Chapitre 3

Équations différentielles

Remarque 3.1. Les exercices notés par $(\star)$ ou supplémentaires ne sera pas corrigé dans cette polycopié, ils laissant au lecteur.

Exercice 3.1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + x\ln(x) = 0.$
2. $y' + 2y = x^2.$
3. $y' + y = 2\sin x.$
4. $y' - y = (x+1)e^x.$
5. $y' + y = 3x - e^x, \quad (*).$

Correction d'exercice 3.1. **1** $(E_1):\ y' + x\ln(x) = 0$, (E_1) est une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $y' = \dfrac{dy}{dx}$, Alors, on a

$$\begin{aligned}(E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -x\ln(x)dx \\ &\Leftrightarrow \quad \int dy = -\int x\ln(x)dx, \quad (\bar{E_1}).\end{aligned}$$

On intègre $(\bar{E_1})$ par parties, posons donc, $\begin{cases} u'(x) = x, \\ v(x) = \ln x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2, \\ v'(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}(\bar{E_1}) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}\int x dx \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2 $(E_2):\ y' + 2y = x^2$, (E_2) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a Premierment, on resoudre l'équation homogène $(EH):\ y' + 2y = 0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}(EH) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -2ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2dx,\ (y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Leftrightarrow |y| = -2x + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ke^{-2x},\ (k = \pm e^C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

b On cherche une solution particulière y_p. Posons donc, $y_p = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p' = 2ax + b$. Par substitution dans (E_2), on obtient

$$2ax^2 + 2(a+b)x + 2c = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1, \\ 2(a+b) = 0, \\ b + 2c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -a = -\dfrac{1}{2}, \\ c = -\dfrac{1}{2}b = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

D'où le résultat $y_p = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$. On sait que la solution générale de (E_2) est écrire sur la forme $y_G = y_H + y_p$. Alors, on trouve

$$y_G = Ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

3 $(E_3):\ y' + y = 2\sin x$. (E_3) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : (EH) : $y' + y = 0$. Donc, on a

$$\begin{aligned}(EH) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx, \ (y \neq 0)\\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int dx \Leftrightarrow |y| = -x + C\\ &\Leftrightarrow \quad y = Ke^{-x}, \ (k = \pm e^{C} \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

b **Solution particulière** y_p : On cherche une solution particulière y_p, sous la forme, $y_p = \lambda \sin x + \mu \cos x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, $y_p' = \lambda \cos x - \mu \sin x$. Par substitution dans (E_3), on aura

$$(\lambda + \mu) \sin x + (\lambda + -\mu) \cos x = 2 \sin x \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu) = 2, \\ (\lambda - \mu) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

C'est à dire $y_p = \sin x + \cos x$. La solution générale de (E_3) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = Ke^{-x} + \sin x + \cos x.$$

4 (E_4) : $y' - y = (x+1)e^x$. (E_4) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : (EH) : $y' - y = 0$. D'près ce qui précède, on a

$$(EH) \Leftrightarrow\Leftrightarrow y = Ke^{x}, \ (k \in \mathbb{R}).$$

b **Solution particulière** y_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière y_p, sous la forme, $y_p = k(x)e^x$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, $y_p' = (k'(x) + k(x))e^x$. Par substitution dans (E_4), on aura.

$$y_p' - y_p' = (x+1)e^x \Rightarrow k'(x) = x + 1 \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

D'où $y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)e^x$. La solution générale de (E_4) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + m\right)e^x e^x, \ \text{où } m = C + k \in \mathbb{R}.$$

5 (E_5) : $y' + y = 3x - e^x$. L'équation (E_5) est définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : (EH) : $y' + y = 0$. Par un calcule similaire à celle dans en dessous, on trouve

$$(EH) \Leftrightarrow y = Ke^{-x}, \ k \in \mathbb{R}.$$

b **Solution particulière** y_p : Dans ce cas la, $y_p = y_{p1} + y_{p2}$, telles que y_{p1} sous la forme, $y_p = ax + b$, et y_{p2} sous la forme $y_p = ae^x$.
Pour y_{p_1}, on a $y_p' = a$. Par substitution dans (E_5), on aura.

$$y_{p_1}' + y_{p_1}' = 3x \Rightarrow ax + a + b = 3x \Rightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = -a = -3, \end{cases}$$

D'où $y_{p_1} = 3x - 3$.
Pour y_{p_2} on a $y_{p_2}' = ae^x$, alors, nous avons

$$y_{p_2}' + y_{p_2}' = -e^x \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Donc, $y_{p_2} = -\frac{1}{2}e^x$. D'où la solution particulière, $y_p = 3x - 3 - \frac{1}{2}e^x$.
Par conséquent la solution générale de (E_5) est donner par

$$y_G = Ke^{-x} + 3x - 3 - \frac{1}{2}e^x, \ \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.2. Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante

1 $xy' + y = x^2y^2$.

2 $-y' + \frac{2}{x}y^2 = e^x y, \quad (*)$.

Correction d'exercice 3.2. 1 (EBr) : $xy' + y = x^2y^2$. On remarque que $y = 0$ est une solution de (EBr). Si $y \neq 0$. On dévise l'équation de Bernoulli (EBr) par y^2 tel que $(y \neq 0)$, et puis par x, $(y \neq 0)$. On trouve, donc

$$(EBr) \Rightarrow xy'y^{-2} + y^{-1} = x^2 \Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x.\overline{(EBr)}$$

Posons $z = y^{-1}$ alors, $z' = -y'y^{-2}$. Par la substitution dans l'équation $\overline{(EBr)}$ on a

$$-z' + \frac{1}{x}z = x. \tag{3.1}$$

On remarque que (3.3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

a **Solution homogène** z_H : $(EH): \ -z' + \frac{1}{x}z = 0$. on a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|cx|, \ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $z = \pm c|x| \Rightarrow z = k|x|, \ k \in \mathbb{R}^*$. sa donner, $y_H = \frac{1}{k|x|}$.

b **Solution particulière** z_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière z_p, sous la forme, $z_p = k(x)|x|$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, on distinger deux cas :
1^{ier} **cas :** Si $x > 0$ on a $z_p = k(x)x$ et $z_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$-z_p' + \frac{1}{x}z_p = x \Rightarrow k'(x) = -1 \Rightarrow k(x) = -x + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $z_p = k(x)x = x(-x+\alpha) \Rightarrow z_p = -x^2 + \alpha x$.
1^{ier} **cas :** Si $x < 0$ on a $z_p = -k(x)x$. de même, on trouve $z_p = -x^2 + \alpha x$. Donc, on résulte que $y_p = \frac{1}{z_p} = \frac{1}{-x^2+\alpha x}$, tel que $x \neq 0$. Par conséquent La solution générale de (EBr) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \frac{1}{k|x|} + \frac{1}{-x^2+\alpha x}, \ \text{où } k, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

