Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Socle Commun

Analyse 2
Intégrales et primitives

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\int f(x)dx$$

Présenté par :

Dr. Dahmane BOUAFIA

ANNÉE UNIVERSITAIRE :2020-2022

Table des matières

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$V(x_0)$: voisinage de x_0.
$f \underset{x_0}{=} o(g)$: f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f = o(g)$. : f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f \sim_{x_0} g$: f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
$f \in C^n(I, \mathbb{R})$: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.
$f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$: La dérivée à droite et à gauche en point x_0 (respectivement).
f^{-1} : La fonction réciproque de f.
$D.L$: Développements limités.
$R_n(x)$: Le reste dans la formule de Taylor d'ordre n.
$P_n(x)$: Fonction polynôme d'ordre n.
$\arcsin$: Fonction arcsinus.
$\arccos$: Fonction arccosinus.
$\arctan$: Fonction arctangente.
sh, ch et th : Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques(respectivement).
$argsh, argch$: Fonctions argument (sinus, cosinus) hyperboliques,(respectivement).
$argth$: Fonctions argument tangente hyperboliques.
$deg(P)$: dégré d'un polynôme P.
$\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
$f \in B[a, b]$: Les fonctions f est bornée sur $[a, b]$.
$f \in R[a, b]$: Les fonctions f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x$ la somme de Darboux inférieure de f où $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x$ la somme de Darboux supérieure de f où $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

$R_{\sigma,t}(f) := \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$ La somme de Riemann de f associée à σ où $t = (t_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ l'intervalle limitée de f où F une primitive de f sur $[a, b]$.

$\int f(x)dx := F(x) + c$ l'intervalle illimitée de f $[a, b]$ où F une primitive de f et c est une constante quelconque.

(EDL) : Equation différentielle linéaire.
(EH) : Equation différentielle homogène.
(EBr) : Equation différentielle de Bernoulli.
(ER) : Equation différentielle de Riccati .
(ELg) : Equation différentielle de Lagrange.
$PPCM(.,.)$: Le plus petit commun multiple.

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$V(x_0)$: voisinage de x_0.
$f \underset{x_0}{=} o(g)$: f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f = o(g)$. : f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f \sim_{x_0} g$: f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
$f \in C^n(I, \mathbb{R})$: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.
$f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$: La dérivée à droite et à gauche en point x_0 (respectivement).
f^{-1} : La fonction réciproque de f.
$D.L$: Développements limités.
$R_n(x)$: Le reste dans la formule de Taylor d'ordre n.
$P_n(x)$: Fonction polynôme d'ordre n.
arcsin : Fonction arcsinus.
arccos : Fonction arccosinus.
arctan : Fonction arctangente.
sh, ch et th : Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques(respectivement).
$argsh, argch$: Fonctions argument (sinus, cosinus) hyperboliques,(respectivement).
$argth$: Fonctions argument tangente hyperboliques.
$deg(P)$: dégré d'un polynôme P.
$\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
$f \in B[a, b]$: Les fonctions f est bornée sur $[a, b]$.
$f \in R[a, b]$: Les fonctions f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x$ La somme de Darboux inférieure de f où $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.
$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x$ La somme de Darboux supérieure de f où $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.
$R_{\sigma,t}(f) = \ := \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$ La somme de Riemann de f associée à σ où $t = (t_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que $t_k \in [x$
$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ l'intervalle limitée de f où F une primitive de f sur $[a, b]$.
$\int f(x)dx := F(x) + c$ l'intervalle illimitée de f $[a, b]$ où F une primitive de f sur $[a, b]$ et c est une constante quelconque.
(EDL) : Equation différentielle linéaire.

(EH) : Equation différentielle homogène.
(EBr) : Equation différentielle de Bernoulli.
(ER) : E différentielle de Riccati .
(ELg) : Equation différentielle de Lagrange.
$PPCM(.,.)$: Le plus petit commun multiple.

CHAPITRE 2

INTÉGRALE DE RIEMANN ET CALCUL DE PRIMITIVES

Sommaire

2.1 Intégrale de Riemann

2.1.1 Motivation

Dans ce chapitre nous présenterons le concept d'intégration de Riemann pour des fonctions finies ainsi que continues sur un intervalle compact (borné et fermé $[a, b]$), mais avant cela Nous essaierons de expliquer le debut de l'idée de ce concept mathématique important.
$\star$ On divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalle égaux, et pour chaque sous-intervalle, nous construisons un rectangle s'étendant de l'axe xx' à tout point de la courbe $y = f(x)$ au-dessus du sous-intervalle. Peu importe un point particulier (voir figure 2.8).
$\star$ Pour chaque n, l'aire totale des rectangles peut être présentée comme une approximation de l'aire exacte sous la courbe à travers l'intervalla $[a, b]$. De plus, il est intuitivement évident qu'avec une augmentation de n, ces approximations s'amélioreront mieux et l'aire exacte se rapprochera d'un maximum (voir figure 2.2).

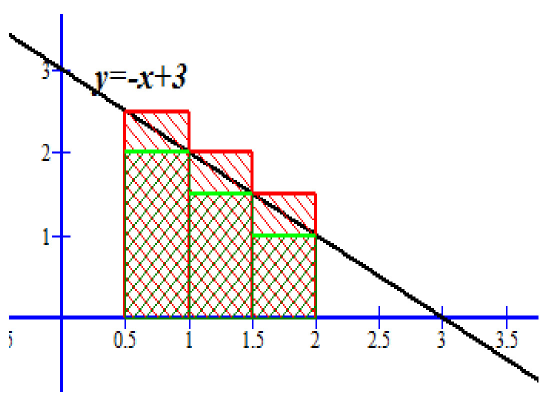


FIGURE 2.1 – Une subdivision moins fine

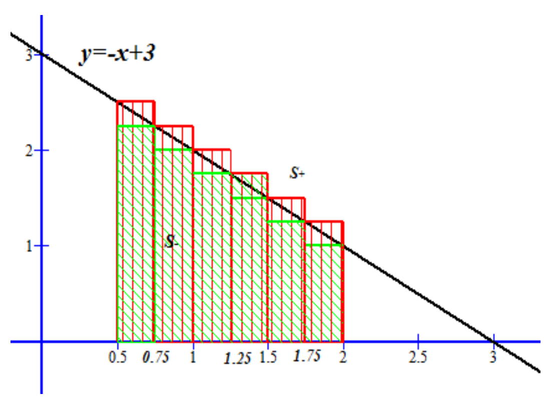


FIGURE 2.2 – Une subdivision plus fine

Pour illustrer davantage cette idée, nous donnons une approximation de l'aire sous la courbe $y = -x + 3$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Nous allons commencer par diviser l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et prendre ces deux subdivision $\sigma_+ = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ et $\sigma_- = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$, alors, on a $S_+ = \frac{1}{2}\left\{\frac{5}{2} + 2 + \frac{3}{2}\right\} = 3$, et $S_- = \frac{1}{4}\left\{\frac{9}{4} + 2 + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1\right\} = \frac{39}{16}$.

Comme $S = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{21}{8}$, donc, on obtient

$$S_- = \frac{39}{16} \simeq 2.44 < S = \frac{21}{8} \simeq 2.63 < S_+ = 3.$$

2.2 Intégrales de fonctions en escalier.

Nous allons tout d'abord donner la définition d'une subdivision associée à un intervalle fermé borné $[a, b]$.

2.3 Subdivision d'un segment

Définition 2.1. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ finie strictement croissante tels que

$$a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

On appelle le pas de la subdivision σ la quantité donné par $\delta(I) = \sup_{0 \leq k \leq n-1} \{x_{k+1} - x_k\}$.

Remarque 2.1. Une subdivision de $[a, b]$ est régulière si tous les $x_{k+1} - x_k$ sont égaux, et dons ce cas là, on a $x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k \in \{0, 1, ..., n\}$. Le nombre $\delta = \frac{b-a}{n}$ est le pas uniforme de cette subdivision.

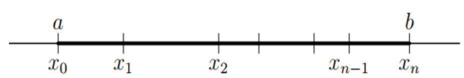


FIGURE 2.3 – Subdivision de $[a, b]$.

Exemple 2.1. Soit l'intervalle $I = [0, 1]$, alors

1. $\sigma_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\sigma_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ et $\sigma_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}1\right\}$ sont des subdivisions de I et il est claire que elle sont uniformes de pas respectivement $\delta_1 = \frac{1}{2},\ \delta_2 = \frac{1}{3}$ et $\delta_3 = \frac{1}{4}$
2. $\sigma_2 = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, (où $n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2$) est une autre subdivision, mais cette fois le pas est égale a $\delta = \frac{1}{n}$.

2.4 Subdivision plus fine qu'une autre

Définition 2.2. Soit σ_1 et σ_2 deux subdivisions d'un segment $[a, b]$. On dit que σ_1 est plus fine que σ_2 si et seulement si tout élément de la famille σ_2 est élément de la famille σ_1, c'est-à-dire $\sigma_2 \subset \sigma_1$.

Exemple 2.2. Dans l'exemple 2.1, on a σ_3 est plus fine que σ_1.

