Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Socle Commun

Analyse 2
Equations différentielles

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\int f(x)dx$$

Présenté par :

Dr. Dahmane BOUAFIA

Année Universitaire :2020-2022

Table des matières

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$V(x_0)$: voisinage de x_0.
$f \underset{x_0}{=} o(g)$: f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f = o(g)$. : f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f \sim_{x_0} g$: f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
$f \in C^n(I, \mathbb{R})$: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.
$f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$: La dérivée à droite et à gauche en point x_0 (respectivement).
f^{-1} : La fonction réciproque de f.
$D.L$: Développements limités.
$R_n(x)$: Le reste dans la formule de Taylor d'ordre n.
$P_n(x)$: Fonction polynôme d'ordre n.
$\arcsin$: Fonction arcsinus.
$\arccos$: Fonction arccosinus.
$\arctan$: Fonction arctangente.
sh, ch et th : Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques(respectivement).
$argsh, argch$: Fonctions argument (sinus, cosinus) hyperboliques,(respectivement).
$argth$: Fonctions argument tangente hyperboliques.
$deg(P)$: dégré d'un polynôme P.
$\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
$f \in B[a, b]$: Les fonctions f est bornée sur $[a, b]$.
$f \in R[a, b]$: Les fonctions f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x$ la somme de Darboux inférieure de f où $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x$ la somme de Darboux supérieure de f où $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$.

$R_{\sigma,t}(f) := \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$ La somme de Riemann de f associée à σ où $t = (t_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ l'intervalle limitée de f où F une primitive de f sur $[a, b]$.

$\int f(x)dx := F(x) + c$ l'intervalle illimitée de f $[a, b]$ où F une primitive de f et c est une constante quelconque.

(EDL) : Equation différentielle linéaire.
(EH) : Equation différentielle homogène.
(EBr) : Equation différentielle de Bernoulli.
(ER) : Equation différentielle de Riccati .
(ELg) : Equation différentielle de Lagrange.
$PPCM(.,.)$: Le plus petit commun multiple.

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$V(x_0)$: voisinage de x_0.
$f \underset{x_0}{=} o(g)$: f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f = o(g)$. : f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f \sim_{x_0} g$: f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
$f \in C^n(I, \mathbb{R})$: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.
$f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$: La dérivée à droite et à gauche en point x_0 (respectivement).
f^{-1} : La fonction réciproque de f.
$D.L$: Développements limités.
$R_n(x)$: Le reste dans la formule de Taylor d'ordre n.
$P_n(x)$: Fonction polynôme d'ordre n.
arcsin : Fonction arcsinus.
arccos : Fonction arccosinus.
arctan : Fonction arctangente.
sh, ch et th : Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques(respectivement).
$argsh, argch$: Fonctions argument (sinus, cosinus) hyperboliques,(respectivement).
$argth$: Fonctions argument tangente hyperboliques.
$deg(P)$: dégré d'un polynôme P.
$\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
$f \in B[a, b]$: Les fonctions f est bornée sur $[a, b]$.
$f \in R[a, b]$: Les fonctions f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x$ La somme de Darboux inférieure de f où $m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.
$s_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x$ La somme de Darboux supérieure de f où $M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.
$R_{\sigma,t}(f) = := \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$ La somme de Riemann de f associée à σ où $t = (t_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $t_k \in [x$
$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ l'intervalle limitée de f où F une primitive de f sur $[a, b]$.
$\int f(x)dx := F(x) + c$ l'intervalle illimitée de f $[a, b]$ où F une primitive de f sur $[a, b]$ et c est une constante quelconque.
(EDL) : Equation différentielle linéaire.

(EH) : Equation différentielle homogène.
(EBr) : Equation différentielle de Bernoulli.
(ER) : E différentielle de Riccati .
(ELg) : Equation différentielle de Lagrange.
$PPCM(.,.)$: Le plus petit commun multiple.

