Chapitre 2

Intégrale de Riemann et calcul de primitives

Remarque 2.1. Les exercices notés par $(\star)$ ou supplémentaires ne sera pas corrigé dans cette polycopié, ils laisant au lecteur.

Exercice 2.1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 x dx.$
2. $\int_0^1 x^2 dx.$
3. $\int_0^1 x^3 dx.(*)$
4. $\int_0^1 e^x dx.(*)$

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Correction d'exercice 2.1. On remarque que si la fonction f est Riemann intégrable sur intervalle $[a,b]$ alors, on a

$$\begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} R_n(f) \\ \vee \\ \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) \end{cases} \quad \text{telles que} \quad \begin{cases} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{i=n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \\ \vee \\ S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \end{cases}$$

1. Si $f(x) = x$. On définit la subdivision régulière $(\sigma)_i \,:\, x_i = \frac{1}{n} i, \quad i \in \{0, 1, ..., n\}$, donc, on a $\Delta x = \frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme la fonction $x \mapsto x$ est continue, alors elle est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=0}^{i=n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{i=n} i \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Pour $f(x) = x^2$. On a f est continue et croissante sur $[0,1]$ donc, elle est Riemann intégrable, et d'après l'indication précédant, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=0}^{i=n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{i=n} i^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{3n^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Reste comme exercice.

4 Soit $f(x) = e^x$ et $I = [0,1]$. Il est clair que f est Riemann intégrable. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{1}{n}i\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}\\ &= (e-1)\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = (e-1).\end{aligned}$$

Car, $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{e^t-1}{t}$, aissi $t = \dfrac{1}{n} \to 0$ si $n \to +\infty$.

Exercice 2.2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1 En utilisant la somme de Darboux, montrer que f est intégrable sur I.

2 Même question pour $f : x \mapsto x^2$ et $I = [0,1]$.

Correction d'exercice 2.2. **1** Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Alors, on définit la subdivision régulière $(\sigma)_i$ telle que $(\sigma)_i:\ x_i = \dfrac{\pi}{2n}i,\ \ i \in \{0,1,...,n\},$ donc, $\Delta x = \dfrac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour tout $i \in \{1,...,n\}$,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=0}^{i=n} M_i\Delta x,\ \text{tel que } M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\\ s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} m_i\Delta x,\ \text{tel que } m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x).\end{aligned}$$

Comme la fonction sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on obtient donc,

$$\begin{aligned}M_i &= \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = \sin x_i = \sin\frac{\pi}{2n}i\\ m_i &= \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = \sin x_{i-1} = \frac{\pi}{2n}(i-1).\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}S_n - s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\pi}{2n}(\sin\frac{\pi}{2n}i - \sin\frac{\pi}{2n}(i-1))\\ &= \frac{\pi}{2n}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{\pi}{2n}.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0$. C'est à dire la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2 Si $(x) = x^2$ et $I = [0,1]$. Alors, on a $(\sigma)_i:\ x_i = \dfrac{1}{n}i,\ \ i \in \{0,1,...,n\},$ et, $\Delta x = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour tout $i \in \{1,...,n\}$, on aura

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} x^2 = \frac{1}{n^2}i^2,\quad m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} x^2 = \frac{1}{n^2}(i-1)^2.$$

Par suite

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=0}^{i=n} M_i\Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\ s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} m_i\Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{i=n} (i-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.\end{aligned}$$

Puis, par conséquent, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+4n+2n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n} = 0.$$

Exercice 2.3. Calculer les limites, lorsque $n \to +\infty$ des suites (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$).

1. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$.
2. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.(*)
3. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$.
4. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.
5. $\frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + ... + n^p)$.(*)

Correction d'exercice 2.3. Cet exercice est basé sur la relation entre la somme de Riemann et l'intégrale d'une fonction f continue sur le domaine $[a,b]$, telles que

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=k}^{k=n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \ \vee \ \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$$

1. Posons $S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$. Donc, $S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On prend, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Par conséquent, on a

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

2. Reste comme exercice

3. Pour $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$. Ici, $f(x) = x \sin \pi x$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Donc,

$$S_3 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \int_0^1 x \sin \pi x dx.$$

En utilisant intégration par parties, on trouve, donc,

$$\begin{cases} u(x) = x, \\ v'(x) = \sin \pi x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1, \\ v(x) = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x, \end{cases}$$

et $S_3 = \int_0^1 x \sin \pi x dx = [-\frac{1}{\pi} x \cos \pi x]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \pi x dx = 1 + [\sin \pi x]_0^1 = 1$.

