Université de M'Sila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique / Département de Mathématiques
Master Maths. **S 3/ Analyse fonctionnelle**
– ***Espaces fonctionnels de type de Sobolev*** –

<u>Examen final</u> Février 2022

* On utilisera les notations du cours, en particulier $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$.

Exercice 1.(Cours.) (1) Donner la définition :
(i) des fonctions ρ et γ telle que $\rho(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R})$.
(ii) des opérateurs de convolution S_j et Q_j.
(iii) des espaces $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R})$, $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$.
(2) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. À partir de f , donner une fonction $g \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
(3) Bourquoi $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R})$ est homogène ?
(4) Démontrer que $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}) \subset \dot{B}^{s-\frac{1}{p}}_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient f, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose $h_t(x) = h(tx)$, $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.
(1) Écrire $f * h(x)$.
(2) Soit $f = h'$. Démontrer que $f * h_t(x) = f * h_{1/t}(tx)$.
Généraliser cette formule pour $f = h^{(m)}$ en calculant $f * h_t(x)$ et $f * h_{1/t}(tx)$.
(3) Soit $h \in L_p(\mathbb{R})$. Démontrer que $\|f * h\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_1} \|h\|_{L_p}$.
Si $1 \leq p < \infty$, calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \|f * h_t\|_{L_p}$.
(4) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \|h_t\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$.

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\dot{W}^m_p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad f^{(m)} \in L_p(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|f\|_{\dot{W}^m_p} = \|f^{(m)}\|_{L_p} < \infty\}$$

(1) Soient $f \in \dot{W}^m_p(\mathbb{R})$ et h un polynôme de degré $\leq m-1$. Démontrer que $f+h \in \dot{W}^m_p(\mathbb{R})$, et donner une conclusion.
(2) Démontrer que $f(x-y) = f(x) - yf'(x) + y^2 \displaystyle\int_0^1 (1-t) f''(x-ty) \mathrm{d}t$.
(3) Calculer $Q_j f(x)$ et $\|Q_j f\|_p$ en fonction de f''.
(4) Déduire que Q_j est borné de $\dot{W}^2_p(\mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R})$.
(5) Déduire que Q_j est borné de $\dot{W}^{m+2}_p(\mathbb{R})$ dans $\dot{W}^m_p(\mathbb{R})$.

Barème :
Ex. 1 : 6
Ex. 2 : $8.5 = 1 + (1.5 + 1.5) + (1.5 + 1.5) + 1.5$
Ex. 3 : $5.5 = (1 + 0.5) + 1 + (1 + 0.5) + 0.5 + 1$