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sommaire

1.1 Généralités

En raison de l'importance des équations différentielles dans la résolution de nombreux phénomènes en physique, mathématiques, chimie, biologie et dans d'autres domaines, les chercheurs y ont prêté beaucoup d'attention au cours des siècles passés et au présent. Cependant, ils ne sont pas parvenus à la solution de beaucoup d'entre eux en utilisant les méthodes exceplicites. Cela restera un champ ouvert pour la recherche. Nous sommes dans ce chapitre nous présentons des terminologies et des concepts de base concernant les équations différentielles du prémier et du scond orde. Nous discuterons également de l'idée générale de résolutios de ces équations différentielles et ainssi quelques cas particuliers.
D'une manière générale, nous présenterons dans ce chapitre les définitions, les théorèmes, et les propriétés les plus importantes, ainsi que quelques méthodes de résolution des équations différentielles ordinaires du premier et du second ordre, ou celles qui peuvent remonter au premier ordre comme des équations du Bernoulli et Riccati.

Définition 1.1. On appelle équation différentielle du premier ordre une relation de la forme

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

où y la fonction inconnue et y' est sa dérivée par rapport à x et F une fonction numérique de 3 variables définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Exemple 1.1.

1. $y' = e^x + 2x - 3,$
2. $y' = y + x$

sont des équations différentielles du premier ordre, $D = \mathbb{R}^3$.

Définition 1.2. On appelle équation différentielle du deuxième ordre une relation de la forme

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{1.2}$$

où y' et y'' sont les dérivées du premier et du second ordres respectivement de y par rapport à x et F une fonction numérique de 4 variables définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^4$.

Exemple 1.2. 1. $y'' + (x^2 + 1)y' - y = (x - 3)e^{2x}$,
2. $y'' + y' = 2y = x^2 + x - 2$,
sont des équations différentielles du second ordre sur $D = \mathbb{R}^4$.

Définition 1.3. 1. Une équation différentielle du premier ordre est dite mise sous forme normale lorsqu'elle s'écrit
$$y' = f(x, y)$$
où f représente une foncyion réelle de 2 variables.
2. Une équation différentielle du second ordre est dite mise sous forme normale lorsqu'elle s'écrit
$$y'' = f(x, y, y')$$
où f représente une foncyion réelle de 3 variables.

Définition 1.4. 1. Une solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (1.1) est une fonction numé rique y, définie sur un intervalle réel I, dérivable et telle que, on ait

$$\forall x \in I : \quad F(x, y, y') = 0, \text{ et } (x, y, y') \in D.$$

2. Une solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (1.2) est une fonction numé rique y, définie sur un intervalle réel I, dérivable deux fois et telle que, on ait

$$\forall x \in I : \quad F(x, y, y', y'') = 0, \text{ et } (x, y, y', y'') \in D.$$

Remarque 1.1. Résoudre une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent. Le graphe d'une solution est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle.

Exemple 1.3. 1. Les fonctions $y = c$ (c une constante) sont des solutions de $y' = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $y = \lambda e^{ax}$ sont des solutions de $y' = ay$ définie sur $\mathbb{R}$, tels que $(a,\ \lambda \in \mathbb{R})$.
3. Les fonctions $y = \cos x$ et $y = \sin x$ sont des solutions de $y'' + y = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

1.2 Equation différentielle du premier ordre

1.2.1 Equation différenitelle à variables séparées

Définition 1.5. Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(y).y' = g(x) \quad (vs).$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y' = \dfrac{dy}{dx}$, puis, symboliquement

$$f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

On écrit ici explicitement la constante d'intégration arbitraire $C \in \mathbb{R}$ (qui est déjà implicitement présente dans les intégrales indéfinies) pour ne pas l'oublier. Il s'agit donc de trouver des primitives F et G de f et g, et ensuite d'exprimer y en terme de x et de C :

$$F(y) = G(x) + C \Leftrightarrow y = F^{-1}(G(x) + C).$$

C'est pour cette raison que l'on dit aussi intégrer une équation différentielle.