4. Si $S_4 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$. On prend $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Alors, on aura, $S_4 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$.

5. $S_5 = \frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + ... + n^p) = \frac{1}{n}\left((\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + ... + (\frac{n}{n})^p\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (\frac{1}{n})^p$. Donc, $f(x) = x^p$ et $I = [0,1]$. Par suite, $S_5 = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

Exercice 2.4. Soit f une fontions définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Est ce que f est intégrable ?. Justifier votre réponse.

Correction d'exercice 2.4. On définit la subdivision régulière $(\sigma)_i$ telle que $(\sigma)_i : \ x_i = \frac{1}{n} i, \quad i \in \{0,1,...,n\}$, par suite $\Delta x = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $i \in \{1,...,n\}$, on a

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 1 \\ m_i &= \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Car, entre deux nombres rationnels, il y a une infinité de nombresrationnels et non rationnels. Donc,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{i=n} M_i \Delta x = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} 1 = 1. \\ s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} m_i \Delta x = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} 0 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve,

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

C'est à dire la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 2.5. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0
2. Calculer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Application : Calculer $J = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x} dx$.
4. Recalculer cette intégrale en charchant directement une primitive de $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}$ sous la forme $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$, où a, b, c et d sont quatre réels à déterminer.

Correction d'exercice 2.5. 1 $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1$.

2 En utilisant intégration par parties, posons, donc,

$$\begin{cases} u(x) = x^n, \\ v'(x) = e^{-x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1}, \\ v(x) = -e^{-x}, \end{cases}$$

$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$. Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= [-x^n e^{-x}]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + nI_{n-1}. \end{aligned}$$

3 <u>**Application :**</u> $J = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x} dx$. Alors, on a

$$\begin{aligned} J &= 3I_3 - 2I_2 + I_1 + I_0 \\ &= 3(-e^{-1} + I_3) - 2I_2 + I_1 + I_0 \\ &= -4e^{-1} + 7I_2 = -11e^{-1} + 14I_1 \\ &= -41e^{-1} + 14. \end{aligned}$$

4 Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$, c'est à dire,
$F'(x) = \Big(-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x - d \Big) e^{-x} = f(x)$.
Par la comparaison les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} -a = 3, \\ (3a - b) = -2, \\ (2b - c) = 1, \\ -d = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, \\ b = 3a + 2 = -7, \\ c = 2b - 1 = -15, \\ d = -1. \end{cases}$$

D'où, $F(x) = \Big(-3x^3 - 7x^2 - 15x - 1 \Big) e^{-x}$. Donc, on conclut que

$$J = \int_0^1 f(x) = [F(x)]_0^1 = [(-3x^3 - 7x^2 - 15x - 1)e^{-x}]_0^1 = -26e^{-1} + 1.$$

Exercice 2.6. En utilisant changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

1. $\int \sin^2 x \cos x dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$.
3. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$. $(*)$
4. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.
5. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$.
6. $\int \frac{dx}{4 + 3x^2}$.

7 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. (*)

8 $\int x^2\sqrt{x-1}dx$.

9 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$.

10 $\int 3x^2(1+x^3)^3dx$.

11 $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}dx$.