2 a $(EBr): \ -y' + \frac{2}{x}y^2 = y\cos x \Leftrightarrow y'y^{-2} + y^{-1}\cos x = \frac{2}{x}y^2, \overline{(EBr)}$, tel que $(y \neq 0)$. On faisant le changement $z = y^{-1}$ alors, $z' = -y'y^{-2}$. Par la substitution dans l'équation $\overline{(EBr)}$, on a

$$z' + z\cos x = \frac{2}{x}. \tag{3.2}$$

L'équation (3.3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

i. **Solution homogène** z_H : $(EH): \ z' + z\cos x = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow z' = -z\cos x \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \cos x dx \Rightarrow \ln|z| = -\sin x + c, \ (c \in \mathbb{R}).$$

Donc, $|z| = e^c e^{-\sin x} \Rightarrow z = ke^{-\sin x}, \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$. Sa donner, $y_H = \frac{1}{ke^{-\sin x}}$.

ii. **Solution particulière** z_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière z_p, sous la forme, $z_p = k(x)e^{-\sin x}$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, on a $z_p' = k'(x)e^{-\sin x} - k(x)\cos x e^{-\sin x}$. Par suite

$$z_p' + z_p = \frac{2}{x}e^{\sin x} \Rightarrow k(x) = (\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c), \ c \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $z_p = e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)$. Donc, $y_p = \frac{1}{z_p} = \frac{1}{e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)}$. Par conséquent La solution générale de (EBr) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \frac{1}{ke^{-\sin x}} + \frac{1}{e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)}, \ \text{où } \ k \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice 3.3. vérifier que $y1$ est une solution particulière de l'équation de Ricatti indiquer. Puis résoudre cette équation , dans toutes les cas suivante

1 $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, ($y_1 = x + 1$ est une solution particulière).

2 $x^2y' + xy + x^2y = 1$, ($y_1 = \frac{1}{x}$ est une solution particulière), $(*)$.

Correction d'exercice 3.3. 1 On resoudre l'équation $(ER): \ y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$. Comme $y_1 = x + 1$ est une solution particulière).
On pose donc, $y = y_1 + \frac{1}{z}$. Alors, on trouve $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$, par substitution dans (ER), on obtient

$$(ER) \Leftrightarrow 1 - \frac{z'}{z^2} - 2x(x+1+\frac{1}{z}) + (x+1+\frac{1}{z})^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow -z' + 2z = -1, \ \overline{(ER)}.$$

L'équation differentielle $\overline{(ER)}$ est linéaire.

a **La solution homogène** z_H : $(EH): \ -z' + 2z = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow -z' + 2z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 2\int dx \Rightarrow \ln|z| = 2x + c, \ (c \in \mathbb{R}).$$

Donc, $z = ke^{2x}, \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$. Sa donner, $y_H = x + 1 + \frac{1}{k}e^{-2x}$.

b **La solution particulière** z_p : On remarque que $z_p = -\dfrac{1}{2}$ est une solution particulière de $\overline{(ER)}$. Par conséquent, nous avons $z = z_H + z_p$ c'est à dire $z = -\dfrac{1}{2} + ke^{2x}$. Comme $y_G = y_1 + \dfrac{1}{z}$. D'où le resultat

$$y_G = x + 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ke^{2x}}, \quad k \in \mathbb{R}^*,$$

tel que $x \neq -\dfrac{1}{2}\ln 2k$ si $k > 0$.

2 (ER) : $x^2y' + xy + x^2y = 1$. Il est claire que $y_1 = \dfrac{1}{x}$ est une solution particulière de (ER). Alors, pour résoudre (ER) généralement en faisant le changement, $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, $(z \neq 0)$. Alors, on trouve $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{z'}{z^2}$, par substitution dans (ER), on aura

$$(ER) \Leftrightarrow x^2(-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2})' + x(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) + x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) = 1 \Leftrightarrow -x^2z' + (x^2-1)z^2 + xz = 0, \ \overline{(ER)}.$$

L'équation differentielle $\overline{(ER)}$ est de Bernoulli. Donc, on dévise $\overline{(ER)}$ par z^2, et posons $t = z^{-1}$. Alors, on obtient

$$\overline{(ER)} \Leftrightarrow x^2z'z^{-2} - xz^{-1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2t' + xt = -x^2 - 1$$

a **La solution homogène** t_H : (EH) : $x^2t' + xt = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow x^2t' + xt = 0 \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|t| = -\ln|cx| = \ln\frac{1}{|cx|}, \ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $t_H = \dfrac{k}{|x|}$, $k = \pm\dfrac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$.

b **La solution particulière** t_p : On pose $t_p = \dfrac{k(x)}{|x|}$, et on distinger 2 cas :

1^{ier} **cas :** Si $x > 0$ on a $t_p = \dfrac{k(x)}{x}$ et $z'_p = \dfrac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$. Par suite

$$x^2t'_p + xt_p = -x^2 - 1 \Leftrightarrow k'(x) = -x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow k(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \ln x + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, nous avons que $t_p = \dfrac{k}{x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{x}\ln x + \dfrac{1}{x}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1^{ier} **cas :** Si $x < 0$, on obtient la même résultat, c'est à dire

$$t_p = \frac{k}{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| + \frac{\alpha}{|x|}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} t = t_H + t_p &= \frac{k}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| + \frac{\alpha}{|x|} \\ &= \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x|, \ \beta = k + \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $t = \dfrac{1}{z}$. Alors, on a $z = \dfrac{1}{\frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x|}$, et par suite, on trouve

$$\begin{aligned} y_G = y_1 + \frac{1}{z} &= \frac{1}{x} + \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| \\ &= \frac{1}{x}\Big(1 - \ln|x|\Big) + \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Exercice 3.4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés

1 $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5.$

2 $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2.$

3 $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1.$

4 $(x+1)y' + y = \ln x, \quad y(1) = 10.$

Correction d'exercice 3.4. **1** Soit l'équation différentielle $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5$. Alors, on commençant par la solution générale, puis on appliquant les conditions initiales.

