Série : N 2

Analyse S-2

Le

11 février 2022

Remarque

l'exercice noté par $(\star)$ ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**.

Exercice 01

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 x dx.$
2. $\int_0^1 x^2 dx.$
3. $\int_0^1 x^3 dx.(\star)$
4. $\int_0^1 e^x dx.(\star)$

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 02

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1. En utilisant la somme de Darboux, montrer que f est intégrable sur I.
2. Même quastion pour $f : x \mapsto x^2$ et $I = [0,1].(\star)$

Exercice 03

Calculer les limites, lorsque $n \to +\infty$ des suites (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$).

1. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}.$
2. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n+k}{n^2+k^2}.(\star)$
3. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right).$
4. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}.(\star)$
5. $\frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + \ldots + n^p).(\star)$

Exercice 04

Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

1. Calculer I_0
2. Calculer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Application : Calculer $J = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x} dx.$
4. Recalculer cette intégrale en charchant directement une primitive de $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}$ sous la forme $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$, où a, b, c et d sont quatre réels à déterminer.

Exercice 05

En utilisant changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

1. $\int \sin^2 x \cos x dx.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$
3. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx.(\star)$
4. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$
5. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$
6. $\int \frac{dx}{4+3x^2}.$
7. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.(\star)$
8. $\int x^2 \sqrt{x-1} dx.$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx.$
10. $\int 3x^2(1+x^3)^3 dx.$
11. $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx.$

Exercice 06

Calculer les les intégrales suivantes

1. $\int_{-1}^{2} [x]dx.(\star)$
2. $\int_{-3}^{4} |x^2-3x+2|dx.$

Exercice 07

Calculer les primitives

1. $\int \cos^2 x dx.$
2. $\int \frac{x}{1+x^3}dx.$
3. $\int \frac{x^3-3x^2+x+1}{x-3}dx.$
4. $\int \frac{3x+3}{x^2-2x+1}dx$
5. $\int \frac{x+3}{x^2-x-2}dx.$
6. $\int \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)}dx.(\star)$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$
8. $\int \frac{1}{e^x+1}dx.(\star)$

Exercice supplémentaire 1

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variables recommandé

1. $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x},$ poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$
2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x}dx,$ poser $u = \sin x.$
3. $I_3 = \int_0^{1} e^{2x}\ln(1+e^x)dx,$ poser $u = e^x.$
4. $I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x},$ poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$
5. $I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},$ poser $\sqrt{1+x} = u.$
6. $I_6 = \int_0^{1} \sqrt{1-x^2}dx,$ poser $x = \sin t.$
7. $I_7 = \int \frac{1}{1+\cos x}dx,$ poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).(\star)$

Exercice supplémentaire 2

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé $[a,b]$ tel que $\forall \in [a,b] : f(a+b-x) = f(x).$

1. Montrer que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$
2. En déduit la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

Exercice supplémentaire 3

Calculer les les intégrales suivantes

1. $\int x \arctan x dx.$
2. $\int (\ln x)^2 dx.(\star)$
3. $\int \cos x \ln(1$ $\cos x)dx.(\star)$
4. $\int \arcsin x dx.$

Exercice supplémentaire 4

Soit f une fontions définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Est ce que f est intégrable ?. Justifier votre réponse.

Bonne chance