Proposition 2.1. *Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions d'un segment $[a,b]$. Il existe une subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ_1 et σ_2.*

Démonstration - Il suffit de considérer la famille $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq N}$ dont les éléments sont ceux de σ_1 et ceux de σ_2 ordonnés dans l'ordre croissant et où N est le cardinal de la famille ainsi construite. σ est plus fine que σ_1 et σ_2. ■

2.4.1 Fonction en escalier

Définition 2.3. Soit f est une fonction définie sur l'intervalla $I = [a,b]$. On dit f en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. du $[a,b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, i.e.,

$$\forall k \in \{0,1,..,n\},\ \exists c_k \in \mathbb{R},\ x \in]x_k, x_{k+1}[: \quad f(x) = c_k.$$

On dit alors que la subdivision σ est associée à f.
On notera $\xi([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs réelles

Exemple 2.3. La fonction f définie sur l'intervalle $[-1,3]$ par $f(x) = [x]$, (partie entière de x), est une fonction en escalier.

Proposition 2.2. *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\mid f \mid$, $f+g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

Remarque 2.2.
1. Si σ est une subdivision associée à f alors toute subdivision plus fine est encore associée à f.
2. Une fonction constante est une fonction en escalier.

Proposition 2.3. *Toute fonction $\varphi \in \xi[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.*

Démonstration - Soient φ une fonction en escalier et $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. une subdivision qui lui est associée. On a donc

$$\forall k \in \{0,1,..,n\},\ \exists c_k \in \mathbb{R},\ x \in]x_k, x_{k+1}[: \quad \varphi(x) = c_k.$$

En posant $M_1 = \max\limits_{0\leq k\leq n-1}\{\mid c_k \mid\}$, et $M = \max\limits_{0\leq k\leq n-1}\{M_1, \mid \varphi(x_0) \mid, ..., \mid \varphi(x_n) \mid\}$, alors, nous avons que $\forall x \in [a,b]: \quad \varphi(x) \leq M$. ■

2.5 Intégrale de Riemann d'une fonction en escaliers

Définition 2.4. Soit une fonction en escalier $\varphi \in \xi[a,b]$ et $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. une subdivision associée à φ. Soient $c_k \in \mathbb{R},\ (k \in \{1,...,n-1\})$ tels que :
$\forall x \in]x_k, x_{k+1}[: \quad \varphi(x) = c_k$. On définit l'intégrale de la fonction φ entre a et b comme étant le nombre réel

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k(x_{k+1} - x_k).$$

Exemple 2.4. Pour $\varphi(x) = [x]$. Alors $\int\limits_{-1}^{3} \varphi(x)dx = -1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 2.$

Théorème 2.1. *Soient φ une fonction en escalier sur $[a;b]$ et et $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. une subdivision associée à φ, et que sur $]x_k; x_{k+1}[$, φ prenne la valeur c_k, $(k \in \{1, ..., n-1\})$. Le réel $I_\sigma = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} c_k(x_{k+1} - x_k)$ est indépendant du choix de la subdivision σ associée à φ.*

Démonstration - Soit σ et σ' deux subdivisions associées à φ. On suppose pour commencer que σ' est plus fine que σ Soit $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, l'on pouvait écrire σ' sous la forme $\sigma : a = x_{0,0} < x_{0,1} < ...x_{0,k_0} < x_{1,1} < ....x_{n-1,1} < ... < x_{n-1,k_{n-1}} < x_n = b$ avec $x_{k,i_k} = x_{k+1}$ Maintenant, puisque φ prend la valeur c_k sur l'intervalle $]x_k; x_{k+1}[$, φ prend aussi la valeur c_k sur les intervalles $]x_{k-1,i_{k-1}}, x_{k,1}[,]x_{k,1}, x_{1,2}[, ...,]x_{k,i_k-1}, x_{k,i_k}[$. En posant $x_{k,0} = x_{k-1,i_{k-1}}$, on a donc

$$I_{\sigma'} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{j=1}^{i_k} c_k(x_{k,j} - x_{k,j-1}) = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k \sum_{j=1}^{i_k} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) = \sum_{j=1}^{i_k} c_k(x_{k+1} - x_k) = I_\sigma.$$

Soient maintenant σ et σ' deux subdivisions associées à φ quelconques. On sait que $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ'. D'après ce qui précède, on a donc $I_\sigma = I_{\sigma\cup\sigma'} = I_{\sigma'}$. ■

Remarque 2.3.

1. Si φ est la fonction constante égale à 1 (sauf en un nombre fini de points), alors $I(\varphi) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx = b - a.$
2. Si φ est la fonction identiquement nulle sauf en un nombre fini de points, alors $I(\varphi) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0.$

Propriétès 2.1. Soient $f, g \in \xi[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

1. Si f est positive, alors $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$
2. (Linéarité) $\int\limits_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$

Démonstration -

1. Ceci résulte directement de la définition, car tous les termes de la somme sont positifs.
2. Si σ_f une subdivision adaptée à f et σ_g une subdivision adaptée à g, il e clair que $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$ adaptée à $\lambda f + \mu g$. La calcul de $\int\limits_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx$ à partir de σ, donne immédiatement le résultat.

■

On générale, on a les propriétés suivantes,

Propriétès 2.2. Soient $f, g \in R[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $\lambda f \in \mathbb{R}$.
2. $f + g \in \mathbb{R}$.
3. Si $f \geq 0$, alors $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

   En particulier, on a
$$| \int_a^b f(x)dx | \leq \int_a^b | f(x) | dx.$$

Démonstration - On montre 4. Comme $g - f$ est positive, alors, par linéarité, on a
$$\int_a^b (g - f)(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{ d'où le résultat.}$$
D'après l'inégalité $- | f(x) | \leq f(x) \leq | f(x) |$ pour tout $x \in [a, b]$. On en déduit
$$-\int_a^b | f(x) | xd \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b | f(x) | dx.$$
On a donc,
$$| \int_a^b f(x)dx | \leq \int_a^b | f(x) | dx.$$
■

Proposition 2.4. *(Relation de Chasles) Soit f une fonction en escalier sur le segment $[a; b]$ et $c \in]a, b[$. Alors,*
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Démonstration - Soit σ une subdivision associée à f. On prend σ_c la subdivision définie par $\sigma_c = \sigma \cup \{c\}$. Par le théorème 2.1, et avec cette subdivision le résultat est immédiat. ■

2.6 Intégrale d'une fonction bornée sur segment $[a, b]$

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ et à valeurs réelles. On note les fonctions bornée sur $[a, b]$ par $B[a, b]$.
Soit $f \in B[a, b]$, on pose :
$$\xi_-[a, b] = \{\psi \in \xi[a, b] : \ \forall x \in [a, b], \ \psi(x) \leq f(x)\},$$

$$\xi_+[a,b] = \{\varphi \in \xi[a,b] : \ \forall x \in [a,b], \ f(x) \leq \varphi(x)\}.$$

Les deux ensembles $\xi_+[a,b]$ et $\xi_-[a,b]$ ne sont pas vides. En effet, puisque f est bornée sur $[a,b]$, donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ vérifiant,

$$\forall x \in [a,b] : \ m \leq f(x) \leq M.$$

Alors, on peut choisir les fonctions en escalier φ et ψ comme suit

$$\forall x \in [a,b] : \ \varphi(x) = M \text{ et } \psi(x) = m.$$

Donc ce cas là, on a $\varphi(x) \in \xi_+[a,b]$ et $\psi \in \xi_-[a,b]$.
On pose aussi :

$$I_1 = \{I(\psi) : \ \psi \in \xi_-[a,b]\} \text{ et } I_2 = \{I(\varphi) : \ \varphi \in \xi_+[a,b]\}.$$

D'autre part, pour toute $\psi \in \xi_-[a,b]$ et $\varphi \in \xi_+[a,b]$, on a

$$\forall x \in [a,b] : \psi(x) \leq \varphi(x) \Rightarrow I(\psi) \leq I(\varphi)$$

c'est-à-dire la partie I_1 n'est pas vide et est majorée, elle admet, donc une borne supérieure, et également en cequi concerne la partie I_2, elle n'est pas vide et minorée, don elle accepte une borne inférieure. Par conséquent, nous posons :

$$I_- = \sup I_1 \text{ et } I_+ = \inf I_2.$$

Définition 2.5. Soit $f \in B[a,b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si $I_- = I_+$. On note

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = I_- = I_+.$$

On note l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann par $deCauchy.$

Remarque 2.4. Il est utile de noter que si f est une fonction intégrable sur I alors f est bornée.

2.6.1 Critère d'intégrabilité de Cauchy

Théorème 2.2. *Soit $f \in B[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \leq f \leq \varphi_n \textit{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)(x)dx = 0.$$

Démonstration -

1. Si f est intégrable alors $I_- = I_+ = I(f)$. Par la caractérisation du borne supérieure, il existe une suite $\psi \in \xi_-[a,b]$ et $\varphi \in \xi_+[a,b]$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

   D'où le résultat dans un sens.

2. Inversement, si il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \leq f \leq \varphi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)(x)dx = 0.$$
Alors comme on a
$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_a^b \psi_n(x)dx \leq I_- \leq I_{+\leq} \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$
on en déduit que
$$I_+ - I_- \leq \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)(x)dx,$$
Ce qui prouve que $I_+ = I_-$. De plus on a aussi
$$\forall n \in \mathbb{N} : I_- - \int_a^b \psi_n(x)dx \leq \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]dx,$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_a^b \varphi_n(x)dx - I_+ \leq \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]dx,$$
On conclut facilement maintenant.