Exemple 1.4. Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' \ln(x) = (3\ln(x) + 1)y. \ (1)$$

On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx\ln(x)$, ce qui est permis si et seulement si $y \neq 0$ (car $x\ln(x) > 0$) d'après l'énoncé). On a,

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}dx + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $\dfrac{3\ln x + 1}{x\ln x} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x\ln x}$, alors, on a

$$\ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + K = \ln|x^3\ln x| + K.$$

Avec $K \in \mathbb{R}$. En prenant l'exponentielle de cette expression, on a finalement :

$$y = C_2 x^3 \ln x$$

avec $C_2 \in \mathbb{R}$: En effet, le signe de $C_2 (=^+_- e^K)$ tient compte des deux possibilités pour $|y|$, et on vérifie que $C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ est aussi solution (mais pour laquelle le calcul précédent, à partir de la division par y, n'est pas valable.)

Exemple 1.5. Résoudre l'équation

$$2xydy = (x^2 - y^2)dx \qquad (2)$$

Posons : $f(x, y) = 2xy$, $g(x, y) = x^2 - y^2$, on a : $f(2x, 2y) = 4xy = 2^2xy$ et $g(2x, 2y) = 2^2(x^2 - y^2)$ donc f et g sont homogène de degré 2. On pose $y = vx$ pour résoudre (1). $dy = vdx + xdv$ et (1) devient

$$\frac{2v}{1 - 3v^2}dv = \frac{dx}{x}.$$

Après intégration on obtient

$$x^3(1-3v^2) = K, (K \in \mathbb{R}),$$

d'où

$$x(x^2-3y^2) = K.$$

Donc,

$$y^2 = \frac{1}{3}(x^2 - \frac{K}{x}).$$

Détermination de la constante d'intégration

La constante d'intégration C est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donné, on ait une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$. On parle d'un problème avec conditions initiales.

1.2.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.6. Une équations différentielles linéaire (EDL) du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans K, K étant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on demandera $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

Définition 1.7. (Équation homogène) On appelle équation homogène ou encore équation sans second membre associée à (E), l'équation :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E_0).$$

On la note aussi (E_h) ou (EH).

Remarque 1.2. Si dans ces définitions, le coefficient de y' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en* y'.

Résolution de l'équation homogène associée

En effet, (EH) est une équation différentielle à variables séparées. En l'écrivant

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)},$$

et en l'intégrant, on obtient :

$$\ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + C$$

et avec $K \in \{\pm e^C, 0\}$, on a :

$$y = Ke^{F(x)}, K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx.$$

Concernant l'équation (E), on a :

Propriétès 1.1. L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (EH) une solution particulière de (E).

La section suivante est consacrée à la détermination de la solution particulière de l'équation (E) par la méthode de variation de la constante.

Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)e^{F(x)}$, avec Kune fonction à déterminer ("variation de la constante"). On trouve que y est solution si et seulement si

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

(On peut intégrer car c'est la composée de fonctions continues, et on peut oublier la constante car elle correspond à une solution de (EH)). Une solution particulière est donc

$$y(x) = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

et la solution générale est donc :

$$y(x) = e^{F(x)}\big(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx\big), K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

Exemple 1.6. Résoudre sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, l'équation différentielle

$$sin(x)y' - cos(x)y = x$$

Résolvons d'abord sur I l'équation homogène :

$$sin(x)y' - \cos(x)y = 0$$

On obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + k, k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (EH) est donc

$$y = K \sin x, K \in \mathbb{R}.$$

(avec $K = \pm e^k$ pour tenir compte des valeurs absolues, et K=0 étant solution aussi). Cherchons ensuite une solution particulière de (E) sous la forme

$$y = K(x)\sin x, (K \text{ est continûment dérivable}).$$

On a alors $y'(x) = K'(x)\ sinx + K(x)\cos(x)$, ce qui donne dans (E) :

$$(\ sinx)[K'(x)\ sinx + K(x)\ cosx] - (\ cosx)K(x)\ sinx = x$$

et comme dans la théorie générale (et c'est toujours ainsi par construction), il ne reste que le terme en $K'(x)$, soit :

$$K'(x)\sin^2 x = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$$

On intègre par parties, en posant

$$u(x) = x, v'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \ \ et \ \ u'(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

ce qui donne :

$$K(x) = -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}dx = -\frac{x}{\tan x}$$

$$= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{cosx}{sinx} = -\frac{x}{\tan x} + \ \ln|\ sinx|.$$