Correction d'exercice 2.6. Par changement de variable, on trouve,

1 $I_1 = \int \sin^2 x \cos x dx$. Posons $t=\sin x$ par suite, $dt = \cos x dx$. Alors,

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos x dx = I_1 = \int t^2 x dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2 $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}$. Posons $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ Puis, $dt = \frac{1}{\sqrt{3}}dx$. Donc, on trouve

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

3 Reste comme exercice

4 $I_4 = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. On faisant le changement, $t=\cos x$ ça donne, $dt = -\sin x dx$. Donc,

$$I_4 = -\int \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(t) + C = -\arctan(\cos) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5 $I_5 = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$. On faisant le changement, $t = e^x$ ça donne, $dt = e^x dx$. Alors, on obtient, $I_5 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\left(e^x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

6 $I_6 = \int \frac{dx}{4+3x^{2x}} = \int \frac{dx}{4+3x^{2x}}$. On faisant le changement, $t = e^x$ ça donne, $dt = e^x dx$. Alors, on obtient, $I_5 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\left(e^x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$.

7 Laisser au lecteur

8 $I_8 = \int x^2\sqrt{x-1}dx$. posons $t^2 = (x-1)$, donc, $t = (x-1)^{\frac{1}{2}}$, et $dx = 2tdt$. Puis, on aura

$$\begin{aligned} I_8 &= 2\int t^2(t^2-1)dt = 2\int t^4 dt - 2\int t^2 dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9 $I_9 = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$. On a $PGCD(2,4) = 4$, donc, on choisit $t^4 = x$ par conséquent $t = \sqrt[4]{x}$ et $dx = 4t^{3\cdot}$ Alors, on obtient,

$$\begin{aligned} I_9 &= 4\frac{t^5}{1+t^3}dt = 4\int \left[t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\right]dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{1+t^3}dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln(1+t^3) + C \\ &= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{4}}) + C. \end{aligned}$$

Car, $\frac{x^5}{1+x^3} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^3}$. Voir en face la division Euclidien [style=D]x^5x^3+1I$_{10} + \int 3x^2(1+x^3)^3dx$. Par le changement $t = 1+x^3$, on a $dt = 3x^2dx$, et par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{4}(1+x^3)^4 + C. \end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{5-x^2} + C. \end{aligned}$$

Exercice 2.7. Calculer les les intégrales suivantes

1. $\int_{-1}^{2} [x] dx.(*)$
2. $\int_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2| dx.$

Correction d'exercice 2.7. 1. Si x dans l'intervalle $[-1, 2]$, on a $[x] = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

Donc, l'intégrale de I est donner par

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} [x] dx = -\int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} 0 dx + \int_{1}^{2} dx + \int_{2}^{2} 2 dx \\ &= -[x]_{-1}^{0} + [c]_0^1 + [x]_1^2 + 2[x]_2^2 = -1 + 0 + 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

2. $J = \int_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2| dx$. On étudie le signe du polynôme $p(x) = x^2 - 3x + 2$ sur l'intervalle $[-3, 4]$. Alors, on a la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc, $p(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 tels que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 1, \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$p(x)$		+	0	-	0	+	

Donc,

$$\begin{aligned} J &= \int_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2| dx \\ &= \int_{-3}^{1} (x^2 - 3x + 2) dx - \int_{1}^{2} (x^2 - 3x + 2) dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-3}^{1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{1}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{2}^{4} = -\frac{68}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2.8. Calculer les les intégrales suivantes

1. $\int \cos x \ln(1 + \cos x) dx.$
2. $\int x \arctan x dx.$
3. $\int \arcsin x dx.$
4. $\int (\ln x)^2 dx.(*)$

Correction d'exercice 2.8. On Calcule les les intégrales suivantes

1. $I_1 = \int \cos x \ln(1 + \cos x) dx$. En utilisant l'intégration par parties. Posons, donc,

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1 + \cos x), \\ v'(x) = \cos x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{-\sin x}{1 + \cos x}, \\ v(x) = \sin x, \end{cases}$$

Depuis

$$\begin{aligned} I_1 &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \\ &= \sin x \ln(1 + \cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \\ &= \sin x \ln(1 + \cos x) + \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \sin x \ln(1 + \cos x) + \int (1 - \cos x) dx \\ &= \sin x \ln(1 + \cos x) + x - \sin x + C, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$I_2 = \int \arcsin x dx$. On intègre aussi par parties. Posons, donc,

$$\begin{cases} u(x) = \arcsin x, \\ v'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}, \\ v(x) = x, \end{cases}$$