■

Remarque 2.5. le théorème 2.2 est équivalente à la condition suivante
$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi_\varepsilon,\ \psi_\varepsilon \in \xi[a,b], \quad \forall x \in [a,b] : \quad \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \\ \text{et} \quad \int_a^b (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)dx \leq \varepsilon \end{cases}$$

Propriétès 2.3. Soient $f, g \in R[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
1. $\lambda f \in R[a,b]$.
2. $f + g \in R[a,b]$.
3. Si $f \geq 0$, alors $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. $fg \in R[a,b]$.

Démonstration - Comme $f,\ g \in \mathbb{R}$. Alors, il existe des suites $(\psi_n),\ (\varphi_n),\ (\theta_n)$ et (ϑ_n) de fonctions en escalier telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \leq f \leq \varphi_n \text{ et } \theta_n \leq g \leq \vartheta_n, \tag{2.1}$$
d'après (2.1), on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \vartheta_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

1. (a) Si $\lambda > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda\psi_n \leq \lambda f \leq \lambda\varphi_n$, on passe à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\psi_n(x)dx = \int_a^b \lambda f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(x)dx.$$

Donc, $\lambda f \in R[a, b]$.

Mais, d'après propriéte 2.1, on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\psi_n(x)dx = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx$ et $\lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(x)dx$, on obtient donc,

$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

   (b) Si $\lambda > 0$, on inverse les inégalités, mais les arguments sont les mêmes.

   (c) Pour $\lambda = 0$ est évident.

2. On utilisant (2.1), nous avons que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n + \theta_n \leq f + g \leq \varphi_n + \vartheta_n. \tag{2.2}$$

Si on passe à la limite dans (2.2), on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_a^b [\psi_n + \theta_n](x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_a^b [\varphi_n + \vartheta_n](x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \vartheta_n(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

On conclut facilement maintenant.

3. Soit la fonction en escalier φ défine par $\forall x \in [a, b] : \ \varphi(x) = 0$. Alors, on obtient $0 \leq I_- = I_+$.

4. Montrons 5. Supposons que f et g sont positives. D'après (2.1), et comme $f, \ g$ sont bornées, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \psi_n \leq f \leq \varphi_n \leq M \ \text{ et } \ 0 \leq \theta_n \leq g \leq \vartheta_n \leq M. \tag{2.3}$$

$$\int_a^b (\varphi_n - \psi_n)dx < \frac{\varepsilon}{2M} \ \text{ et } \ \int_a^b (\vartheta_n - \theta_n)dx < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.4}$$

Comme tous les mombres des inégalités (2.3) sont positives, alors, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \psi_n\theta_n \leq fg \leq \varphi_n\vartheta_n,$$

et

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_n \vartheta_n - \psi_n \theta_n &= \varphi_n(\vartheta_n - \theta_n) + \theta_n(\varphi_n - \psi_n) \\ &\leq M(\vartheta_n - \theta_n) + M(\varphi_n - \psi_n). \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_a^b (\varphi_n \vartheta_n - \psi_n \theta_n) dx \leq M \int_a^b (\vartheta_n - \theta_n) dx + M \int_a^b (\varphi_n - \psi_n) dx < \varepsilon.$$

Ceci montre que fg est intégrable.
Dans le cas général, comme $f,\ g$ sont bornées il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les fonctions $A+f$ et $A+g$ soient positives. Alors, selon ce qui précède le produit $(A+f)(A+g) \in R[a,b]$. Comme on a $fg = (A+f)(A+g) = fg + A(f+g) + A^2$ et $A(f+g),\ A^2 \in R[a,b]$. Alors, par conséquant, fg l'est aussi.

■

Exemple 2.5. Soit la fonction f défine par $f(x) = 2x$ sur $[0,1]$. On considère la subdivision uniformme $\sigma : \left(\frac{k}{n}\right),\ k \in \{0,1,...,n,\}$ et on définit les fonctions en escalier $\psi_n,\ \varphi_n$ sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[,\ (k = 0,1,...,n-1)$ par $\varphi_n(x) = \frac{2k}{n},\ \psi_n(x) = \frac{2(k+1)}{n}$, et on a donc $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Calculons les intégrales maintenant

$$\int_0^1 \varphi_n(x) dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2k}{n}\frac{1}{n} = \frac{2(n-1)}{2n}.$$

$$\int_0^1 \psi_n(x) dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2k}{n}\frac{1}{n} = \frac{2(n+1)}{2n}.$$

Donc on a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{2(n-1)}{2n} \leq I_- \leq I_+ \leq \frac{2(n+1)}{2n}. \tag{2.5}$$

On passe à la limite dans (2.5), on obtient

$$I_- = I_+ = 1 = I(f)$$

Exemple 2.6. (Une fonction bornée, non intégrable) Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & si\ x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Il est clair que f est bornée, car $\forall x \in [0,1] : 0 \leq f \leq 1$. Posons

$$I_1 = \{I(\varphi) : \varphi \in \xi_-[0,1]\} \text{ et } I_2 = \{I(\psi) : \psi \in \xi_+[0,1]\}.$$

Alors, on a $\varphi \in \xi_-[0,1] \Rightarrow \varphi \leq 0$ et $\psi \in \xi_+[0,1] \Rightarrow \psi \geq 1$. Si on choisir les fonctions en escalier $\varphi_0 = 0$ et $\psi = 1$, on a donc

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \leq \int_0^1 \varphi_0(x) dx = 0 \text{ et } \int_0^1 \psi(x) dx \geq \int_0^1 \psi_0(x) dx \geq 1.$$

Donc $I_- = \sup I_1 = 0$ et $I_+ = \inf I_2 = 1$. Comme $I_- \neq I_+$ alors f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

2.7 Sommes de Darboux.

Soit f une fonction dans $B[a, b]$. Pour définir son intégrale, on va approcher f par des fonctions en escalier. Donc, on a posin a une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$. Puis, on pose

$$\forall k \in 1, ..., n : \; m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k} f(x) \text{ et } \; M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k} f(x).$$

On définit les fonctions en escalier pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$ et $\forall k \in 1, ..., n$ par,

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \tag{2.6}$$

et

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x). \tag{2.7}$$

Alors, nous avons donc, les définitions suivantes

Définition 2.6. (Sommes de Darboux) On appelle somme de Darboux inférieure de f associée à σ l'intégrale de la fonction en escalier (2.6) tel que

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})M_k$$

et somme de Darboux supérieure de f associée à σ l'intégrale de la fonction en escalier (2.7) tel que

$$s_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})m_k.$$

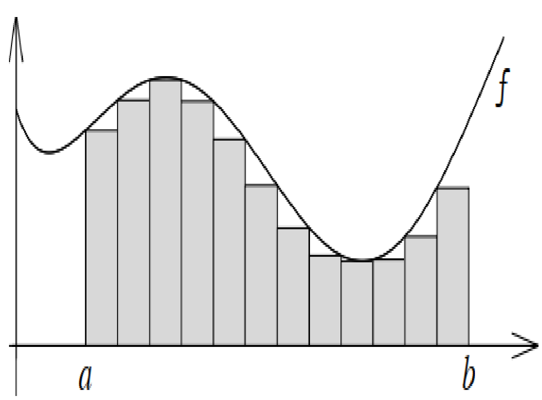


FIGURE 2.4 – Approximation de l'intégrale de f par une somme de Darboux inférieure

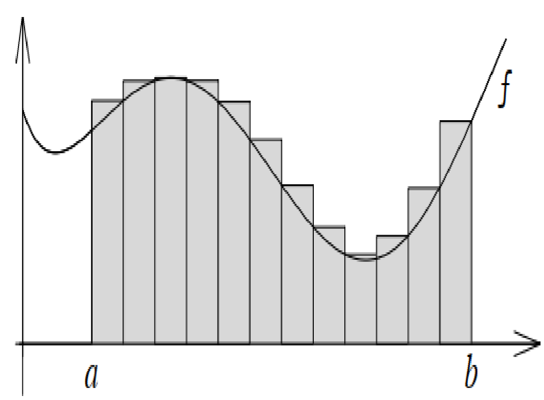


FIGURE 2.5 – Approximation de l'intégrale de f par une somme de Darboux supérieure

Proposition 2.5. *Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$ telle que σ' soit plus fine que σ, alors, on a*

$$s_\sigma(f) \leq s_{\sigma'}(f) \leq S_\sigma(f) \leq S_{\sigma'}(f).$$

Proposition 2.6. *la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intérvalle $[a,b]$ si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivisions σ de $[a,b]$ tel que*

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) < \varepsilon.$$

Exemple 2.7. Soit la fonction $f(x) = x^2$, et $[a,b] = [0,1]$, on calcule $\int_0^1 f(x)dx.$

Posons $\sigma : (x_k) = (\frac{k}{n})$, $\Delta x = (x_{k-1} - x_k) = \frac{1}{n}$ et $k \in \{1, ..., n\}$, alors, on a

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} x^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}, \text{ et } M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} x^2 = \frac{k^2}{n^2}.$$

Les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f associée à σ sont

$$s_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n}(k-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Donc, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(S_\sigma - s_\sigma) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Par conséquence f est intégrable sur $[0,1]$, et on a

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} S_\sigma = \lim_{n\to+\infty} s_\sigma = \frac{1}{3}.$$

2.8 Quelques fonctions Riemann-intégrables

2.8.1 Les fonctions monotones

Théorème 2.3. *Chaque fonction monotone sur l'intervalle $[a,b]$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration -

1. Si $f \equiv 0$ sur $[a,b]$, donc f est en escalier, c'est-à-dire $f \in R[a,b]$.
2. Si $f \in R[a,b]$ alors on a aussi $-f \in R[a,b]$. Donc, il suffit de prouver le théorie pour les fonctions croissante et bornée sur $[a,b]$.
3. Posons $f \in B[a,b]$, et croissante. Soit la subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$, on a don

$$\forall k \in \{1, ..., n\} : \; f(x_{k-1}) \le m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} \le M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} \le f(x_k).$$

Alors on a

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})(M_k - m_k) \leq \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant la subdivision uniforme $\sigma = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. Alors, on peut choisir n à la forme qui vérifie l'inégalité suivante $\frac{(b-a)(f(b) - f(a)}{n} < \varepsilon$. Par conséquent, d'après l'inégalité précédente, on a

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a)}{n} < \varepsilon.$$

■

Exemple 2.8. Voir l'exemple 2.7.

