Correction d'exercice 1 : (6 pts)

1 pt **1 -** On a $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq |x| < |x|+1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{|x|}{|x|+1} < 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{2|x|}{|x|+1} < 2$.

0.5 pt Alors, en on déduit que $E \subset [0, 2[$, c'est-à-dire E est borné.

2 - a) Comme 0 est un minorant de E, car $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{2|x|}{|x|+1} \leq 0$ et $0 \in E$ (pour $x = 0$). Donc,

1 pt $\inf(E) = 0$.

1 pt **b)** Par conséquent, en on déduit que $\min(E) = 0$, car $\inf(E) \in E$.

3 - Maintenant, on montre que $\inf(E) = 0$.

a)

$$\sup(E) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \quad \forall a \in E & : a \leq 0 \\ (ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in E & : 2 - \varepsilon < a_0. \end{cases}$$

0.5 pt Tel que $a = \dfrac{2|x|}{|x|+1}$.

0.5 pt D'après ce que précédent (i) est évident, car $E \subset [0, 2[$.

Montrons (ii). Soit $\varepsilon > 0$, alors, on a, $a_0 \in E \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} : a_0 = \dfrac{2|x_0|}{|x_0|+1}$. Donc,

$2 - \varepsilon < a_0 \Leftrightarrow |x_0| > \dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$ (où $\varepsilon < 2$) $\Leftrightarrow (x_0 < \dfrac{\varepsilon - 2}{\varepsilon} \ \vee \ x_0 > \dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon})$.

1 pt Ce qui signifie qu'il (ii) est vraie.

b) Comme $2 \notin E$, car si on pose $2 = \dfrac{2|x|}{|x|+1}$. Alors, on obtient $2 = 0$ (contradiction). Donc

0.5 pt $\max(E)$ n'existe pas.

Correction d'exercice 2 : (7 pts)

Soit la suite (u_n) définie par, $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 - On raisonner par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.(On note $P(n)$).

0.5 pt **a)** (Initialisation) Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3 > 1$ (par définition). Donc $P(0)$ est vraie.

b) Héridété) Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$ est vraie et on montre que : $u_{n+1} > 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1+2u_n}{2+u_n} - 1, \\ &= \frac{u_n - 1}{2+u_n} > 0. \end{aligned}$$

1.5 pt Car, $u_n > 1$. D'où $u_{n+1} > 1$.

0.5 pt Par conséquent $P(n)$ est vraie.

1.5 pt **2 -** On a pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{2+u_n} < 0$.

0.5 pt C'est-à-dire, (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

01 pt **3 - a)** Comme la suite (u_n) est strictement décroissante et bornée inférieurement par 1. Alors, d'après le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite $l \geq 1$.

0.5 pt **b)** Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Alors, si on passe à la limite dans la relation récurrente, on obtient,
01 pt $l = \dfrac{1+2l}{2+l} \Rightarrow l^2 = 1 \Rightarrow (l = 1)$, car $l > 0$.

Correction d'exercice 3 : (7 pts)

Soit la fonction f définie par, $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$.

0.5 pt **1 -** f prolongeable par continuité au point $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe et finie.

0.5 pt On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = (e^{2x})'_{x=0^+} = 2$.

0.5 pt On a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = (e^{2x})'_{x=0^-} = 2$.

0.5 pt Alors, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2(\text{finie})$.

2 - Le prolongement de f au point 0 est la fonction $\tilde{f}$ qui définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & : \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 2 & : \quad x = 0. \end{cases}$$

0.5 pt

3 - Au point 0. On utilisant la règle de l'Hopital.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\frac{e^{2x}-1}{x}-2}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^{2x}-1-2x}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2e^{2x} = 2 =$$

1 pt $\tilde{f}'_d(0)$.

De même manière, on aura, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{x}-2}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{e^{2x}-1-2x}{x^2} =$

0.5 pt $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 2e^{2x} = 2 = \tilde{f}'_g(0)$.

0.5 pt Comme $\tilde{f}'_d(0) = 2 = \tilde{f}'_g(0)$. Alors, $\tilde{f}$ est dérivable au point 0, et $\tilde{f}'(0) = 2$.

4 - a) D'après ce qui précède $\tilde{f}$ est dérivable au point 0.
0.5 pt Si $x \in \mathbb{R}^*$, $\tilde{f}$ est rapport des fonctions dérivables. Donc, $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\quad \tilde{f}'(x) = \begin{cases} \dfrac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2} & : \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 2 & : \quad x = 0. \end{cases}$

0.5 pt

0.5 pt **b)** $\tilde{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, car elle est rapport des fonctions continues.
0.5 pt Au point 0. Par la règle de l'Hôpital, (2 fois), on trouve,
$\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2e^{2x} = 2 = \tilde{f}'(0)$.
0.5 pt D'où la continuité de $\tilde{f}'$ sur $\mathbb{R}$. Donc, $\tilde{f}$ est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

FIN.