Espaces fonctionnels de type de Sobolev

Correction de l'examen final

Février 2022

Exercice 1 (1) voir le cours.

(2) On pose $g = f'''$; alors on a $\hat{g}(\xi) = (i\xi)^3 \hat{f}(\xi)$, d'où $\hat{g}(0) = \hat{g}'(0) = \hat{g}''(0) = 0$, mais $\hat{g}'''(0) = -6i\hat{f}(0)$.

(3) $\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{B}^s_{pq}} \sim \lambda^{s-1/p}\|f\|_{\dot{B}^s_{pq}}$ c'est l'homogénéité ($\forall \lambda > 0$).

(4) Comme $\|Q_j f\|_\infty \leq c\, 2^{j/p}\|Q_j f\|_p$ (voir le cours)

alors $2^{(s-1/p)j}\|Q_j f\|_\infty \leq c\, 2^{js}\|Q_j f\|_p \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{ks}\|Q_k f\|_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$

en passant au $\sup$ ($j \in \mathbb{Z}$) on a

$$\|f\|_{\dot{B}^{s-1/p}_{\infty,\infty}} \leq c\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$$

, c-à-d $\dot{B}^s_{pq} \subset \dot{B}^{s-1/p}_{\infty,\infty}$.

Exercice 2 (1) $f * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, h(x-y)\, dy$.

(2) $f * h_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h'(y)\, h(t(x-y))\, dy$

$$= \underbrace{h(y)h(t(x-y))\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ car } h \in S(\mathbb{R})} + t\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, h'(t(x-y))\, dy$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t(x-y) = z \\ -t\, dy = dz \end{array}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h\left(x - \tfrac{z}{t}\right) h'(z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h'(z)\, h\left(x - \tfrac{z}{t}\right) dz$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h\left(x - \frac{z}{t}\right) = h\left(\frac{1}{t}(tx - z)\right) \\ = h_{1/t}(tx - z) \end{array}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h'(z)\, h_{1/t}(tx - z)\, dz$$

$$= f * h_{1/t}(tx).$$

- $f = h^{(m)}$

$$f * h_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h^{(m)}(y)\, h(t(x-y))\, dy$$

$$= t \int_{-\infty}^{\infty} h^{(m-1)}(y)\, h'(t(x-y))\, dy \quad \text{(par partie)}$$

$$= t^2 \int_{-\infty}^{\infty} h^{(m-2)}(y)\, h''(t(x-y))\, dy$$

$$\cdots$$

$$= t^m \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, h^{(m)}(t(x-y))\, dy \quad m \text{ fois par partie}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t(x-y) = z \\ -t\,dy = dz \end{array}}$$

$$= t^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(x - \frac{z}{t}\right) h^{(m)}(z)\, dz$$

$$= t^{m-1}\, f * h_{\frac{1}{t}}(tx) \;; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

(3) • $\|f * h\|_p = \left\| \int f(y)\, h(\cdot - y)\, dy \right\|_p \leq \int |f(y)|\, \|h(\cdot - y)\|_p\, dy$

mais $\|h(\cdot - y)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |h(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|h\|_p$.

donc $\|f * h\|_p \leq \|h\|_p \int |f(y)|\, dy = \|f\|_1 \|h\|_p$.

• $\|h_t\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(tx)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = t^{-1/p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}$

$$= t^{-1/p} \|h\|_p,$$

donc $\|f * h_t\|_p \leq \|f\|_1 \|h_t\|_p \leq t^{-1/p} \|f\|_1 \|h\|_p$.

mais $\lim_{t \to \infty} t^{-1/p} = 0$ (car $p < \infty$)

donc $\lim_{t \to +\infty} \|f * h_t\|_p = 0$.