2.8.2 Les fonctions continues

Théorème 2.4. *Chaque fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration - Comme $f \in B[a, b]$ est continue, alors elle est uniformément continue sur $[a, b]$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in [a, b] : \ |x - x'| > \alpha \Rightarrow | f(x) - f(x') | < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant la subdivision uniforme $\sigma = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. On définit les fonctions en escalier ψ et φ par

$$\forall x \in]x_{k-1}, x_k[: \ \psi(x) = f(x_k) - \varepsilon, \ \psi(x_k) = f(x_k),$$

$$\forall x \in]x_{k-1}, x_k[: \ \varphi(x) = f(x_k) + \varepsilon, \ \varphi(x_k) = f(x_k).$$

Cela donne $\forall x \in [a, b] : \ \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Dutre part on a

$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx = 2\varepsilon \int_a^b dx = 2\varepsilon(b - a).$$

Ce qui signifie que f est intégrable. ■

Exemple 2.9. Soit $f(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sigma : \left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, $(k \in \{1, ..., n\})$. Alors, on a

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) = \frac{\pi}{2n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_\sigma(f) = 1$

2.9 Sommes de Riemann

Soit f une fonction dans $B[a,b]$. Pour définir son intégrale, on va approcher f par des fonctions en escalier. Donc, on a posin a une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$ et la famaille $t = (t_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Définition 2.7. On appelle somme de Riemann de f associée à σ le réel

$$R_{\sigma,t}(f) = \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k).$$

Remarque 2.6. Si on pose $\phi(x) = f(t_k),\ \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$. Alors la somme de Riemann $R_{\sigma,t}(f)$ devient l'intégrale de la fonction en escalier ϕ.

De la propriété 2.2 pour les fonctions en escalier, on déduit que ces sommes vérifient la propsition suivantes

Proposition 2.7.

$$s_\sigma(f) \leq R_{\sigma,t}(f) \leq S_\sigma(f).$$

Démonstration - Ceci résulte du fait que si $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$, alors pour tout $k = 1, ..., n$, on a

$$\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \leq f(t_k) \leq \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

■

Théorème 2.5. *Soit $f \in B[a,b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur l'intérvalle $[a,b]$ si et seulement s'il existe un réel l vérifié*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta,\ \forall \sigma \text{ de } [a,b] :\ \delta(\sigma) < \eta \Rightarrow \mid R(f) - l \mid < \varepsilon.$$

Dans ce cas là $l = \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Corollaire 2.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors les deux suites suivantes :*

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\big(a + k\frac{(b-a)}{n}\big) \text{ et } v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\big(a + k\frac{(b-a)}{n}\big)$$

sont convérgentes vers la même limite, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \int_a^b f(x)dx.$$

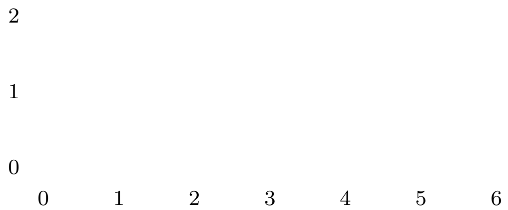


FIGURE 2.6 – Approximation de l'intégrale de f par u_n

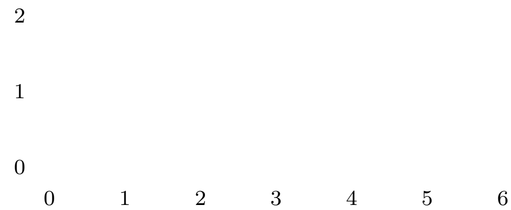


FIGURE 2.7 – Approximation de l'intégrale de f par v_n

Remarque 2.7. (Cas particulier) Si $[a, b] = [0, 1]$, alors, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\Big(\frac{1}{n}\Big) \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Exemples 2.1. 1. On calcule la limite de la suite suivante : $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

On peut écrire u_n comme suit $u_n = \dfrac{1}{n}\Big(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+...+\sqrt{\dfrac{n}{n}}\Big)$. Alors u_n est une suite de Riemann associée la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur et $[0, 1]$, donc, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2. La somme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{n}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 xdx$

2.9.1 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Propriétés des fonctions intégrables au sens de Riemann est dérivée des propriétés des fonctions en escalier intégrables.

Propriétès 2.4. Soient $f, g \in R[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $\lambda f \in R[a, b]$.
2. $f + g \in R[a, b]$, et $fg \in R[a, b]$.
3. Si $f \geq 0$, alors $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. Si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. $|\displaystyle\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

6. Pour tout $c \in]a,b[$ on a $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasle).

7. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

8. Si f continue et positive, alors $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$

9. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

Nous allons démontrer certaines de ces propriétés et laisser le reste au lecteur

Démonstration -

1. $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})(\lambda f)(t_k) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})f(t_k) = \lambda \int_a^b f(x)dx$

2.
$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})(f+g)(t_k) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})f(t_k) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})g(t_k) \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

4. Si $f \geq 0$, alors $g - f \geq 0$, donc $\int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0$, par conséquent, d'après la propriété 3, on obtient $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

8. (a) Si $f \equiv 0$, alors $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ (évident).

   (b) (Inversement) Si $f \equiv 0$, $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$ dans ce cas là, on a $f(x_0) > 0$ et comme f est continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cela donne $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, on choisir $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$ donc, on obtient $\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < 0 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$. Par conséquant

$$\int_a^b f(x)dx > \int_{x_0}^{x_0+\alpha} f(x)dx > \frac{\alpha}{2} f(x_0) > 0.$$

Ce qui est une contradiction.

■

Proposition 2.8. *Soient f une fonction continue et itégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$, Alors, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Démonstration - Si on pose $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, et $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Alors, d'après la propriété 4, on a $m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx$, c'est-à-dire $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. ■

2.9.2 Première formule de la moyenne

Théorème 2.6. *Soient f une fonction continue sur $[a, b]$, la fonction $g \in R[a, b]$ et positive. On désigne par m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur $[a, b]$. Alors il existe $k \in [m, M]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration - Par l'hypothèse $g \geq 0$, on a $mg \leq fg \leq Mg$ et donc

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{2.8}$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors l'encadrement précédent assure que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, et k arbitraire, donc on peut prendre $k = \frac{m+M}{2}$.
Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, alors on divise (2.8) par $\int_a^b g(x)dx$, on obtient

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b f(x)g(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M,$$

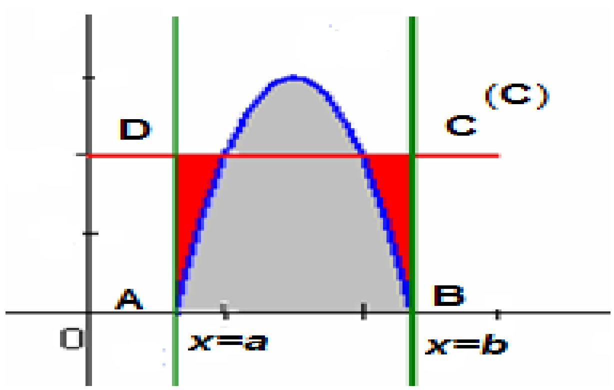
est un élément de $[m, M]$. Comme f est continue, on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver c. ■

Corollaire 2.2. *Si pour tout $x \in [a,b]$ on a $g(x) = 1$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ vérifiant*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est dit valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$.

Remarque 2.8. (Illustration graphique) Dans le cas où est positive sur $[a,b]$, la valeur moyenne $f(c)$ de la fonction est la hauteur du rectangle $ABCD$ de base $(b-a)$ ayant la même aire que l'aire sous la courbe représentative de f entre a et b (voir le figure au-dessus)



Exemple 2.10. Soit $f(x) = 3x^2$ sur $[0,1]$. Alors, la valeur moyenne de f est $\frac{1}{1-0}\int_0^1 3x^2 = [x^3]_0^1 = 1$.