La solution homogène y_H : (EH) : $xy' - y = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow xy' - y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|cx|, \ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $y_H = kx,\ k = \pm c \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)x$.
Donc, on trouve $y_p = k(x)x$ et $y_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$xy_p' - y_p = 2x^2 \Leftrightarrow k'(x) = 2 \Leftrightarrow k(x) = 2x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc, nous avons que $y_p = (2x+\alpha)x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. D'où le résultat

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (2x+\alpha)x \Leftrightarrow y = 2x^2 + \lambda x$$

tel que $\lambda k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} y = 2x^2 + \lambda x \\ y(1) = 5, \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda = 3.$$

Donc, $y = 2x^2 + 3x$.

2 Pour l'équation $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$. Si $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, nous avons que
La solution homogène y_H : $(EH):\ xy' + y = 0$. De manière similaire on trouve

$$(EH) \Leftrightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|cx| = \frac{1}{|cx|},\ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $y_H = kx,\ k = \pm\dfrac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = \dfrac{k(x)}{x}$.
Donc, on a $y_p' = \dfrac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$. Par suite

$$xy_p' + y_p = e^x \Leftrightarrow k'(x) = e^x \Leftrightarrow k(x) = e^x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Par suite, nous avons que $y_p = (e^x + \alpha)x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (e^x + \alpha)x \Leftrightarrow y = xe^x + \lambda x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} y = xe^x + \lambda x \\ y(1) = 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda = 2 - e.$$

Donc, $y = xe^x + (2-e)x$.

3 $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$. Sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. On a
La solution homogène y_H : $(EH):\ y' + y\tan x = 0$. Alors, si on pose $t = \cos x$, on trouve, $dt = -\sin x dx$ et de puis

$$\begin{aligned} y' + y\tan x = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \tan x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &\Rightarrow \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow |y| = |ct| \\ &\Rightarrow \quad y = k\cos x. \end{aligned}$$

Donc, $y_H = k\cos x,\ k = \pm c \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)\cos x$.
Donc, on a $y_p' = k'(x)\cos x - k(x)\sin x$. Par suite

$$y_p' + y_p \tan x = \cos^2 x \Leftrightarrow k'(x) = \cos x \Leftrightarrow k(x) = \sin x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc, nous avons que $y_p = (\sin x + \alpha)\cos x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda\cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x \\ y(0) = -1, \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda = -1.$$

Donc, $y = -1\cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

4 Reste comme exercice.

Exercice 3.5. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - y' = 0.$
4. $y'' - 2y' + 5y = 0.$
5. $y'' - 6y' + 9y = 0.$
6. $y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (*)$
7. $y'' + 4y' + 13y = 0. \quad (*)$

Correction d'exercice 3.5. On résoudre les équations differentielles linéaires et homogènes d'ordre 2 suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (1)$. L'équation caractéristique de (1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

La discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_2 = 2,$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{r_1 x} \quad &\Rightarrow \quad y_1 = e^{x} \\ y_2 = e^{r_2 x} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = e^{2x}. \end{aligned}$$

Comme le wronskien $W \neq 0$. Car, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x}e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0.$$

D'où la soluion générale de l'équation homogène (1) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $y'' - 5y' + 6y = 0. \quad (2)$. L'équation caractéristique de (2) est

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

La discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = 2 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_2 = 3,$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{r_1 x} \quad &\Rightarrow \quad y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{r_2 x} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = e^{3x}. \end{aligned}$$

Comme le wronskien $W \neq 0$. Car, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^x & 3e^{3x}e^{2x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0.$$

D'où la soluion générale de l'équation homogène (2) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. $y'' - y' = 0. \quad (3)$. On a l'équation caractéristique de (3) est

$$r^2 - r = 0 \Rightarrow r = 0 \ \vee \ r = 1.$$

Alors, la soluion générale de l'équation homogène (3) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda + \mu e^{x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. $y'' - 2y' + 5y = 0. \quad (4)$ On a l'équation caractéristique de (4) est $r^2 - 2r + 5 = 0$ et $\Delta = -16 < 0$. Donc, $\Delta = (4i)^2$ et $\sqrt{\Delta} = 4i = \delta_1 \ \vee \ \sqrt{\Delta} = 4i = \delta_2$. Par suite

$$r_1 = \frac{-b - \delta_1}{2a} \Rightarrow r_1 = 1 - 2i \text{ et } r_2 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \Rightarrow r_2 = 1 + 2i,$$

et on trouve,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad &\Rightarrow \quad y_1 = e^{x}\cos 2x \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \quad &\Rightarrow \quad y_2 = e^{x}\sin 2x. \end{aligned}$$

Alors, la soluion générale de l'équation homogène (4) est donner par

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= e^{\alpha x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x), \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5 $y'' - 6y' + 9y = 0$. (5) On a l'équation caractéristique de (5) est $r^2 - 6r + 9 = 0$ et $\Delta = 0$. Donc, $r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow r = 3$, et on trouve,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{rx} \quad &\Rightarrow \quad y_1 = e^{3x} \\ y_2 = xe^{rx} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = xe^{3x}. \end{aligned}$$

D'où, la soluion générale de l'équation (5),

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= (\lambda + \mu x)e^{3x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6 Reste comme exercice.

7 Reste comme exercice.

Exercice 3.6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1

- **a** $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$.
- **b** $y'' + 2y' + y = 4xe^x$.
- **c** $y'' + y' - 2y = \sin x$.
- **d** $y'' = shx$.
- **e** $y'' + y = x + e^{-3x}$. $(\star)$
- **f** $y'' - 3y' + 2y = shx - 2xchx$. $(\star)$
- **g** $y'' - 2y = ch2x$.

