Module: Analyse 1

Examen de Remplacement

A. U: 2021 – 2020

Durée: 1h 30 m

Exercice un (6pts)

Soit l'ensemble E définie par $E = \left\{ \frac{2|x|}{|x|+1} : x \in \mathbb{R} \right\}$. Alors,

1. Montrer que E est borné. (Indication: $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq |x| < |x|+1$).
2. Déterminer $\inf(E)$. Est ce que E admet le petit élément ($\min(E)$)?
3. En utilisant le propriété caractéristique de la borne supérieure (sup), montrer que $\sup(E) = 2$. Est ce que E admet le grand élément ($\max(E)$)?.

Exercice deux (7pts)

Soit la suite (u_n) définie par, $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. En déduit la nature de la suite (u_n). Puis calculer sa limite.

Exercice trois (7pts)

Soit la fonction f définie par, $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 0.
2. Déterminer $\tilde{f}$ le prolongement de f au point 0.
3. Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ au point 0.
   (On peut utiliser la règle de l'Hôpital en cas de besoin)
4. La fonction $\tilde{f}$ est elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?. Justifier votre réponse.