = 1$,
   ce qui donne $W(y_1, y_2) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
   iii) (02 points) On a : $W(y_1, y_2) = xy_2' - y_2$, alors : $xy_2' - y_2 = \dfrac{1}{1-x^2}$.
   On trouve $y_2 = -1 + x\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. **(1.5 points)** $y_p = cx^2$, alors : $(1-x^2)y_p'' - 2xy_p' + 2y_1 = 2 - 4x^2$ ssi $c(2-4x^2) = 2 - 4x^2$, ce qui donne $c = 1$, alors $y_p = x^2$.
4. **(01 point)** La solution générales de l'équation (1) est $y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$..
   Alors : $y = x^2 + c_1x - c_2 + c_1x\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Exercice 02 (**10 points**) :

1. **(01 point)** La forme matricielle de système (4) : $Y'(x) = A.Y(x)$, ou $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.
2. **(03 points)** On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors :
   $A^2 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} = -\alpha^2 I$,
   $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha^2 A$,
   $A^4 = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 0 \\ 0 & \alpha^4 \end{pmatrix} = \alpha^4 I$.
3. **(02 points)** On pose : $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$, on touve :
   $A^{4k} = \alpha^{4k}.I$, $\quad A^{4k+1} = \alpha^{4k}.A$, $\quad A^{4k} = -\alpha^{4k+2}.I$, $\quad A^{4k+3} = -\alpha^{4k+2}.A$.
4. **(02 points)** On sais que $e^A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.
   Alors : $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A^{4k}}{(4k)!} + \frac{A^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{A^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{A^{4k+3}}{(4k+3)!}\right)$,
   i.e : $e^A = I\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!} + A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{4k}}{(4k)!} - I\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{4k+2}}{(4k)!} - A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{4k+2}}{(4k)!}$.
   Alors : $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
   On trouve : $e^A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

5. **i) (01 point)** Le problème (5) est linéaire, et la matrice A est constante, donc continue. Alors : le problème (5) admet une solution unique.

   ii) (01 point) On a : $Y(x) = e^{xA}.Y_0$,

   i.e $Y(x) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha x) & \sin()\alpha x) \\ -\sin(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =.$

   Alors : $Y(x) = (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x), \cos(\alpha x) - \sin(\alpha x))$