2 Dans les équations ⓐ et ⓒ, donner la solution qui satisfait les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
Indication : pour l'équation ⓐ, chercher la solution perticulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Correction d'exercice 3.6. On resoudre les équations différentielles suivantes :

1

a Soit l'équation $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$, (1). D'après l'exercice 5, on a la solution de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $y_H = \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière y_p sous la forme $y_p = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Alors, $y_p' = 2ax + b$ et $y_p'' = 2a$. Par substitution, on trouve,

$$y_p'' - 3y_p' + 2y = 4x^2 \Rightarrow 2ax^2 + 2(b - 3a)x + 2a - 3b + 2c = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4, \\ 2(b - 3a) = 0, \\ 2a - 3b + 2c = 0, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ 2b = 3a = 6, \\ c = 7. \end{cases}$$

D'où $y_p = 2x^2 + 6x + 7$. Alors, la solution générale de (1) est donner par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

b Pour l'équation $y'' + 2y' + y = 4xe^x$. (2) et d'après une calcule similaire à celle dans l'exercice 5, on a l'équation caractéristique de (2) est $r^2 2r + 1 = 0$ et $\Delta = 0$. Donc, $r = r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow r = -1$, et on trouve,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{rx} \quad &\Rightarrow \quad y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{rx} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = xe^{-x}. \end{aligned}$$

D'où, la soluion générale de l'équation (2),

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= (\lambda + \mu x)e^{-x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Maintenant on charche une solution particulière y_p sous la forme $y_p = (ax + b)e^x$, $a \neq 0$. Alors, $y_p' = (2ax + b + 2)e^x$ et $y_p'' = (2ax + b + 2a)e^x$. Par substitution dans (2), on trouve,

$$y_p'' + 2y_p' + y = 4xe^x \Rightarrow 4(ax + b + a)e^x = 4xe^x \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b + a = 0, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

D'où $y_p = (x - 1)e^x$. Alors, la solution générale de (2) est

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{-x} + \mu xe^{-x} + (x - 1)e^x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

c Soit l'équation $y'' + y' - 2y = \sin x$, (3). Alors, on a
$(EH):\ y'' + y' - 2y = 0$, et l'équation caratéristique est $r^2 + r - 2 = 0$, $\Delta = 9$. Donc, on trouve $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, c'est à dire $y_H = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.
Pour la solution particulière y_p. Posons $y_p = \alpha \cos x + \beta \sin x$, tels que $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$y_p'' + y_p' - 2y = \sin x \Rightarrow (-3\alpha + \beta)\cos x - (\alpha + \beta)\sin x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha - \beta = 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4}, \\ \beta = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

D'où $y_p = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x$. Par conséquent, la solution générale est définie par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

d Pour l'équation différentielle $y'' = shx$, (4). Par intégration deux fois, et comme $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, on a

$$\begin{aligned} (4) \quad &\Leftrightarrow \quad y'' = shx \Leftrightarrow \int dy' = \int shx dx \Leftrightarrow y' = chx + \lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \int dy = \int chx dx + \lambda \int dx \Leftrightarrow y = shx + \lambda x + \beta, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

e Reste comme exercice.

f Reste comme exercice.

g $y'' - 2y = ch2x$. $(EH):\ y'' - 2y = 0$, et l'équation caratéristique est $r^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow r \pm \sqrt{2}$. Donc, on trouve $y_H = \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{-\sqrt{2}x}$.
Pour la solution particulière y_p. Posons $y_p = \alpha ch2x$, tels que $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a
$y_p'' - 2y = ch2x \Rightarrow 5\alpha ch2x = ch2x \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$. D'où $y_p = \frac{1}{5}ch2x$. Par conséquent, la solution générale est définie par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{54}ch2xx, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

2 ⓐ La solution de l équations ⓐ, qu'il satisfait les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. Donc, on a le système $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4x^2, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$
D'après ce qui précède, on a

$$y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Donc, on appliquant les conditions initiales, on trouve,

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 7 = 1, \\ \lambda + 2\mu + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -8, \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Alors, $y = -8e^x + 2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$.

ⓒ On a le système $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin x, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$
D'après ce qui précède, nous avons que

$$y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Par l'application des conditions initiales, on trouve,

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + -2\mu - \dfrac{1}{4} = 1, \\ \lambda + 2\mu + \dfrac{5}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{5}{4}, \\ \mu = 0 \end{cases}$$

C'est à dire la solution demandé est, $y = \frac{5}{4}e^x - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x$.

Exercice supplémentaire 3.1. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes

1 $y' - 4y = 3$, $(x \in \mathbb{R}).(\star)$

2 $y' - y\tan x = \sin x$, $\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).(\star)$

3 $y' = \dfrac{y}{x} + x$, $(x \in \mathbb{R}_+^*)$.

4 $(x^2 + 1)y' + xy = 0$, $(x \in \mathbb{R})$.

Correction d'exercice supplémentaire 3.1. 1 Exercice

2 Exercice

3) $y' = \dfrac{y}{x} + x, \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$.
Si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, nous avons que
La solution homogène y_H : $(EH): \; y' - \dfrac{y}{x} = 0$. On remarque $y = 0$ est une solution triviale. Si $y \neq 0$, on aura, donc

$$(EH) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|cx|, (c > 0) \Rightarrow y_H = kx, \; k = \pm c \in \mathbb{R}^*.$$

La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)x$.
Donc, on a $y_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$y_p' = \frac{y_p}{x} + x \Leftrightarrow k'(x) = 1 \Leftrightarrow k(x) = x + \alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Depuis $y_p = (x+\alpha)x, \; \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (x+\alpha)x \Leftrightarrow y = x^2 + \lambda x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.

4) $(x^2+1)y' + xy = 0, \quad (x \in \mathbb{R}).(4)$
L''equation (4) équivalent à l'équation $y + \dfrac{x}{x^2+1} y = 0$ qui est une équation homogènen. Donc, on a

$$(4) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{xdx}{x^2+1} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c = \ln\left(\frac{c}{\sqrt{x^2+1}}\right), (c > 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}}, \; k = \pm c \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice supplémentaire 3.2. Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes

1) $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0$
2) $y' = y(y-1)\cos x$
3) $y' - xy^2 = x \; (\star)$
4) $y' = \dfrac{x+1}{y^2}$
5) $y' = e^{x+y}, \; (\star)$.

Correction d'exercice supplémentaire 3.2. 1) Soit l'équation differentielle $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0, \quad (1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}y' - y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \arcsin(x) + c \\ &= \quad |y| = ke^{\arcsin(x)}, \; k = \pm e^c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Si $y' = y(y-1)\cos x, \quad (2)$. Alors, pour $y \neq 0$ et $y \neq 1$ on a $\dfrac{y'}{y(y-1)} = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{y'}{y-1}$. Donc, on trouve

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \cos x dx \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x dx \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \sin x + c \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \sin x + c \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+1} = Ke^{\sin x}, \; k = \pm e^c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Reste comme exercice.

4) $y' = \dfrac{x+1}{y^2}, \quad (4)$. On resoudre cette équation par séparation de variables. On d donc pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} (4) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int (x+1)dx \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + c \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + x + c}, \end{aligned}$$

tel que $\dfrac{1}{2}x^2 + x + c \neq 0$.

5) Reste comme exercice.

