Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique | Département de Mathématiques
Licence mathématiques LMD | 3^{eme} année S_5 (2021 - 2022)

Examen final (Mesure et intégration)

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 01 (**04 points**) : Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] : f_n(x) = \frac{1+nx}{(1+x)^n}.$$

1. Montrer que f_n est une fonction décroissante pour tout $n \geq 2$.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ converge $\lambda - ppt$ vers $f \equiv 0$.
3. Etudier la convergence uniforme de la suite $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ sur $[0,1]$.

Exercice 02 (**06 points**) : Soit l'espace meusré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. On munit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la mesure μ définit comme suivante :

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad et \quad \forall A = \{n_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{N} : \mu(A) = \sum_{i\in I} \frac{1}{n_i!}$$

1. Calculer $\mu(\{0,1\}), \mu(\mathbb{N})$.
2. Soit la suite des fonctions $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ définie comme suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_k(n) = k\chi(\{k\})(n) = \begin{cases} k & : \quad n = k \\ 0 & : \quad n \neq k \end{cases}$$

   Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} \varphi_k d\mu$.
3. Soit la fonctions φ définie comme suivant : $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$.

i) Monterer que $\varphi = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k$.

ii) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} \varphi d\mu$.

Exercice 03 (**10 points**) : Soit la fonction f définie de $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par :

$$f(t,x) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx}.$$

On définit la fonction F sur $[0,+\infty[$ par : $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dx$.

1. Justifier la mesurabilité de la fonction $x \longmapsto f(t,x)$.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \quad x \in]0,1] \\ e^{-x} & : \quad x \in]1,+\infty[\end{cases}$ est Lebeisgue intégrable.
3. Montrer que : $\forall t > 0 : f(t,x) \leq g(x)$.
4. Endéduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
5. Montrer que : $\forall t > 0 : \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$.
6. Montrer que $\forall t > 0 : F'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$. Endéduire $F(t)$.
7. Calculer $F(0)$, puis déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Corrigé de l'examen final 2021-2022 (Mesure et intégration)

Exercice 01 (04 points) : $\forall x \in [0,1] : f_n(x) = \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}$.

1. **(01 points)** On a : $\forall n \geq 2, \forall x \in]0,1[: f_n'(x) = \dfrac{n(1-n)x}{(1+x)^{n+1}} < 0$.
   Donc ; f_n est une fonction décroissante.
2. **(1.5 points)** On a :
   $\forall x \in]0,1] : \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, et comme $\{0\}$ est $\lambda-$ négligeable, alors $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ converge $\lambda - ppt$ vers $f \equiv 0$.
3. **(1.5 points)** Comme f_n est décroissante, on a :
   $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(0) = 1$.
   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = 1$.
   Alors, la suite $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 02 (06 points) : $\mu(\emptyset) = 0 \quad et \quad \forall A = \{n_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{N} : \mu(A) = \sum\limits_{i\in I} \dfrac{1}{n_i!}$

1. **(01 point)** $\mu(\{0,1\}) = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} = 2, \quad \mu(\mathbb{N}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.
2. **(1.5 points)** $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_k(n) = k\chi(\{k\})(n) = \begin{cases} k & : \ n = k \\ 0 & : \ n \neq k \end{cases}$
   On a : $\varphi_k = k\chi(\{k\}) + 0.\chi(\mathbb{N} \setminus \{k\})$. Donc :
   $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} \varphi_k d\mu = k\mu(\{k\}) + 0.\mu(\mathbb{N} \setminus \{k\}) = \frac{k}{k!}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = n$.
   i) (1.5 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k(n) = \varphi_n(n) + \sum_{k\neq n} \varphi_k(n) = n + \sum_{k\neq n} 0 = n = \varphi(n).$$
   ii) (02 points)
   $$\int_{\mathbb{N}} \varphi d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mu(\{k\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(k-1)!} = e.$$

Exercice 03 (10 points) : $f(t,x) = \dfrac{\sin x}{x} e^{-tx}. \qquad F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)dx$

1. **(01 point)** $x \longmapsto f(t,x)$ est continue, donc elle est mesurable.
2. $x \longmapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : \ x \in]0,1] \\ e^{-x} & : \ x \in]1,+\infty[\end{cases}$

   * **(0.5 points)** La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est localement intégrable sur $]0,1]$, admet une limite fini au point 0. Donc, elle est intégrable sur $]0,1]$.
   * **(0.5 points)** La fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur $]1,+\infty$.
   (0.5 points) Donc, g est intégrable.
3. * **(0.5 points)** pour $x \in]0,1]$ on a : $e^{-tx} \leq 1$, donc : $f(t,x) \leq \dfrac{\sin x}{x}$.
   * **(0.5 points)** pour $x \in]1,+\infty[$ on a : $e^{-tx} \leq e^{-x}$ et $\dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$, donc : $f(t,x) \leq e^{-x}$.

4. **(01 point)** On applique théorème de Lebeisgue au voisinage de $+\infty$, on trouve : $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{t\to+\infty} f(t,x) = 0.$

5. **(0.5 points)** On a : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\sin x.e^{-tx}.$

   * **(0.5 points)** pour $x \in]0,1]$ on a : $e^{-tx} \leq 1$ et $\sin x \leq \dfrac{\sin x}{x}$, donc : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \dfrac{\sin x}{x}$.

   * **(0.5 points)** pour $x \in]1,+\infty[$ on a : $e^{-tx} \leq e^{-x}$ et $|\sin x| \leq 1$, donc : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq e^{-x}$.

6. * **(1.5 points)** On applique théorème de dérivation sous le signe d'intégrale, on trouve :
   $F'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx = \int_0^{+\infty} -\sin x.e^{-tx}dx = \left[\frac{\sin x.e^{-tx}}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos x.e^{-tx}}{t}dx.$
   Alors : $F'(t) = \displaystyle\left[\frac{\cos x.e^{-tx}}{t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x.e^{-tx}}{t^2}dx = -\frac{1}{t^2} + \frac{F'(t)}{t^2}.$
   Donc : $\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) F'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$, i.e $F'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$.
   * **(1.5 points)** $F(t) = \displaystyle\int F'(t) = -\arctan t + c.$
   Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} (-\arctan t + c) = 0$, donc : $c = \dfrac{\pi}{2}$.
   Alors, $F(t) = -\arctan t + \dfrac{\pi}{2}$

7. **(01 point)** D'une part, $F(0) = -\arctan 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
   D'autre part, $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$
   Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$