De puis

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{1}{1-x^2} dx \\ &= x \arcsin x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Reste comme exercice

Exercice 2.9. Calculer les primitives

1. $\int \cos^2 x dx.$
2. $\int \frac{x}{1+x^3} dx.$
3. $\int \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x-3} dx.$
4. $\int \frac{3x+3}{(x^2-2x+1)} dx$
5. $\int \frac{x+3}{x^2-x-2} dx.$
6. $\int \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)} dx.(*)$
7. $\int \frac{3x+3}{(x^2-2x+1)} dx.(*)$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$
9. $\int \frac{1}{e^x+1} dx.$

Correction d'exercice 2.9. On calcule les intégrales indéfinis (les primitives).

1. Pour l'intégrale $I_1 = \int \cos^2 x dx$. On a $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$. Donc, on obtient,

$$\begin{aligned} I_1 = \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Si $I_2 = \int \frac{x}{1+x^3} dx$. En développement la fraction rationnelle $\frac{x}{1+x^3}$,

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \tag{2.1}$$

Donc, par une comparison, on trouve,
$(x+1)\times$ (2.2) implique que $a = -\frac{1}{3}$. Puis, posons $x = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$ et pour $x = 1$ on trouve $b = \frac{5}{6}$. Par intégration on aura

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x}{1+x^3} = \int \frac{-1}{3(x+1)} dx + \int \frac{5x+2}{6(x^2-x+1)} dx \\ &= \frac{-1}{3} \ln(x+1) + \frac{5}{12} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{-1}{3} \ln(x+1) + \frac{5}{12} \ln(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \\ &= \frac{-1}{3} \ln(x+1) + \frac{2}{3} \ln(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

3. $I_3 = \int \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x-3} dx$. Par la division Euclidien, on obtient,
$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x-3} = x^2 + 1 + \frac{4}{x-3}$. [style=D]x$^3 - 3x^2 + x + 1x - 3$
Donc, on a

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x^2 dx + 1 + \int \frac{4}{x-3} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x + 4 \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

4. Pour $I_4 = \int \frac{3x+3}{(x^2-2x+1)} dx$. En développement la fraction rationnelle $\frac{3x+3}{(x^2-2x+1)^2}$, alors, on obtient

$$\frac{3x+3}{(x^2-2x+1)} = \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \tag{2.2}$$

Donc, apès la comparison, on trouve, $a = -\frac{2}{3},\ \ b = \frac{5}{3}$. D'où,

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{2}{3} \int \frac{a}{x+1} dx + 1 + \frac{5}{3} \int \frac{b}{x-2} dx \\ &= -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{5}{3} \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

5. $I_5 = \int \frac{x+3}{x^2-x-2}dx.(*)$

6. ON calcule $I_6 = \int \frac{3}{(x-2)(x^2-4x)}dx$. Par décomposition la fraction $\frac{x+3}{x^2-x-2}$ au éléments simples, on aura

$$\frac{3}{(x-2)(x^2-4x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-4}.$$

et puis, par comparaison les deux membres, on trouve $a = \frac{3}{8},\ b = -\frac{3}{4}$ et $c = \frac{3}{8}$. C'est à dire

$$\frac{3}{(x-2)(x^2-4x)} = \frac{3}{8x} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{3}{8(x-4)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{3}{8x}dx - \int \frac{3}{4(x-2)}dx + \int \frac{3}{8(x-4)}dx \\ &= \frac{3}{8}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{8}\ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

7. Comme $I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}+x)^2}} = \int \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}}$.