Sur $I,\ sinx > 0$; une solution particulière est donc obtenue pour $C = 0$.

$$y = -x\ cosx + \ sinx\ \ln\ sinx$$

et la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = -x\ cosx + \big(K + \ sinx\ \ln\ sinx\big), K \in \ R.$$

Exemple 1.7. Si $y_1$et y_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $y_1 - y_2$ est solution de (EH) , et la solution générale de (E) est

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2), c \in \mathbb{R} \ \text{ arbitraire.}$$

1.3 Equation du premier ordre non linéaires se ramenant à des équations linéaires

1.3.1 Équation de Bernouilli

Définition 1.8. Une équation différentielle est dite de Bernouilli si elle est de la forme

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \in \mathbb{R} \qquad\qquad (EBr)$$

Pour résoudre l'équation (EBr) on pose $z = y^{1-n}$. Cette substitution transforme l'équation (EBr) en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable z.

Remarque 1.3. Si $n = 1$, l'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle linéaire.

Exemple 1.8. Résoudre les équations différentielles de Bernoulli suivantes

1. $(x^2 + 1)y' = 4xy + 4x\sqrt{y}$.
2. $x^2y' + xy = 2(\sqrt{x} + 1)\sqrt{y}$. tel que $x > 0$.

Donc, les solutions d'équations différentielles de Bernoulli sont immédiatement.Pour l'équation $(x^2+1)y' = 4xy + 4x\sqrt{y}$. (1) On suppose $y > 0$ et on utilise le changement d'inconnue $z = \sqrt{y}$. On a donc $y = z^2$ et $y' = 2zz'$. En reportant dans l'équation (1), on obtient

$$(x^2+1)zz' = 2xz^2 + 2xz,$$

qui se simplifie en

$$(x^2+1)z' = 2xz + 2x. \ (2)$$

Cette dernière équation est linéaire (à coefficients non constants). C'est une équation à variables séparables

$$\frac{z'}{z+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{z+1} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln|z+1| = \ln(x^2+1) + C, \ C > 0 \\ &\Rightarrow \quad z = K(x^2+1) - 1, \ K = \pm e^C.\end{aligned}$$

Finalement, on fait le changement d'inconnue en sens inverse $y = z^2$ pour trouver les solutions y positives de l'équation (1) Il laisse au lecteur de vérifier que la solution de l'équation $x^2y' + xy = 2(\sqrt{x}+1)\sqrt{y}, \ x > 0$ est

$$y = \frac{1}{x}\Big(\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}+K}\Big)^2, \ K \in \mathbb{R}.$$

1.3.2 Équations de Riccati

Définition 1.9. Les équations de Riccati sont des équations différentielles de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (ER)$$

1.3.3 Méthode de résolution

Si y_1 est une solution particulière alors on pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation (ER) en une équation linéaire en z.

Exemple 1.9. Soit l'équation différentielle de Riccati suivante

$$2y'\cos x - 2y\sin x = 2y^2 + 2\cos x - \sin^2 x, \ (ER).$$

1. Vérifier que $y_0 = \sin x$ est une solution particulière de (ER)
2. Résoudre l'équation (ER), en utilisant le changement de variable $u = y - y_0$.

Les solutions est respectivement au dessous,

1. On remplace dans l'équation (ER) par $y_0 = \sin x$, on aura facilement que y_0 est une solution de (ER). Donc $y_0 = \sin x$ est une solution particulière de (ER).
2. En utilisant le changement de variable $u = y - y_0$ rendre léquation (ER) sous la forme

$$2u' \cos x - 2u \sin x = u^2 \ \ (1).$$

C'est une équation différentielle de Bernoulli avec $n = 2$. On remarque que $u = 0$ est une solution de (1) si $u \neq 0$. On divise l'équation (1) par u^2, on obtient $2u'u^2 \cos x - 2u^{-1} \sin x = 1, \ \ (2)$. On pose $z = u^{-1}$, donc, $z' = -u'u^2$. On remplace dans l'équation (2) on trouve