2.9.3 Deuxième formule de la moyenne

Théorème 2.7. *Soit f une fonction positive décroissante de $[a,b]$ et $g \in R[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^c g(x)dx.$$

Démonstration - On distingue deux cas

1. Si la fonction f en escalier, il existe donc une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$ et des constantes $c_1, ..., c_n$, telles que

$$\forall x \in]x_{k-1}, x_k[,\ (k \in \{1,...,n\}) : f(x) = c_k.$$

Posons $G(t) = \int_a^t g(x)dx$. Maintenant, on montre que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonction $H(t) = f(a)G(t)$. Alors, on

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{k=1}^{k=n}(G(x_k) - G(x_{k-1}))c_k \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1}(c_k - c_{k-1})G(x_k) = G(x_n)c_n - G(x_0)c_1 = G(x_n)c_n\end{aligned}$$

Si on note m et M respectivement l'inf et le sup de la fonction G sur $[a,b]$, alors

$$mc_1 \leq \sum_{k=1}^{k=n}(G(x_k) - G(x_{k-1}))c_k \leq Mc_1.$$

Commme $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = c_1$, Nous avons donc bien prouvé que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire de la fonction H. La conclusion découle aisément.

2. Si f n'est pas en escalier, on considère la subdivision uniforme $\sigma : a + k\dfrac{b-a}{n},\ (k \in \{0, ..., n\})$ de $[a,b]$ et les deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n définies par

$$\forall x \in]x_k, x_{k+1}[,\ (k \in \{0, ..., n-1\}) : \varphi_n(x) = f(x_k),\ \psi_n(x) = f(c_{k+1}).$$

Nous allons établir que $\int_a^b \varphi_n(x)g(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)g(x)dx$, et le fait que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ soit une valeur intermédiaire résultera de la même propriété pour φ_n qui est cette fois-ci en escalier. Plus précisément, on a : $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, par conséquant

$$\int_a^b (f(x) - \psi_n(x))dx \leq \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$

Si on note M' un majorant de $|g|$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b |f(x)g(x) - \varphi_n(x)g(x)|dx \leq M' \int_a^b (f(x) - \varphi_n(x))dx \leq M' \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$

La limite à droite de a pour la fonction φ_n étant égale à la limite à droite de a pour la fonction f, par passage à la limite, on aura bien

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a).$$

■

Théorème 2.8. *Toute fonction bornée continue par morceaux sur un intervalle borné $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

2.9.4 Inégalité de Cauchy Schwartz

Théorème 2.9. *Soit $f, g \in R[a,b]$. Alors*

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

Démonstration - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et comme $f, g \in R[a,b]$. Alors, d'après la positivité dde l'intégrale, on a

$$\Big(\int_a^b (\lambda f(x) + g(x)\Big)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geq 0.$$

Ce trinôme en λ étant toujours positif, son discriminant Δ est donc négatif. C'est-à-dire

$$\Delta = 4\Big[\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 - \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big)\Big] \leq 0.$$

D'où le résultat. ■

2.10 Calcul de primitives et d'intégrales

Définition 2.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$\forall x \in I: \; F'(x) = f(x).$$

Exemple 2.11. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$. Car F est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}: \; F'(x) = f(x)$.

Théorème 2.10. *Si F_1, F_2 sont deux primitives de f sur un intervalle I., alors*

$$\forall x \in I: \; F_1'(x) - F_2'(x) = 0.$$

Démonstration - On $\forall x \in I: \; F_1'(x) = f(x)$ et $F_2 = f(x)$. Alors, $\forall x \in I: \; F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. ■

Théorème 2.11. *Toute fonction continue sur un intervalle I. Alors, elle admettant une infinité de primitives sur I.*

Remarque 2.9. Si on connait une primitive F de f sur un intervalle I. Alors, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c, est une constante quelconque.

Exemple 2.12. La fonction $x \mapsto x^3 + x$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors, toutes les primitives sont $x \mapsto x^3 + x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.3. *Les fonctions dérivable sur un intervalle I et admet une primitive nulle sont les fonctions constantes.*

Démonstration - Soient $x, y \in I, \; (x < y)$, supposons que une fonction F dérivable sur $[x, y] \subseteq I$. Donc elle est continue $[x, y]$. D'après le théorème d'accroissement finis, il existe $\theta \in]x, y[$ tel que

$$F(y) = F(x) + (y - x)F'(y + \theta(y - x)) = F(x).$$

■

Définition 2.9. On appelle intégrale indéfinie de f et on note $\int f(x)dx$, toute expression de la forme $F(x) + c$ où F est la primitive de f.

Exemple 2.13. $\int (\cos x + x - 1)dx = \sin x + \frac{1}{2}x^2 - x + c$, telle que $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.12. *Soit $f \in R[a, b]$, alors l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, est continue.*

Démonstration - f intégrable sur $[a, b]$, alors elle est bornée sur $[a, b]$, donc, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que

$$\forall x \in [a, b] : | \, f(x) \, | \leq M.$$

Donc,

$$F(x) - F(x_0) = | \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt| = | \int_{x_0}^x f(t)dt| \leq M|x - x_0|.$$

C'ést-à-dire F est $M-$lipschitzienne sur $[a, b]$, par concéquant, elle est continue sur $[a, b]$. ■

Théorème 2.13. *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction F définie sur I par :*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt,$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration - Supposons que f soit continue en un point $x_0 \in [a, b]$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$ c'est à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall x \in [a, b], \ | x - x_0 | \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall \in [a, b], \ | x - x_0 | \Rightarrow | \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors pour tout $x \in [a, b] - \{x_0\}$ vérifiant $|x - x_0| < \alpha$, on a

$$\forall t \in [x_0, x] : | t - x_0 | \leq | x - x_0 | < \alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b] :| x - x_0 | < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \forall t \in [x_0, x] :| t - x_0 | < \alpha \\ &\Rightarrow \quad \forall t \in [x_0, x] :| f(t) - f(x_0) | < \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt \quad &< \quad | \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \\ &< \quad \frac{1}{|x - x_0|} \varepsilon |x - x_0| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

∎

Exemple 2.14. Le primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ qui s'annule en 0 est

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}[\sin(2t + \frac{\pi}{3})]_0^x = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.10.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2.14. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration -

1. Soit $\sigma : x_0 < x_1 < ... < x_n$ une subdivision de $[a, b]$. Sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$, $(k \in \{0, ...n-1\}$, la fonction F est continuement dérivable. En vertu du théorème des accroissement finis, il existe $t_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que
$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k)F'(t_k) = (x_{k+1} - x_k)f(t_k).$$
Donc, d'après la proposition 2.7, nous avons $s_\sigma(f) \leq R_{\sigma,t}(f) \leq S_\sigma(f)$, c'est-à-dire
$$s_\sigma(f) \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \Big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\Big) \leq S_\sigma(f)$$
Comme $\sum_{k=0}^{k=n-1} \Big(F(x_{k+1}) - F(x_k) = F(b) - F(a)$, alors
$$s_\sigma(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_\sigma(f)$$
Ceci étant vrai pour toute subdivision σ, et la fonction f étant, par hypothèse, intégrable, on déduit de la proposition 2.6 que
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
2. Soient $x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 + h$, supposone que f soit continue en x_0. Alors, on a
$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = f(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))dx.$$
Tenez compte que f est continue en x_0, donc on a pour $h \neq 0$
$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x) - f(x_0))dx\Big| &\leq \frac{1}{|h|}\sup|x - x_0| \leq h|(f(x) - f(x_0))||h| \\ &= \sup|x - x_0| \leq h|(f(x) - f(x_0)) \to 0, \end{aligned}$$
lorsque $h \mapsto 0$. Par conséquant,
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))dx = f(x_0),$$

d'où $F'(x_0) = f(x_0)$. ∎

Exemple 2.15.
$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Corollaire 2.4. *Si f une fonction dans $C^1[a, b]$, alors*
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration - Si f est dans $C^1[a, b]$ alors sa dérivée f' est continue et f est une primitive de f'. On applique alors le théorème 2.14, ci-dessus. ∎

2.10.2 Fonctions paire et périodique

Théorème 2.15. *1. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$ avec $a > 0$. Alors*

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, *si f est impaire.*

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, *si f est paire.*

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T Alors

$$\forall c \in \mathbb{R} : \int_{c}^{c+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

2.10.3 Intégration par parties

Théorème 2.16. *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration - Nous avons que $\Big(f(x)g(x)\Big)' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$, donc

$$\int_{a}^{b} \Big(f(x)g(x)\Big)'dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx.$$

■

Remarque 2.10. Application au calcul de primitive. Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int \Big(f(x)g(x)\Big)'dx = f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Exemple 2.16. On calule $\displaystyle\int_{1}^{x} te^t dt$. $x \in \mathbb{R}$ posons : $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = e^t \end{cases}$ $alors$ $\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = e^t. \end{cases}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{1}^{x} te^t dt &= [te^t]_1^x - \int_{1}^{x} e^t dt \\ &= xe^x - e^1 - e^x + e^1 = (x-1)e^x. \end{aligned}$$

D'autre part le primitive de $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Calcul intégral du type $\displaystyle\int P_n(x)e^{kx}dx$

Soit $P_n(x)$ un polynôme de dégré n, et $k \in \mathbb{R}$. Alors on peut calculer l'intégrale $\displaystyle\int P_n(x)e^{kx}dx$, où on utilisat l'intégrale par parties n fois. Mais comme on a vu que les primitives de $x \mapsto P_n(x)e^{kx}$ sont les fonctions $F : x \mapsto Q_n(x)e^{kx} + c$, tel que $Q_n(x)$ est un polynôme de dégré n. Donc on peut calculer-le rapidement par comparaison F' avec $P_n(x)e^{kx}$.