Exercice 3.7. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + x\ln(x) = 0.$
2. $y' + 2y = x^2.$
3. $y' + y = 2\sin x.$
4. $y' - y = (x+1)e^x.$
5. $y' + y = 3x - e^x, \quad (*).$

Correction d'exercice 3.7. 1 $(E_1): \ y' + x\ln(x) = 0$, (E_1) est une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $y' = \dfrac{dy}{dx}$, Alors, on a

$$\begin{aligned}(E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -x\ln(x)dx \\ &\Leftrightarrow \quad \int dy = -\int x\ln(x)dx, \quad (\bar{E_1}).\end{aligned}$$

On intègre $(\bar{E_1})$ par parties, posons donc, $\begin{cases} u'(x) = x, \\ v(x) = \ln x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2, \\ v'(x) = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}(\bar{E_1}) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}\int xdx \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + C, \ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2 $(E_2): \ y' + 2y = x^2$, (E_2) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a Premierment, on resoudre l'équation homogène $(EH): \ y' + 2y = 0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}(EH) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -2ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2dx, \ (y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Leftrightarrow |y| = -2x + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ke^{-2x}, \ (k = \pm e^C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

b On cherche une solution particulière y_p. Posons donc, $y_p = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p' = 2ax + b$. Par substitution dans (E_2), on obtient

$$2ax^2 + 2(a+b)x + 2c = x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1, \\ 2(a+b) = 0, \\ b + 2c = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = -a = -\dfrac{1}{2}, \\ c = -\dfrac{1}{2}b = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

D'où le résultat $y_p = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$. On sait que la solution générale de (E_2) est écrire sur la forme $y_G = y_H + y_p$. Alors, on trouve

$$y_G = Ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

3 $(E_3): \ y' + y = 2\sin x$. (E_3) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : $(EH): \ y' + y = 0$. Donc, on a

$$\begin{aligned}(EH) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx, \ (y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int dx \Leftrightarrow |y| = -x + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ke^{-x}, \ (k = \pm e^C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

b **Solution particulière** y_p : On cherche une solution particulière y_p, sous la forme, $y_p = \lambda\sin x + \mu\cos x, \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, $y_p' = \lambda\cos x - \mu\sin x$. Par substitution dans (E_3), on aura

$$(\lambda + \mu)\sin x + (\lambda + -\mu)\cos x = 2\sin x \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu) = 2, \\ (\lambda - \mu) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

C'est à dire $y_p = \sin x + \cos x$. La solution générale de (E_3) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = Ke^{-x} + \sin x + \cos x.$$

4 $(E_4): \ y' - y = (x+1)e^x$. (E_4) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : (EH) : $y' - y = 0$. D'près ce qui précède, on a

$$(EH) \Leftrightarrow\Leftrightarrow y = Ke^x,\ (k \in \mathbb{R}).$$

b **Solution particulière** y_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière y_p, sous la forme, $y_p = k(x)e^x$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, $y_p' = (k'(x) + k(x))e^x$. Par substitution dans (E_4), on aura.

$$y_p' - y_p' = (x+1)e^x \Rightarrow k'(x) = x + 1 \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

D'où $y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)e^x$. La solution générale de (E_4) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + m\right)e^x e^x,\ \text{où } m = C + k \in \mathbb{R}.$$

5 (E_5) : $y' + y = 3x - e^x$. L'équation (E_5) est définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : (EH) : $y' + y = 0$. Par un calcule similaire à celle dans en dessous, on trouve

$$(EH) \Leftrightarrow y = Ke^{-x},\ k \in \mathbb{R}.$$

b **Solution particulière** y_p : Dans ce cas la, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, telles que y_{p_1} sous la forme, $y_p = ax + b$, et y_{p_2} sous la forme $y_p = ae^x$. Pour y_{p_1}, on a $y_p' = a$. Par substitution dans (E_5), on aura.

$$y_{p_1}' + y_{p_1}' = 3x \Rightarrow ax + a + b = 3x \Rightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = -a = -3, \end{cases}$$

D'où $y_{p_1} = 3x - 3$.
Pour y_{p_2} on a $y_{p_2}' = ae^x$, alors, nous avons

$$y_{p_2}' + y_{p_2}' = -e^x \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Donc, $y_{p_2} = -\frac{1}{2}e^x$. D'où la solution particulière, $y_p = 3x - 3 - \frac{1}{2}e^x$.
Par conséquent la solution générale de (E_5) est donner par

$$y_G = Ke^{-x} + 3x - 3 - \frac{1}{2}e^x,\ \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.8. Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante

1 $xy' + y = x^2y^2$.

2 $-y' + \frac{2}{x}y^2 = e^x y, \quad (*)$.

Correction d'exercice 3.8. 1 (EBr) : $xy' + y = x^2y^2$. On remarque que $y = 0$ est une solution de (EBr). Si $y \neq 0$. On dévise l'équation de Bernoulli (EBr) par y^2 tel que $(y \neq 0)$, et puis par x, $(y \neq 0)$. On trouve, donc

$$(EBr) \Rightarrow xy'y^{-2} + y^{-1} = x^2 \Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x.\overline{(EBr)}$$

Posons $z = y^{-1}$ alors, $z' = -y'y^{-2}$. Par la substitution dans l'équation $\overline{(EBr)}$ on a

$$-z' + \frac{1}{x}z = x. \tag{3.3}$$

On remarque que (3.3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

a **Solution homogène** z_H : (EH) : $-z' + \frac{1}{x}z = 0$. on a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|cx|,\ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $z = \pm c|x| \Rightarrow z = k|x|,\ k \in \mathbb{R}^*$. sa donner, $y_H = \frac{1}{k|x|}$.

b **Solution particulière** z_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière z_p, sous la forme, $z_p = k(x)|x|$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, on distinger deux cas :
1^{ier} **cas :** Si $x > 0$ on a $z_p = k(x)x$ et $z_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$-z_p' + \frac{1}{x}z_p = x \Rightarrow k'(x) = -1 \Rightarrow k(x) = -x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $z_p = k(x)x = x(-x + \alpha) \Rightarrow z_p = -x^2 + \alpha x$.
1^{ier} **cas :** Si $x < 0$ on a $z_p = -k(x)x$. de même, on trouve $z_p = -x^2 + \alpha x$. Donc, on résulte que $y_p = \frac{1}{z_p} = \frac{1}{-x^2 + \alpha x}$, tel que $x \neq 0$. Par conséquent La solution générale de (EBr) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \frac{1}{k|x|} + \frac{1}{-x^2 + \alpha x},\ \text{où } k, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

