

Examen final, Février 2022

* On utilisera les notations du cours.

Exercice 1. Donner la définition de : – une distribution régulière, – la norme dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, – la dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, – la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, – la convolution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, – la distribution $\text{vp}_x^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2. Soit $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ si $x \leq 0$. Soit $T(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Démontrer que $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer H' , $(xH)'$, $(x^2H)''$ et T' .
- (2) Calculer $(TH)'$ et $\delta' * T$ si elles existent.

Exercice 3. Soient les fonctions

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{(1-\frac{1}{1-x^2})} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (1) Est-ce que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$? Tracer la courbe de φ "soigneusement".
- (2) On pose $\psi(x) = g\left(\frac{|x|}{2}\right) e^{(1-\frac{1}{1-x^2})}$. Trouver u telle que : $u(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.
- (3) Tracer la courbe de la fonction $f(x) = \varphi(2x - 1)$ "soigneusement".
- (4) Tracer une fonction h définie par : h est paire et de classe C^∞ sur \mathbb{R} , telle que $h(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $h(x+1) = \varphi(x)$ si $x \geq 0$.
Tracer la fonction $\beta(x) = h(x) - h(2x)$.
- (5) Soit $T_j(x) = j e^{-(j+1)^2 x^2}$. Démontrer que $T_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j'$.
- (6) Soient $f(x) = |x|^{-1/2}$ et $k(x) = |x|^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer T_f' .
Est-ce que $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$? Donner une conclusion à partir de $(f)^2$.

Barème :

Ex. 1 : 5

Ex. 2 : 5 = (1 + 1.5) + (1 + 1.5)

Ex. 3 : 10 = (0.5 + 0.5) + 1 + 1 + (0.5 + 1) + (0.5 + 1 + 0.5) + (0.5 + 0.5 + 1.5 + 1)