Exemple 2.17. Calculer $I = \displaystyle\int (x^2-5x+7)e^{-x}dx$. Alors, les primitives sont $F : x \mapsto (a_2x^2+a_1x+a_0)e^{-x} + c$, tels que $a_0,\ a_1$ et a_2 dans $\mathbb{R}$ où $a_2 \neq 0$. $F'(x) = \Big(-a_2x^2 + (2a_2 - a_1)x + (a_1 - a_0)\Big)e^{-x}$. Par comparaison $F'(x)$ avec $(x^2 - 5x + 7)e^{-x}$, on obtient

$$\begin{cases} -a_2 = 1 \\ 2a_2 - a_1 = -5 \\ a_1 - a_0 = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = 3 \\ a_0 = -4. \end{cases} \Rightarrow$$

Par conséquant $I = \displaystyle\int (x^2 - 5x + 7)e^{-x}dx = (-x^2 + 3x - 4)e^{-x} + c.$

Calcul intégral du type $\displaystyle\int e^{kx}\cos(px)dx, \quad \int e^{kx}\sin(px)dx,\ k, p \in \mathbb{R}.$

On intègre par parties deux foins, nous trouvons donc que les primitives sont $F : x \mapsto e^{kx}(\lambda\cos(px) + \mu\sin(px)) + c$ où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On peut calculer λ et μ par comparaison F' avec $e^{kx}\cos(px)$ ou $e^{kx}\sin(px)$.

Exemple 2.18. Calculer $I = \displaystyle\int e^{-2x}\sin x dx$. Alors, les primitives sont $F : x \mapsto e^{-2x}(\lambda\cos(px) + \mu\sin(px)) + c$. Comme $F'(x) = e^{-2x}\Big((\mu - 2\lambda)\cos(px) - (\lambda + 2\mu)\sin(px)\Big)$. Par comparaison $F'(x)$ avec $e^{-2x}\sin x$, on trouve

$$\begin{cases} \mu - 2\lambda = 0 \\ -\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1}{5} \\ \mu = \dfrac{-2}{5}. \end{cases}$$

Par conséquant $I = \displaystyle\int (x^2 - 5x + 7)e^{-x}dx = (-x^2 + 3x - 4)e^{-x} + c.$

2.10.4 Intégration par changement de variables

Théorème 2.17. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$: Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

La transformation $x = \varphi'(t)$ s'appelle changement de variable.

Démonstration - Si F est une primitive de f alors

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = [(F \circ \varphi)(t)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

■

Exemple 2.19. Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ en utilisant le changement de variable $x = \sin t$, donc on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2.10.5 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	L'intervalle
$x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$e^{ax} \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\sin ax \quad (a \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	$\mathbb{R}$
$\cos ax \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^{2x} = \frac{1}{\cos^{2x}}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Fonction	Primitive	L'intervalle
$1 + cotan^{2x} = \dfrac{1}{\sin^{2x}}$	$-cotanx$	$]0, \pi[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[, a > 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$-\arccos\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[, a > 0$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$sh(ax), (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}ch(ax)$	$\mathbb{R}$
$ch(ax), (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}sh(ax)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$argshx = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

2.10.6 Aire d'un fonction positive

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et (C) sa courbe représentative dans (P).

Définition 2.10. Soit On appelle intégrale de a à b de la fonction f la mesure de l'aire en unité d'aire de la partie $A = \{M(x, y) \in (P) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ du plan (P). On note $S(A) = \int_a^b f(x)dx$

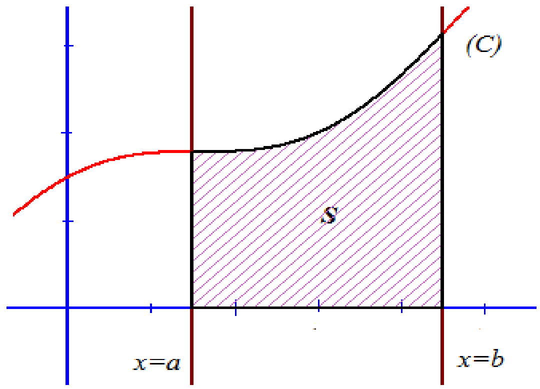


FIGURE 2.8 – L'aire $S(A)$ sous la courbe (C) et entre les droites $y = 0,\ x = a$ et $x = b$.

Remarque 2.11. Si f change la signe sur $[a, b]$, alors $S(A) = \int_a^b |f(x)|dx$.

Exemple 2.20. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer l'aire de domaine

$$A = \{M(x, y) \in (P) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

On a f change la signe dans $[0, 3]$ (voir le figure 2.9), donc

$$\begin{aligned} S(A) = \int_0^3 |f(x)|dx &= \int_0^2 \Big(-f(x)\Big)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \Big[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\Big]_0^2 + \Big[\frac{1}{3}x^3 - x^2\Big]_2^3 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

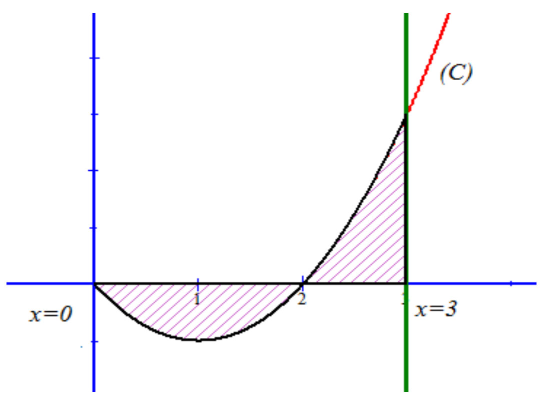


FIGURE 2.9 – L'aire $S(A)$ sous la courbe $(C_{|f|})$ et entre les droites $y = 0,\ x = 0$ et $x = 3$.

2.11 Téchniques de calcule d'intégrale

dans la suite on va donner quelques de méthodes pour calculer une intégrale ou primitive concérnant certaines classe de fonctions.

2.11.1 Intégrale de fractions rationnelles

Définition 2.11. On appelle fraction rationnelle réelle toute fonction f de la forme : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

Définition 2.12. Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes réels. On appelle division euclidienne (ou division selon les puissances décroissantes) de $A(x)$ par $B(x)$ l'unique couple (Q, R) tel que : $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ avec $R = 0$ ou bien $deg(R) < deg(B)$. Les polynômes Q et R sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne.

Exemple 2.21. Soient $A(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$. Pour effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ pratiquement on peut utilisant la division selon les puissances croissantes comme suit

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 2x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - x - 4 \\ \cline{1-1}
-x^3 - 5x^2 + x \qquad & \\
x^3 + x^2 + x \qquad & \\ \cline{1-1}
-4x^2 + 2x - 1 & \\
4x^2 + 4x + 4 & \\ \cline{1-1}
6x + 3 &
\end{array}
$$

Propriétès 2.5. Tout polynôme non nul $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$P(x) = c(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}...(x - r_p)^{m_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{n_2}...(x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$$

$$P(x) = c\left(\Pi_{k=1}^{p}(x - r_k)^{m_k}\right)\left(\Pi_{k=1}^{q}(x^2 + b_kx + c_k)^{n_k}\right)$$

avec $b_q^2 - 4c_q < 0,\ m_k,\ n_k\ \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $c \neq 0$.

Définition 2.13. Soient $a,\ b,\ c$ et d des nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

1. On dit d'éléments simples de première espèces les fractions rationnelle de type $\dfrac{a}{(x-b)^n}$ tel que $a \neq 0$.
2. On dit d'éléments simples de deuxième espèces les fractions rationnelle de type $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ avec $c^2 - 4d < 0$.

Théorème 2.18. *(Décomposition en éléments simples) Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle telle que $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucune racine commune. Si*

$$Q(x) = c\Pi_{k=1}^{p}(x - r_k)^{m_k}\Pi_{k=1}^{q}(x^2 + b_kx + c_k)^{n_k},$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $c \neq 0$ alors la décomposition en éléments simples de $f(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f(x) = E(x) + \sum_{1 \leq i \leq p}\sum_{1 \leq j \leq m_i}\frac{A_{i,j}}{(x - r_i)^j} + \sum_{1 \leq i \leq q}\sum_{1 \leq j \leq n_i}\frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + b_ix + c_i)^j}$$

où $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes réelles, et $E(x)$ est un polynôme appelé partie entière de la fraction rationnelle $f(x)$.