2 a $(EBr): \; -y' + \frac{2}{x}y^2 = y\cos x \Leftrightarrow y'y^{-2} + y^{-1}\cos x = \frac{2}{x}y^2, \overline{(EBr)}$, tel que $(y \neq 0)$. On faisant le changement $z = y^{-1}$ alors, $z' = -y'y^{-2}$. Par la substitution dans l'équation $\overline{(EBr)}$, on a

$$z' + z\cos x = \frac{2}{x}. \tag{3.4}$$

L'équation (3.3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

i. **Solution homogène** z_H : $(EH): \; z' + z\cos x = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow z' = -z\cos x \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \cos x dx \Rightarrow \ln|z| = -\sin x + c, \; (c \in \mathbb{R}).$$

Donc, $|z| = e^c e^{-\sin x} \Rightarrow z = ke^{-\sin x}, \; k = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$. Sa donner, $y_H = \frac{1}{ke^{-\sin x}}$.

ii. **Solution particulière** z_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière z_p, sous la forme, $z_p = k(x)e^{-\sin x}$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, on a $z'_p = k'(x)e^{-\sin x} - k(x)\cos xe^{-\sin x}$. Par suite

$$z'_p + z_p = \frac{2}{x}e^{\sin x} \Rightarrow k(x) = (\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c), \; c \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $z_p = e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)$. Donc, $y_p = \frac{1}{z_p} = \frac{1}{e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)}$. Par conséquent La solution générale de (EBr) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \frac{1}{ke^{-\sin x}} + \frac{1}{e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)}, \text{ où } \; k \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice 3.9. vérifier que $y1$ est une solution particulière de l'équation de Ricatti indiquer. Puis résoudre cette équation , dans toutes les cas suivante

1 $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, ($y_1 = x + 1$ est une solution particulière).

2 $x^2y' + xy + x^2y = 1$, ($y_1 = \frac{1}{x}$ est une solution particulière), $\;(*)$.

Correction d'exercice 3.9. 1 On resoudre l'équation $(ER): \; y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$. Comme $y_1 = x+1$ est une solution particulière). On pose donc, $y = y_1 + \frac{1}{z}$. Alors, on trouve $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$, par substitution dans (ER), on obtient

$$(ER) \Leftrightarrow 1 - \frac{z'}{z^2} - 2x(x+1+\frac{1}{z}) + (x+1+\frac{1}{z})^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow -z' + 2z = -1, \; \overline{(ER)}.$$

L'équation differentielle $\overline{(ER)}$ est linéaire.

a **La solution homogène** z_H : $(EH): \; -z' + 2z = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow -z' + 2z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 2\int dx \Rightarrow \ln|z| = 2x + c, \; (c \in \mathbb{R}).$$

Donc, $z = ke^{2x}, \; k = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$. Sa donner, $y_H = x + 1 + \frac{1}{k}e^{-2x}$.

b **La solution particulière** z_p : On remarque que $z_p = -\frac{1}{2}$ est une solution particulière de $\overline{(ER)}$. Par conséquent, nous avons $z = z_H + z_p$ c'est à dire $z = -\frac{1}{2} + ke^{2x}$. Comme $y_G = y_1 + \frac{1}{z}$. D'où le resultat

$$y_G = x + 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ke^{2x}}, \quad k \in \mathbb{R}^*,$$

tel que $x \neq -\frac{1}{2}\ln 2k$ si $k > 0$.

2 $(ER): \; x^2y' + xy + x^2y = 1$. Il est claire que $y_1 = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (ER). Alors, pour résoudre (ER) généralement en faisant le changement, $y = y_1 + \frac{1}{z}, \; (z \neq 0)$. Alors, on trouve $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$, par substitution dans (ER), on aura

$$(ER) \Leftrightarrow x^2(-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2})' + x(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) + x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) = 1 \Leftrightarrow -x^2z' + (x^2-1)z^2 + xz = 0, \; \overline{(ER)}.$$

L'équation differentielle $\overline{(ER)}$ est de Bernoulli. Donc, on dévise $\overline{(ER)}$ par z^2, et posons $t = z^{-1}$. Alors, on obtient

$$\overline{(ER)} \Leftrightarrow x^2z'z^{-2} - xz^{^{-1}} = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2t' + xt = -x^2 - 1$$

a **La solution homogène** t_H : $(EH):\ x^2t' + xt = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow x^2t' + xt = 0 \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|t| = -\ln|cx| = \ln\frac{1}{|cx|},\ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $t_H = \frac{k}{|x|},\ k = \pm\frac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$.

b **La solution particulière** t_p : On pose $t_p = \frac{k(x)}{|x|}$, et on distinger 2 cas :

1^{ier} **cas :** Si $x > 0$ on a $t_p = \frac{k(x)}{x}$ et $z_p' = \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$. Par suite

$$x^2t_p' + xt_p = -x^2 - 1 \Leftrightarrow k'(x) = -x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow k(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \ln x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, nous avons que $t_p = \frac{k}{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

1^{ier} **cas :** Si $x < 0$, on obtient la même résultat, c'est à dire

$$t_p = \frac{k}{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| + \frac{\alpha}{|x|},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} t = t_H + t_p &= \frac{k}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| + \frac{\alpha}{|x|} \\ &= \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x|,\ \beta = k + \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $t = \frac{1}{z}$. Alors, on a $z = \frac{1}{\frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x|}$, et par suite, on trouve

$$\begin{aligned} y_G = y_1 + \frac{1}{z} &= \frac{1}{x} + \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| \\ &= \frac{1}{x}\Big(1 - \ln|x|\Big) + \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Exercice 3.10. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés

1 $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5.$

2 $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2.$

3 $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1.$

4 $(x+1)y' + y = \ln x, \quad y(1) = 10.$

Correction d'exercice 3.10. 1 Soit l'équation différentielle $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5$. Alors, on commençant par la solution générale, puis on appliquant les conditions initiales.

La solution homogène y_H : $(EH):\ xy' - y = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow xy' - y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|cx|,\ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $y_H = kx,\ k = \pm c \in \mathbb{R}^*$.

La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)x$.

Donc, on trouve $y_p = k(x)x$ et $y_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$xy_p' - y_p = 2x^2 \Leftrightarrow k'(x) = 2 \Leftrightarrow k(x) = 2x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc, nous avons que $y_p = (2x + \alpha)x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. D'où le résultat

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (2x + \alpha)x \Leftrightarrow y = 2x^2 + \lambda x$$

tel que $\lambda k + \alpha \in \mathbb{R}$.

Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} y = 2x^2 + \lambda x \\ y(1) = 5, \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda = 3.$$

Donc, $y = 2x^2 + 3x$.

2. Pour l'équation $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$. Si $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, nous avons que
La solution homogène y_H : (EH) : $xy' + y = 0$. De manière similaire on trouve

$$(EH) \Leftrightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|cx| = \frac{1}{|cx|},\ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $y_H = kx,\ k = \pm\frac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = \frac{k(x)}{x}$.
Donc, on a $y_p' = \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$. Par suite

$$xy_p' + y_p = e^x \Leftrightarrow k'(x) = e^x \Leftrightarrow k(x) = e^x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Par suite, nous avons que $y_p = (e^x + \alpha)x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (e^x + \alpha)x \Leftrightarrow y = xe^x + \lambda x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} y = xe^x + \lambda x \\ y(1) = 2, \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 - e.$$

Donc, $y = xe^x + (2 - e)x$.

3. $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$. Sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. On a
La solution homogène y_H : (EH) : $y' + y\tan x = 0$. Alors, si on pose $t = \cos x$, on trouve, $dt = -\sin x dx$ et de puis

$$\begin{aligned} y' + y\tan x = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \tan x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &\Rightarrow \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow |y| = |ct| \\ &\Rightarrow \quad y = k\cos x. \end{aligned}$$

Donc, $y_H = k\cos x,\ k = \pm c \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)\cos x$.
Donc, on a $y_p' = k'(x)\cos x - k(x)\sin x$. Par suite

$$y_p' + y_p \tan x = \cos^2 x \Leftrightarrow k'(x) = \cos x \Leftrightarrow k(x) = \sin x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc, nous avons que $y_p = (\sin x + \alpha)\cos x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \\ y(0) = -1, \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1.$$

Donc, $y = -1\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

4. Reste comme exercice.

Exercice 3.11. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
3. $y'' - y' = 0$.
4. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
5. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
6. $y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (*)$
7. $y'' + 4y' + 13y = 0. \quad (*)$

Correction d'exercice 3.11. On résoudre les équations differentielles linéaires et homogènes d'ordre 2 suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (1)$. L'équation caractéristique de (1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

La discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_2 = 2,$$

Alors,

$$\begin{array}{lll} y_1 = e^{r_1 x} & \Rightarrow & y_1 = e^{x} \\ y_2 = e^{r_2 x} & \Rightarrow & y_2 = e^{2x}. \end{array}$$

Comme le wronskien $W \neq 0$. Car, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x}e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0.$$

D'où la soluion générale de l'équation homogène (1) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda e^{x} + \mu e^{2x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 $y'' - 5y' + 6y = 0. \quad (2)$. L'équation caractéristique de (2) est

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

La discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = 2 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_2 = 3,$$

Alors,

$$\begin{array}{lll} y_1 = e^{r_1 x} & \Rightarrow & y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{r_2 x} & \Rightarrow & y_2 = e^{3x}. \end{array}$$

Comme le wronskien $W \neq 0$. Car, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{x} & 3e^{3x}e^{2x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0.$$

D'où la soluion générale de l'équation homogène (2) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3 $y'' - y' = 0. \quad (3)$. On a l'équation caractéristique de (3) est

$$r^2 - r = 0 \Rightarrow r = 0 \ \vee \ r = 1.$$

Alors, la soluion générale de l'équation homogène (3) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda + \mu e^{x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4 $y'' - 2y' + 5y = 0. \quad (4)$ On a l'équation caractéristique de (4) est $r^2 - 2r + 5 = 0$ et $\Delta = -16 < 0$. Donc, $\Delta = (4i)^2$ et $\sqrt{\Delta} = 4i = \delta_1 \ \vee \ \sqrt{\Delta} = 4i = \delta_2$. Par suite

$$r_1 = \frac{-b - \delta_1}{2a} \Rightarrow r_1 = 1 - 2i \text{ et } r_2 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \Rightarrow r_2 = 1 + 2i,$$

et on trouve,

$$\begin{array}{lll} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x & \Rightarrow & y_1 = e^{x}\cos 2x \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x & \Rightarrow & y_2 = e^{x}\sin 2x. \end{array}$$

Alors, la soluion générale de l'équation homogène (4) est donner par

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= e^{\alpha x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x), \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5 $y'' - 6y' + 9y = 0. \quad (5)$ On a l'équation caractéristique de (5) est $r^2 - 6r + 9 = 0$ et $\Delta = 0$. Donc, $r = r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow r = 3$, et on trouve,

$$\begin{array}{lll} y_1 = e^{rx} & \Rightarrow & y_1 = e^{3x} \\ y_2 = xe^{rx} & \Rightarrow & y_2 = xe^{3x}. \end{array}$$

D'où, la soluion générale de l'équation (5),

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= (\lambda + \mu x)e^{3x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6 Reste comme exercice.

7 Reste comme exercice.

Exercice 3.12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1

a $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$.

b $y'' + 2y' + y = 4xe^x$.

c $y'' + y' - 2y = \sin x$.

d $y'' = shx$.

e $y'' + y = x + e^{-3x}$. $(\star)$

f $y'' - 3y' + 2y = shx - 2xchx$. $(\star)$

g $y'' - 2y = ch2x$.

2 Dans les équations ⓐ et ⓒ, donner la solution qui satisfait les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
Indication : pour l'équation ⓐ, chercher la solution perticulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Correction d'exercice 3.12. On resoudre les équations différentielles suivantes :

1

a Soit l'équation $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$, (1). D'après l'exercice 5, on a la solution de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $y_H = \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière y_p sous la forme $y_p = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Alors, $y_p' = 2ax + b$ et $y_p'' = 2a$. Par substitution, on trouve,

$$y_p'' - 3y_p' + 2y = 4x^2 \Rightarrow 2ax^2 + 2(b - 3a)x + 2a - 3b + 2c = 4x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4, \\ 2(b - 3a) = 0, \\ 2a - 3b + 2c = 0, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ 2b = 3a = 6, \\ c = 7. \end{cases}$$

D'où $y_p = 2x^2 + 6x + 7$. Alors, la solution générale de (1) est donner par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

b Pour l'équation $y'' + 2y' + y = 4xe^x$. (2) et d'après une calcule similaire à celle dans l'exercice 5, on a l'équation caractéristique de (2) est $r^2 2r + 1 = 0$ et $\Delta = 0$. Donc, $r = r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow r = -1$, et on trouve,

$$\begin{array}{ccc} y_1 = e^{rx} & \Rightarrow & y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{rx} & \Rightarrow & y_2 = xe^{-x}. \end{array}$$