Alors, on pose, $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$. Donc,

$$I_7 = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+u^2}}du = \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

8. Si $I_8 = \int \frac{1}{e^x+1}dx$. on pose $t = e^x$ donc, on a $x = \ln t$ et $dt = e^x dx$ c'est à dire $dt = tdx$. Depuis on obtient

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t(t+1)}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt \\ &= \ln(t) - \ln(t+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C. \end{aligned}$$

Exercice supplémentaire 2.1. Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variables recommandé

1. $I_1 = \int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$, poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$, poser $u = \sin x$.
3. $I_3 = \int_0^1 e^{2x}\ln(1+e^x)dx$, poser $u = e^x$.
4. $I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$, poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
5. $I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, poser $\sqrt{1+x} = u$.
6. $I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, poser $x = \sin t$.
7. $I_7 = \int \frac{1}{1+\cos x}dx$, poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.(*)

Correction d'exercice supplémentaire 2.1. 1. $I_1 = \int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a donc, $x = 2\arctan(t)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Par suite, $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = \pi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \\ ou, \\ t = 1, \end{cases}$

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}.$$

En faisant le changement $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ donc, $du = \frac{dt}{\sqrt{3}}$, et on trouve,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan u\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2 $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x} dx$. Posons $u = \sin x$, s'implique que $du = \cos x dx$, et $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0, \\ ou, \\ u = 1. \end{cases}$ Donc, par substitution, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{u^3}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 u du - \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du = \frac{1}{2}\Big[u^2\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

3 $I_3 = \int_0^1 e^{2x} \ln(1+e^x) dx$. En faisant le changement $u = e^x$, donc, $du = e^x dx$, et

$\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1, \\ ou, \\ u = e. \end{cases}$ Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 e^{2x} \ln(1+e^x) dx = \int_0^1 (u^2+u) du \\ &= \frac{1}{3}\Big[u^3\Big]_1^e + \frac{1}{2}\Big[u^2\Big]_1^e = \frac{e^3}{3} + \frac{e}{2} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4 Pour $I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors, $x = 2\arctan(u)$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$,

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, depuis $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1, \\ ou, \\ u = e. \end{cases}$ Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u} du \\ &= \Big[\ln u\Big]_1^{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5 Si $I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, on pose $u = \sqrt{1+x}$. Donc, on aura $x = u^2 - 1$, $dx = 2udu$ et $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = \frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1, \\ ou, \\ u = \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{cases}$ Alors, d'après substitution on a,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -2\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{1-u^2} du \\ &= -2\Big[thu\Big]_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -2\Big(th\sqrt{\frac{3}{2}} - th1\Big). \end{aligned}$$

6 On calcule l'intégrale $I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, donc en faisant le changement suivant $x = \sin t$. Alors, on obtient $dx = \cos t dt$ et si $x = 0 \ \vee \ x = 1$ on a $t = 0 \ \vee \ t = \frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t - 1) dt = \frac{1}{4}\Big[\sin 2t\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\Big[t\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

7 I_7 reste comme exercice.

Exercice supplémentaire 2.2. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ tel que

$$\forall \in [a, b] : f(a + b - x) = f(x).$$

1. Montrer que $\int\limits_a^b xf(x)dx = \frac{a + b}{2} \int\limits_a^b f(x)dx$.

2. En déduit la valeur de l'intégrale $\int\limits_0^\pi x\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}dx$.

Correction d'exercice supplémentaire 2.2. 1 En faisant le changement $t = a+b-x$ donc, $dt = -dx$ et, $\begin{cases} x = a, \\ t = b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = b, \\ t = a, \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)dx &= \int_b^a (a + b - t)f(a + b - t)dt = \int_a^b (a + b - t)f(t)dt \\ &= \int_a^b (a + b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt \\ &= (a + b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \end{aligned}$$

Donc, on a, $2\int_a^b xf(x)dx = (a + b)\int_a^b f(x)dx$. D'où le résultat $\int\limits_a^b xf(x)dx = \frac{a + b}{2} \int\limits_a^b f(x)dx$.

2 Premièrement, on remarque que $f(\pi - x) = f(x)$ telle que $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$. Donc, posons, $u = \cos x$ donc, $du = -\sin x dx$ et on aussi $\begin{cases} x = 0, \\ x = \pi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1, \\ u = -1, \end{cases}$

Alors $\int\limits_0^\pi x\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_1^{-1} \frac{-1}{1 + u^2}du = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1 + u^2}du = \frac{\pi}{2}\Big[\arctan u\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.