(4) Comme $\|h_t\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \sim t^{s-1/p} \|h\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$

alors
$$\lim_{t\to\infty} \|h_t\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \begin{cases} 0 & \text{si } s-\frac{1}{p}<0 \\ +\infty & \text{si } s-\frac{1}{p}>0 \end{cases}$$

si $s-\frac{1}{p}=0$ alors $\exists\, c_1, c_2>0$ tel que
$$c_1 \|h\|_{\dot{B}^{1/p}_{p,q}} \leq \lim_{t\to\infty} \|h_t\|_{\dot{B}^{1/p}_{p,q}} \leq c_2 \|h\|_{\dot{B}^{1/p}_{p,q}}$$

Exercice 3 **(1)** Si $f \in \dot{W}^m_p$ on a $f(x)+x^{m-1} \in \dot{W}^m_p$ car $\left(f(x)+x^{m-1}\right)^{(m)} = f^{(m)}(x)$, donc $f \in S'_m$, de plus on peut définir $\dot{W}^m_p$ modulo $\mathcal{P}_m$.

(2) c'est la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre 2 (voir le cours).

(3) • $\Theta_j f(x) = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\gamma^{-1}(2^j y)\, f(x-y)\, dy$

$$= f(x) \underbrace{2^j \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\gamma^{-1}(2^j y)\, dy}_{\substack{=0 \\ \gamma(0)=0}} - f'(x) \underbrace{2^j \int_{-\infty}^{\infty} y\, \mathcal{F}\gamma^{-1}(2^j y)\, dy}_{=0,\ \gamma'(0)=0} + \text{Reste}$$

donc $\underline{\Theta_j f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^j \mathcal{F}\gamma^{-1}(2^j y)\, y^2 \int_0^1 (1-t) f''(x-ty)\, dt \cdot dy}$

• $\|\Theta_j f\|_p \leq 2^j \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \left|\mathcal{F}\gamma^{-1}(2^j y)\right| \int_0^1 \|f''(\cdot - ty)\|_p (1-t)\, dt\, dy$

$$\leq \|f''\|_p\, 2^j \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \left|\mathcal{F}\gamma^{-1}(2^j y)\right| dy$$

$$\left| \begin{array}{l} 2^j y = z \\ 2^j dy = dz \end{array} \right|$$

$$\underline{\leq c\, 2^{-2j} \|f''\|_p}$$

avec $c = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \left|\mathcal{F}\gamma^{-1}(z)\right| dz < +\infty$, car $\gamma \in \mathcal{D}$.

(4) On a $\|Q_j f\|_p \leq c\, 2^{-2j} \|f\|_{\dot{W}_p^2}$

car $\|f\|_{\dot{W}_p^2} = \|f''\|_p$

donc $Q_j : \dot{W}_p^2 \longrightarrow L_p$ est borné et continu.

(5) On change f par $f^{(m)}$ dans la formule de Taylor (voir (2)) :

$$f^{(m)}(x-y) = f^{(m)}(x) - y f^{(m+1)}(x) + y^2 \int_0^1 (1-t) f^{(m+2)}(x-ty)\, dt$$

On applique Q_j on a

$$Q_j f^{(m)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j} \Psi(2^j y)\, y^2 \int_0^1 (1-t) f^{(m+2)}(x-ty)\, dt\, dy$$

et on a

$$\|Q_j f^{(m)}\|_p \leq c\, 2^{-2j} \|f^{(m+2)}\|_p .$$

mais $Q_j f^{(m)} = (Q_j f)^{(m)}$ car : $\left((h*f)' = h'*f = h*f' \right)$

donc $\|(Q_j f)^{(m)}\|_p \leq c\, 2^{-2j} \|f^{(m+2)}\|_p$

c-à-d $\|Q_j f\|_{\dot{W}_p^m} \leq c\, 2^{-2j} \|f\|_{\dot{W}_p^{m+2}}$

donc $Q_j : \dot{W}_p^{m+2} \longrightarrow \dot{W}_p^m$ borné et continu

Scanné avec CamScanner