D'où, la soluion générale de l'équation (2),

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= (\lambda + \mu x)e^{-x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Maintenant on charche une solution particulière y_p sous la forme $y_p = (ax + b)e^x,\ a \neq 0$. Alors, $y_p' = (2ax + b + 2)e^x$ et $y_p'' = (2ax + b + 2a)e^x$. Par substitution dans (2), on trouve,

$$y_p'' + 2y_p' + y = 4xe^x \Rightarrow 4(ax + b + a)e^x = 4xe^x \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b + a = 0, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

D'où $y_p = (x - 1)e^x$. Alors, la solution générale de (2) est

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{-x} + \mu xe^{-x} + (x - 1)e^x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

c Soit l'équation $y'' + y' - 2y = \sin x$, (3). Alors, on a
$(EH):\ y'' + y' - 2y = 0$, et l'équation caratéristique est $r^2 + r - 2 = 0$, $\Delta = 9$. Donc, on trouve $r_1 = 1,\ r_2 = -2$, c'est à dire $y_H = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.
Pour la solution particulière y_p. Posons $y_p = \alpha \cos x + \beta \sin x$, tels que $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$y_p'' + y_p' - 2y = \sin x \Rightarrow (-3\alpha + \beta)\cos x - (\alpha + \beta)\sin x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha - \beta = 1, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4}, \\ \beta = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

D'où $y_p = -\dfrac{1}{4}\cos x + \dfrac{5}{4}\sin x$. Par conséquent, la solution générale est définie par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

d Pour l'équation différentielle $y'' = shx$, (4). Par intégration deux fois, et comme $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, on a

$$\begin{aligned} (4) \quad &\Leftrightarrow \quad y'' = shx \Leftrightarrow \int dy' = \int shxdx \Leftrightarrow y' = chx + \lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \int dy = \int chxdx + \lambda \int dx \Leftrightarrow y = shx + \lambda x + \beta, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

e Reste comme exercice.

f Reste comme exercice.

g $y''-2y = ch2x$. (EH) : $y''-2y = 0$, et l'équation caratéristique est $r^2-2 = 0 \Leftrightarrow r\pm\sqrt{2}$. Donc, on trouve $y_H = \lambda e^{\sqrt{2}x}+\mu e^{-\sqrt{2}x}$.
Pour la solution particulière y_p. Posons $y_p = \alpha ch2x$, tels que $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a
$y''_p - 2y = ch2x \Rightarrow 5\alpha ch2x = ch2x \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$. D'où $y_p = \frac{1}{5}ch2x$. Par conséquent, la solution générale est définie par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{54}ch2xx, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

2 ⓐ La solution de l équations ⓐ, qu'il satisfait les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. Donc, on a le système $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4x^2, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$
D'après ce qui précède, on a

$$y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Donc, on appliquant les conditions initiales, on trouve,

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 7 = 1, \\ \lambda + 2\mu + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -8, \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Alors, $y = -8e^x + 2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$.

ⓒ On a le système $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin x, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$
D'après ce qui précède, nous avons que

$$y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Par l'application des conditions initiales, on trouve,

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + -2\mu - \frac{1}{4} = 1, \\ \lambda + 2\mu + \frac{5}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{4}, \\ \mu = 0 \end{cases}$$

C'est à dire la solution demandé est, $y = \frac{5}{4}e^x - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x$.

Exercice supplémentaire 3.3. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes

1 $y' - 4y = 3, \quad (x \in \mathbb{R}).(\star)$

2 $y' - y\tan x = \sin x, \quad \left(x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).(\star)$

3 $y' = \frac{y}{x} + x, \quad (x \in \mathbb{R}^*_+)$.

4 $(x^2 + 1)y' + xy = 0, \quad (x \in \mathbb{R})$.

Correction d'exercice supplémentaire 3.3. **1** Exercice

2 Exercice

3 $y' = \frac{y}{x} + x, \quad (x \in \mathbb{R}^*_+)$.
Si $x \in \mathbb{R}^*_+$. Alors, nous avons que
La solution homogène y_H : (EH) : $y' - \frac{y}{x} = 0$. On remarque $y = 0$ est une solution triviale. Si $y \neq 0$, on aura, donc

$$(EH) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|cx|, (c > 0) \Rightarrow y_H = kx,\ k = \pm c \in \mathbb{R}^*.$$

La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)x$.
Donc, on a $y'_p = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$y'_p = \frac{y_p}{x} + x \Leftrightarrow k'(x) = 1 \Leftrightarrow k(x) = x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Depuis $y_p = (x + \alpha)x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (x + \alpha)x \Leftrightarrow y = x^2 + \lambda x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.

4 $(x^2 + 1)y' + xy = 0, \quad (x \in \mathbb{R}).(4)$
L''equation (4) équivalent à l'équation $y + \frac{x}{x^2+1}y = 0$ qui est une équation homogènen. Donc, on a

$$(4) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{xdx}{x^2+1} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c = \ln\left(\frac{c}{\sqrt{x^2+1}}\right), (c > 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}},\ k = \pm c \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice supplémentaire 3.4. Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes

1. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0$
2. $y' = y(y-1)\cos x$
3. $y' - xy^2 = x$ $(\star)$
4. $y' = \dfrac{x+1}{y^2}$
5. $y' = e^{x+y},\ (\star).$

Correction d'exercice supplémentaire 3.4. 1 Soit l'équation differentielle $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0, \quad (1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}y' - y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \arcsin(x) + c \\
&= \quad |y| = ke^{\arcsin(x)},\ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2 Si $y' = y(y-1)\cos x, \quad (2)$. Alors, pour $y \neq 0$ et $y \neq 1$ on a $\dfrac{y'}{y(y-1)} = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{y'}{y-1}$. Donc, on trouve

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \cos x dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x dx \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \sin x + c \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \sin x + c \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+1} = Ke^{\sin x},\ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3 Reste comme exercice.

4 $y' = \dfrac{x+1}{y^2}, \quad (4)$. On resoudre cette équation par séparation de variables. On d donc pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int (x+1)dx \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + c \\
&\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + x + c},
\end{aligned}$$

tel que $\dfrac{1}{2}x^2 + x + c \neq 0$.

5 Reste comme exercice.