$$-2z' \cos x - 2z \sin x = 1, \ (E).$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et on résoud facilement cette équation, et on otient

$$z = -\frac{1}{2} \sin x + C \cos x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$u = \frac{1}{z} = \frac{2}{-\sin x + \alpha \cos x}, \qquad C = 2\alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale d équation (ER) est donnée d'après la relation $y = u + y_0$ par

$$y = \frac{2}{-\sin x + \alpha \cos x} + \sin x.$$

1.3.4 Équations de Lagrange

Définition 1.10. Les équations de Lagrange sont des équations différentielles de la forme :

$$y = xf(y') + g(y') \qquad\qquad (ELg)$$

Pour intégrer les équations de Lagrange, on pose $y' = p = \dfrac{dy}{dx}$, (Lag) devient :$y = xf(p) + g(p)$, et on differentie :

$$dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$$
$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp$$
$$(p - f(p))dx = [xf'(p) + g'(p)]\, dp.$$

On transformé (ELg) en une équation différentielle linéaire en $\dfrac{dx}{dp} = x'$.

1.4 Équations de type $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Pour résoudre d' équations différentielles à variabbles homogènes, alors, on pose $y = tx$.

Exemple 1.10. Résoudre les équations différentielles à variabbles homogènes suivantes

1. $xy' = x - y$.
2. $xyy' = x^2 + y^2$.
3. $xy' - y = x(x + y)$.

Maintenant on donne les solutions.

1. Pour l'équation $xy' = x - y$. (1) En divisant par x $(x \neq 0)$, puis posons $y = tx$, on obtient $y' = t + xt'$ et
$$(1) \Leftrightarrow y' = 1 - \frac{y}{x} \Leftrightarrow t + xt' = 1 - t \Leftrightarrow \frac{t'}{2t-1} = -\frac{1}{x}.$$
Par intégration des deux membres, on trouve
$$\frac{1}{2}\ln(2t-1) = -\ln x + C \Leftrightarrow \ln(2t-1) = \ln x^{-2} + 2C.$$
On en déduit que $2t - 1 = Kx^{-2}$, d'où $t = \dfrac{Kx^{-2}+1}{2}$ et finalement, puisque $y = tx$, on a
$$y = \frac{x^2 + K}{2x}.$$
2. La solution de l'équation $xyy' = x^2 + y^2$, est donner par
$$y = \pm\sqrt{\ln x^2 + C}.$$
3. L'équation $xy' - y = x(x + y)$, n'est pas homogène à proprement dit mais, par chance, se résout au moyen du même changement d'inconnue $y = tx$. Par un calcule, on obtient
$$y = x(Ce^x - 1).$$

1.5 Equation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'interesse maintenant aux équations différentielles du deuxième ordre, mais seulement aux EDL où les coefficients a_0, a_1, a_2 sont des constantes réelles.

Définition 1.11. Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme
$$ay'' + by' + cy = f \qquad \text{(E)}$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur I ouvert de $\mathbb{R}$. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est
$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(EH)}$$

Remarque 1.4. D'après les résultats généraux on sait que l'ensemble des solutions de (EH) est un espace vectoriel et que la solution générale de (E) est la forme $y = y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h est une solution de (EH).

Nous admettons les résultats supplémentaires :

Propriétés 1.2. 1. Pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$.

2. Les solutions de (EH) sur I forment un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, noté $S_2(I)$.

3. Si y_1, y_2 sont deux solutions indépendantes de (EH), alors y_1, y_2 est une base de $S_2(I)$, c'est à dire $S_2(I) = \{\alpha y_1 + \beta y_2\}$.

4. Pour $y_1, y_2 \in S_2(I)$, on définit le wronskien $w : I \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Si $w(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in I$, alors $w(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, et c'est une condition nécessaire et suffisante pour que $\{y_1, y_2\}$ soit linéairement indépendant et donc une base de $S_2(I)$.