Remarque 2.12. La partie entière $E(x)$ de la fraction rationnelle $f(x)$ n'est autre que le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
On a donc $P(x) = Q(x)E(x) + R(x)$ avec $deg(R(x)) < deg(Q(x))$ ou bien $R(x) = 0$.
On en déduit que :

$$f(x) = E(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Remarque 2.13. Pour calculer une primitive de $f(x)$ il suffit alors de calculer les primitives de

$$E(x), \quad \frac{a}{(x-b)^n},\ \ n \geq 1 \ \text{ et } \ \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n},\ n \geq 1,\ c^2 - 4d < 0.$$

Intégrale d'éléments simples

Intégrations fractions simples de 1^{re} espèce :
On Calcule l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^n} dx$. Alors, on a :

$$I = \begin{cases} a \ln|x-b| + c & si\ n = 1 \\ \dfrac{-1}{n-1} \dfrac{a}{(x-b)^{n-1}} + c & si\ n \geq 2. \end{cases}$$

Intégrations fractions simples de 2^{me} espèce :
Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx$. Alors, nous avons que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx + (-\frac{a}{2}c + b) \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}. \end{aligned}$$

(a) On calcule l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx$. On a, donc :

$$I = \begin{cases} \ln|x^2+cx+d| + c & si\ n = 1 \\ -\dfrac{1}{(n-1)(x^2+cx+d)^{n-1}} + c & si\ n \geq 2. \end{cases}$$

(b) Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}$. On a :

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{c}{2})^2 + (d - \frac{c^2}{4})\right]^n},$$

posons $u = x + \dfrac{c}{2}$ et $\alpha^2 = (d - \dfrac{c^2}{4}) > 0$, car $\Delta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{du}{\alpha \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^n} \\ &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{dv}{[t^2+1]^n}, \quad \text{où } t = \frac{u}{\alpha} \end{aligned}$$

(c) Enfin pour calculer I il suffit de calculer $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1. Si $n = 1$ on a : $I_1 = \arctan x + c$.

2. Si $n \geq 2$ nous avons la relation de récurrence suivante :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left[I_n - I_{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Exemple 2.22. Calculons $J(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+\frac{5}{4})^2}$. On pose $u = x + \dfrac{1}{2}$ on obtient : $J(x) = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$. D'après le résultat précedent on a :

$$\begin{aligned}
J(x) = I_2(u) &= \frac{1}{4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\arctan u + c \\
&= \frac{1}{4}\frac{x+\frac{1}{2}}{((x+\frac{1}{2})^2+1)^2} + \frac{3}{4}\arctan(x+\frac{1}{2}) + c.
\end{aligned}$$

Exemple 2.23. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{x^3+4x-1}{x^2-1}dx$. Donc on pose $P(x) = x^3+4x-1$ et $Q(x) = x^2-1$, la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ donne :

$$P(x) = xQ(x) + 5x - 1,$$

alors, d'après le théorème 2.18, on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}. \tag{2.9}$$

Il existe plusieurs methodes pour calculer les constantes a et b. La méthode générale consiste à réduire au même dénominateur les deux membres de l'égalité (2.9), puis identifier les coefficients des numérateurs. Une autre methode simple dans ce cas est la suivante :
Pour calculer a on multiplie les deux membres de l'égalité (2.9) par $x-1$ puis on donne à x la valeur 1 on obtient $a = 2$.
Pour calculer b on multiplie les deux membres de l'égalité (2.9) par $x+1$ puis on donne à x la valeur -1 on obtient $b = 3$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int xdx + \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + c.
\end{aligned}$$

Exemple 2.24. Calculons $I = \displaystyle\int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx$. D'après, le théorème 2.18, la fraction rationnelle $F(x)$ s'écrit

$$F(x) = \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1}.$$

Par identification on obtient

$$3x^2-3x-1 = (a_1+b_1)x^2 + (c_1-2b_1)x + (a_1-2c_1),$$

on en déduit que $\begin{cases} a_1+b_1=3 \\ c_1-2b_1=-3 \\ a_1-2c_1=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1=1 \\ b_1=2 \\ c_1=1. \end{cases}$ Donc

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x-2| + \ln(x^2+1) + \arctan x + c. \end{aligned}$$

Intégrale de type $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)dx$

Considèrons $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)dx$ où f est une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. Le changement de variables, $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. En remplaçant dans l'intégrale, on trouve

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2},$$

ce changement revenir le calcul de cette primitive à celui d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 2.25. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}dx.$
On fait le changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$, alors on trouve

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Par conséquant :

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = \int \frac{2t\,dt}{1+t^2} = \ln(1+t^2) + c = \ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + c.$$

Remarque 2.14. Il existe des méthodes plus efficaces et plus simples pour calculer ces intégrales si la fonction f possède certaines propriétés. Comme des cas particuliers suinantes

1. (a) Si $\displaystyle\int f(-\sin x, \cos x)dx = -\int f(\sin x, \cos x)dx$, on peut poser $t = \cos x$.
   (b) Si $\displaystyle\int f(\sin x, -\cos x)dx = -\int f(\sin x, \cos x)dx$, on peut poser $t = \sin x$.
   (c) Si $\displaystyle\int f(-\sin x, -\cos x)dx = \int f(\sin x, \cos x)dx$, on peut poser $t = \tan x$.
2. Ce dernier cas est valable aussi pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$.

Exemple 2.26. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{\tan x dx}{2 - \sin^2 x}dx$.
On fait le changement de variables $t = \cos x$, donc $dt = -\sin x$, alors on trouve

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sin x dx}{\cos x(2 - \sin^2 x)}dx &= -\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{tdt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln \mid t \mid + c = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \ln \mid \cos x \mid + c \end{aligned}$$

Remarque 2.15.
1. Pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(\sin x)\cos x dx$ on utilisant le changement $t = \sin x$.
2. Pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(\cos x)\sin x dx$ on utilisant le changement $t = \cos x$.
3. Pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(\tan x)dx$ on utilisant le changement $t = \tan x$.

Intégrale de type $\displaystyle\int f(shx, chx)dx$

On utilise le changement de variable $t = th\dfrac{x}{2}$ on a donc, $x = 2argtht,\ shx = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $chx = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \dfrac{2}{1-t^2}dt$. Alors,

$$\int f(shx, chx)dx = \int f\Big(\frac{1+t^2}{2t}, \frac{1-t^2}{2t}\Big)\frac{2dt}{1-t^2},$$

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Remarque 2.16.
1. On peut utilisant le changement de variable $t = e^x$.
2. Pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(shx)chxdx$ on utilisant le changement $t = shx$.
3. Pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(chx)shxdx$ on utilisant le changement $t = chx$.
4. Pour l'intégrale de type $\displaystyle\int f(thx)dx$ on utilisant le changement $t = thx$.

Exemple 2.27. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{shx}{2+chx}dx.$ 2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{shx}dx.$ 3. $I_2 = \displaystyle\int sh^3xchxdx.$

- Calculons I_1, posons $t = th\frac{x}{2}$ on a donc, $x = 2argtht,\ shx = \frac{2t}{1-t^2},\ \ chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2}{1-t^2}dt$. Alors,

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{shx}{2+chx}dx &= \int \frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \ln \mid 1-t \mid - \ln \mid 1+t \mid + 2\arctan(t) + c \\ &= \ln \mid 1 - th\frac{x}{2} \mid - \ln \mid 1 + th\frac{x}{2} \mid + 2\arctan(th\frac{x}{2}) + c. \end{aligned}$$

- Pour I_2, posons $t = e^x$, donc $x = \ln t$ et $dx = \frac{dt}{t}$. alors,

$$\begin{aligned} I_2 = \int \frac{1}{shx}dx &= \int \frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{2}{e^x - e^{-x}}dx \\ &= \int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \ln \mid t-1 \mid - \ln \mid t+1 \mid + c = \ln \mid e^x - 1 \mid - \ln \mid e^x + 1 \mid + c. \end{aligned}$$

- On faisant le changement $t = shx$, on se trouve le résultat facilement.

Intégrale de type $\int f(e^x)dx$

On peut utilisant le changement de variable $t = e^x$. On trouve

$$\int f(e^x)dx = \int f(t)\frac{dt}{t},$$

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Exemple 2.28. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$

On fait le changement $t = e^x$, donc $dt = e^x dx$, donc $dx = \frac{dt}{t}$. Alors on obtient

$$\begin{aligned} I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx &= \int \frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctan t + c = \arctan(e^x) + c. \end{aligned}$$

2.11.2 Intégrale de type $\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx,\ ad - bc \neq 0.$

La fonction R est irrationnelle en x. le changement $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On trouve, après calcul

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n},\ \text{et } dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt,$$

alors, on obtient

$$\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx = \int R\Big(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \int f(t)dt,$$

où f est une fraction rationnelle en t.

Exemple 2.29. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.
En faisant le changement $t^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$, donc, on $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx &= \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt = \int \frac{-2}{1-t^2}dt + \int \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \ln\Big|\frac{1-t}{1+t}\Big| + 2\arctan t + c = \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\arctan\Big(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Big) + c. \end{aligned}$$

Remarque 2.17. La méthode précédente peut se généraliser aux intégrales de type :

$$\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m_1}{n_1}}, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m_k}{n_k}}\Big)dx.$$

en posant, $t^p = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $p = PPCM(n_1, n_2, ..., n_k)$, c'est-à-dire le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, ..., n_k$.

Exemple 2.30. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x}dx$.
Posons $t^2 = x+4$, donc, on a $x = t^2 - 4$ et $dx = 2tdt$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt &= 2\int \Big(1 + \frac{4}{t^2-4}\Big)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} \\ &= 2t + 2\ln\Big|\frac{t-2}{t+2}\Big| + c. \end{aligned}$$

Exemple 2.31. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x}dx$.
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}dx$.

- Calculons I_1, posons $t^2 = x+4$, donc, on a $x = t^2 - 4$ et $dx = 2tdt$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt &= 2\int \Big(1 + \frac{4}{t^2-4}\Big)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} \\ &= 2t + 2\ln\Big|\frac{t-2}{t+2}\Big| + c. \end{aligned}$$

- Nous laissons I_2 comme exercice au lecteur.

2.11.3 Intégrale de type $\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx,\ a \neq 0.$

Soit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

1. Si $a < 0$, et $\Delta > 0$, on a : $ax^2 + bx + c = -a[\beta^2 - (x-\alpha)^2]$.
   On utilisant le changement de variable $x = \alpha + \beta \cos t$. On obtient
   $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2] = -a\beta^2 \sin^2 t$. Alors
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_1\Big(\sin t, \cos t\Big)dt.$$
2. Si $a > 0$, et $\Delta > 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 - \beta^2]$.
   On utilisant le changement de variable $x = \alpha + \beta cht$. On obtient
   $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2] = a\beta^2 sh^2 t$. Alors
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_2\Big(sht, cht\Big)dt.$$
3. Si $a > 0$, et $\Delta < 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$.
   On utilisant le changement de variable $x = \alpha + \beta sht$. On obtient
   $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2] = a\beta^2 ch^2 t$. Alors
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_3\Big(sht, cht\Big)dt.$$

Remarque 2.18. (Méthodes de substitution d'Euler) On a une méthode générale d'intégration pour calculer ce type d'intégrale qu'on peut transformer en une intégrale d'une fraction rationnelle par des changements de variable de trois types.

1. Si $a > 0$. On pose alors $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$.
   Dans le cas où $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$, on obtient après calcule
$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}dt.$$
   En remplaçant dans l'intégrale précédant, on trouve, donc
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_1\Big(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\Big)2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}dt.$$
2. Si $c > 0$. On pose alors, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.
   Dans le cas où $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, on obtient après calcule
$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a^2 - t^2}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a^2 - t^2)^2}dt.$$
   En remplaçant dans l'intégrale précédant, on trouve, donc
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_1\Big(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a^2 - t^2}\Big)2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a^2 - t^2)^2}dt.$$

3. Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et on a $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$.
   On pose alors $ax^2 + bx + c = \pm t(x - r_1),$ où $\pm t(x - r_2)$.
   Dans le cas où $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r_1)$, on obtient après calcule
$$x = \frac{-ar_2 + r_1 t^2}{t^2 - a}, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(r_1 - r_2)t}{t^2 - a}, \quad dx = 2\frac{a(r_1 - r_2)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$
   En remplaçant dans l'intégrale précédant, on trouve, donc
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\Big)dx = \int R_1\Big(\frac{-ar_2 + r_1 t^2}{t^2 - a}, \frac{a(r_1 - r_2)t}{t^2 - a}\Big)2\frac{a(r_1 - r_2)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$

Remarque 2.19. On peut utilisant le changement de variable $t = \sqrt{\frac{4a^2}{\mid b^2 - 4ac \mid}}\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)$.

Exemple 2.32. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$.
2. $I_2 = \displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}dx$.
3. $I_3 = \displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}dx$.
4. $I_4 = \displaystyle\int \sqrt{x^2 - 3x + 2}dx$.

- Comme $a > 0$, alors, on a la première cas d'Euler en posant $t - x = \sqrt{x^2 + x + 1}$, après calcule, on obtient donc
$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}, \quad dx = 2\frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2}dt.$$
  En remplaçant ces expressions dans l'intégrale I_1, nous avons
$$\begin{aligned} I_1 = &= 2\int \frac{1}{t(t+2)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+2} \\ &= 2\ln|t| - \ln|t + 2| + c. \end{aligned}$$
- Pour I_2, comme $a > 0$, et $\Delta = 16$, on a donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = 0$, $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2$. Alors, faisons le changement de variable $x = \alpha + \beta \cos t = 2\cos t$, après calcule, on obtient donc
$$t = \arccos(\frac{x}{2}), \quad \sqrt{4 - x^2} = 2\sin t, \quad dx = -2\sin t dt.$$
  En remplaçant ces expressions dans l'intégrale I_1, nous avons
$$\begin{aligned} I_2 = &= -4\int \sin^2 t dt = \int (2\cos 2t - 2)dt = 2\sin 2t - 2t + c \\ &= \sin\Big(2\arccos(\frac{x}{2})\Big) - 2\arccos(\frac{x}{2}) + c. \end{aligned}$$
- Pour I_3 on pose $x = cht$. On a donc $dx = shtdt$. Alors, on trouve
$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1}dx = &= -4\int sh^2 tdt = \frac{1}{2}\int (ch2t - 1)dt \\ &= \frac{1}{4}sh2t - \frac{1}{4}t^2 + c = \frac{1}{4}sh(2argchx) - \frac{1}{4}argch^2 x + c. \end{aligned}$$
- Nous laissons I_4 comme exercice au lecteur.

2.11.4 Intégrales de types $\int \sin px \cos qx dx, \int \sin px \sin qx dx, \int \cos px \cos qx dx.$

Dans ce cas, on applique les formules de trigonométrie suivantes

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big] \tag{2.10}$$

$$\sin a \sin b = \frac{-1}{2}\Big[\cos(a+b) - \cos(a-b)\Big] \tag{2.11}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big] \tag{2.12}$$

Exemple 2.33. Calculer $I_1 = \int \sin 3x \sin 2x$. Alors, d'après les formules précédentes, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-1}{2}\int(\cos 5x - \cos x)dx \\ &= \frac{-1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + c. \end{aligned}$$

2.11.5 Intégrale de type $\int \sin^m x \cos^n x dx.$

Où n, m deux nombres entiers naturels.

1. Si m est pair faisons le changement de variable $t = \cos x$.
2. Si n est pair faisons le changement de variable $t = \sin x$.
   Dans le cas par exemple où $m = 2p + 1$, on a

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx.$$

   Posons $t = \cos x$, donc $dt = -\sin x dx$, alors on trouve

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\int (1 - t^2)^p t^n dx.$$

   C'est-à-dire un intégrale rationnel.
3. Si n, m deux nombres enties naturels pairs, avec $n = 2p,\ m = 2q$. On utilisant les formules (2.10),(2.11) et (2.12) avec les formules suinantes

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2x\Big), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos 2x\Big). \tag{2.13}$$

Remarque 2.20. Dans le cas 3, on peut utiliser les formules (2.13) avec le changement de variable $t = \tan x$.

Exemple 2.34. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \int \cos^5 x \sin^2 x dx.$
2. $I_2 = \int \cos^5 x dx.$
3. $I_3 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

- Pour I_1 on pose $x = \sin t$. On a donc $dx = \cos t dt$. Alors, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 = &= \int \cos^4 x \cos x \sin^2 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x \sin^2 x dx \\ &= \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + c \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c. \end{aligned}$$

- Pour I_2 on pose $x = \sin t$. On a donc $dx = \cos t dt$. Alors, on trouve

$$\begin{aligned} I_2 = &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1-t^2)^2 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + c \\ &= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + c. \end{aligned}$$

- Pour I_3 on utilisant (2.13) et (2.12) respectivement, on obtient, donc

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^4 x &= \sin^2 x \cos^2 x \cos^{42} x = \frac{1}{8}(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)(1+\cos 2x) \\ &= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)(1+\cos 2x) = \frac{1}{8}(1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) \\ &= \frac{1}{8}(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x). \end{aligned}$$

Par conséquant, $I_3 = \frac{1}{8}(x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x) + c.$

Remarque 2.21. On peut linéariser les fonctions $\sin^m x$ et $\cos^n x$, où on utilisent la formule du binôme de Newton et les formules suivants

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

2.11.6 Intégrale de type $\int sh^m x ch^n x dx.$

Où n, m deux nombres entiers naturels.

1. Si m est pair faisons le changement de variable $t = chx.$

2. Si n est pair faisons le changement de variable $t = shx$.
   Dans le cas par exemple où $m = 2p + 1$, on a

$$\int sh^m x ch^n x dx = \int (ch^2 x - 1)^p ch^n x shx dx.$$

   Posons $t = chx$, donc $dt = shxdx$, alors on trouve

$$\int sh^m x ch^n x dx = \int (t^2 - 1)^p t^n dt.$$

   C'est-à-dire un intégrale rationnel.
3. Si n, m deux nombres enties naturels pairs, avec $n = 2p,\ m = 2q$. On utilisant les formules suinantes

$$sh2x = 2shxchx \tag{2.14}$$
$$ch^2 x = \frac{1}{2}(ch2x + 1) \tag{2.15}$$
$$sh^2 x = \frac{1}{2}(ch2x - 1) \tag{2.16}$$
$$ch^2 x - sh^2 x = 1. \tag{2.17}$$

   Puis, on faisant le changement de variable $t = thx$.

Exemple 2.35. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int sh^3 x ch^2 x dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int ch^4 x dx.$

- Pour I_1, on $m = 3$ est impair. Alors on peut utilisant (2.17) et le changement de variable $t = chx$, on obtient, donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int sh^3 x ch^2 x dx = \int sh^2 x ch^2 x shx dx \\ &= \int sh^2 x ch^2 x shx dx = \int (ch^2 x - 1) ch^2 x shx dx \\ &= \int (t^2 - 1) t^2 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 + c \\ &= \int (t^2 - 1) t^2 dt = \frac{1}{5} ch^5 x - \frac{1}{3} ch^3 x + c. \end{aligned}$$

- Nous laissons I_2 comme exercice au lecteur.