1.5.1 Résolution de l'équation homogène associée (EH)

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y' = ry$ et $y'' = r^2 y$, donc (E) devient : $y.(ar^2 + br + c) = 0$.

Définition 1.12. L'équation

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E.C)$$

se nomme équation caractéristique de (EH).

Propriétés 1.3. Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :

1. $\Delta > 0$ L'équation caratéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}$$

est une base de $S_2(I)$.

2. $\Delta = 0$ L'équation caratéristique admet une racine réelle double r, et

$$y_1(x) = e^{rx}, y_2(x) = xe^{rx}$$

est une base de $S_2(I)$.

3. $\Delta < 0$ L'équation caratéristique admet deux racines complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$), et

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

est une base de $S_2(I)$.
Dans chacun des cas, la solution générale de (EH) est donc

$$y = Ay_1 + By_2,$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Démonstration - Il est claire que dans chaque cas $y_1(x), y_2(x)$ sont solutions de (EH). Pour vérifier qu'ils sont indépendantes il suffit d'après la proposition (1.4.1) de vérifier que leur wronskien est non nul. Par exemple dans le cas où $\Delta > 0$, le wronskien de $y_1(x), y_2(x)$ est

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0.$$

Il est conseillé de traîter les deux autres cas à titre d'exercice. ■

1.5.2 Recherche d'une solution particulière de (E)

On distingue deux cas particuliers et une méthode générale :

Cas particuliers

Premier cas particulier : le second memebre de l'équation (E) est de la forme : $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) \in \mathbb{R}[X]$.
On cherche la solution particulière sous la forme $y(x) = e^{\alpha x}x^s Q(x)$, où Q est un polynôme du même degré que le polynôme P, et l'entier s est choisi de la façon suivante.

$s = 0$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique.
$s = 1$ si α est l'une des racines de l'équation caractéristique.
$s = 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique .

Les coefficients du polynôme Q sont déterminés par identification.

Remarque 1.5. Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$, c'est à dire lorsque $f(x) = P(x)$.

Deuxième cas particulier : le second membre de l'équation (E) est de la forme :$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\omega x$, où $\omega, \alpha \in \mathbb{R}, P$ est un polynôme réel de degré n.
On cherche la solution particulière sous la forme $y(x) = e^{\alpha x}x^s \{Q(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x\}$, où Q et R sont deux polynômes ayant le même degré que le polynôme P, et l'entier s est choisi de la façon suivante.

$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
$s = 1$ si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique. (alors $\alpha - i\beta$ est aussi racine del'équation cartéristique). Les polynômes Q et R sont déterminés par identification.

Remarque 1.6. Toute solution de (EH) nulle en un point de I est identiquement nulle sur I.

Remarque 1.7. Deux solutions de (EH) qui coïncident en un point de I, sont identiques sur I.

Méthode de variation des constantes.

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogne , on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions vérifiant

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \dfrac{f x)}{a}. \end{cases}$$

Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$$

avec cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \dfrac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x &= 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x &= \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu' (\sin x)^2 &= 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu' (\cos x)^2 &= 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme} \quad \mu' = 1.$$

Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$. donc les solutions sont de la forme :

$$y_h + y_p = \lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Principe de superposition

Proposition 1.1. *Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y = y_1 + y_2$, où y_i est une solution de $ay'' + by' + cy = f_i(x)$, (pour $i = 1, 2$).*

Exemple 1.11. Résoudre

$$y'' + y = x + \cos 3x \ \text{ sur } \ I = \mathbb{R}$$

a.) L'équation Homogène : L'équation caractéristique est $r^2 + 1$. La solution générale de (EH) est $y = A \cos x + B \sin x$.
b.) solution particulière associée à $y'' + y = x$, x convient.
c.) solution particulière associée à $y'' + y = \cos 3x$, : En remplaçant $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ dans l'équation, on trouve $(A - 9A) \cos 3x + (B - 9B) \sin 3x = \cos 3x$, donc $A = -\frac{1}{8}$ et $B = 0$.
d.) conclusion : La solution générale est $y = x - \frac{1}{8} 3x + A \cos x + B \sin x$.