Chapitre 2

ESPACES DE SOBOLEV

2.1 Introduction et avertissement

Dans ce chapitre nous définissons les espaces de Sobolev qui sont **les espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles**. Physiquement, les espaces de Sobolev s'interprètent comme des espaces de **fonctions d'énergie finie**. Ce chapitre est le plus "technique" de cet ouvrage et relève en partie d'un cours de mathématiques "pures". Il n'est pas nécessaire de connaître les démonstrations de tous les résultats de ce chapitre (sauf pour les plus simples et les plus utiles) : ce qui importe ici, c'est **l'esprit des résultats plus que la lettre de leurs démonstrations**.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Comme les espaces de Sobolev se construisent à partir de la notion de fonction mesurable et de l'espace L^2 des fonctions de carrés sommables, la Section 2.2 donne quelques rappels à ce sujet. On y introduit aussi la notion de **dérivation faible**. La Section 2.3 contient toutes les définitions et les résultats qu'il faut absolument connaître sur les espaces de Sobolev pour suivre le reste du cours. A la fin du chapitre le **Tableau 2.1 récapitule tous les résultats nécessaires pour la suite.**

2.2 Fonctions de carré sommable et dérivation faible

2.2.1 Quelques rappels d'intégration

Tous les résultats de cette sous-section sont détaillés dans le cours de mathématiques [6]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx,$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert (voir le théorème 3.3.2 de [6]). On note

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

la norme correspondante. Rappelons que les fonctions mesurables dans Ω sont définies **presque partout** dans Ω : si on change les valeurs d'une fonction mesurable f sur un sous-ensemble de Ω de mesure nulle, on ne change pas la fonction mesurable f. Autrement dit, deux fonctions mesurables f et g seront dites égales si $f(x) = g(x)$ presque partout dans Ω, c'est-à-dire s'il existe $E \subset \Omega$ tel que la mesure de Lebesgue de E est nulle et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in (\Omega \setminus E)$.

On note $C_c^\infty(\Omega)$ (ou $\mathcal{D}(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. Remarquons que l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas réduit à la seule fonction nulle partout (ce qui n'est pas évident ! Voir le corollaire 3.2.6 dans [6]). Notons aussi que les fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$ s'annulent, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de Ω. Nous rappelons le résultat de densité suivant (voir le théorème 3.4.3 de [6])

Théorème 2.2.1 *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une suite $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Comme corollaire nous obtenons la généralisation immédiate du Lemme 1.2.9.

Corollaire 2.2.2 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx = 0,$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω.

2.2.2 Dérivation faible

On définit tout d'abord le concept de dérivée faible dans $L^2(\Omega)$. Cette notion généralise la dérivation usuelle (parfois appelée, par opposition, dérivation forte) et est un cas particulier de la dérivation au sens des distributions (voir [6]).

Définition 2.2.3 *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \{1, ..., N\}$, telles que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega w_i(x)\phi(x)\,dx.$$

Chaque w_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de v et notée désormais $\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

La Définition 2.2.3 a bien un sens : en particulier, la notation $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ est univoque car, en vertu du Corollaire 2.2.2, les fonctions w_i sont uniques (si elles existent). Bien sûr, si v est dérivable au sens usuel et que ses dérivées partielles appartiennent à $L^2(\Omega)$, alors les dérivées usuelle et faible de v coïncident (utiliser le Corollaire 1.2.3). Donnons tout de suite un critère simple et pratique pour déterminer si une fonction est dérivable au sens faible.

Lemme 2.2.4 *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ et pour tout indice $i \in \{1, ..., N\}$, on a*

$$\left| \int_\Omega v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.3}$$

alors v est dérivable au sens faible.

Démonstration. Soit L la forme linéaire définie par

$$L(\phi) = \int_\Omega v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

A priori $L(\phi)$ n'est définie que pour $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, mais grâce à l'inégalité (2.3), on peut étendre L par continuité à toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ car $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ d'après le Théorème 2.2.1. En fait, l'inégalité (2.3) prouve que la forme linéaire L est continue sur $L^2(\Omega)$. En vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction $(-w_i) \in L^2(\Omega)$ telle que

$$L(\phi) = -\int_\Omega w_i(x) \phi(x)\, dx,$$

ce qui prouve que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$. □

Exercice 2.2.1 Soit $\Omega = (0, 1)$. Montrer que la fonction x^α est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice 2.2.2 Soit Ω un ouvert borné. Montrer qu'une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, et C^1 par morceaux est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 2.2.3 Soit Ω un ouvert borné. Montrer qu'une fonction C^1 par morceaux mais pas continue n'est pas dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

On retrouve un résultat bien connu pour la dérivée usuelle.

Proposition 2.2.5 *Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$ dérivable au sens faible et telle que toutes ses dérivées partielles faibles $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, pour $1 \leq i \leq N$, sont nulles. Alors, pour chaque composante connexe de Ω, il existe une constante C telle que $v(x) = C$ presque partout dans cette composante connexe.*

On peut facilement généraliser la Définition 2.2.3 de la dérivée faible à certains opérateurs différentiels qui ne font intervenir que certaines combinaisons de dérivées partielles (et non pas toutes). C'est par exemple le cas de la divergence d'une fonction à valeurs vectorielles qui nous sera utile par la suite.

Définition 2.2.6 *Soit σ une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^N$ dont toutes les composantes appartiennent à $L^2(\Omega)$ (on note $\sigma \in L^2(\Omega)^N$). On dit que σ admet une divergence au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x)\, dx = -\int_\Omega w(x) \phi(x)\, dx.$$

La fonction w est appelée la divergence faible de σ et notée désormais $\mathrm{div}\sigma$.

La justification de la Définition 2.2.6 est que, si σ est une fonction régulière, alors une simple intégration par parties (voir le Corollaire 1.2.3) montre que l'on a bien $w = \text{div}\sigma$. Une généralisation facile du critère de dérivation faible du Lemme 2.2.4 est donnée par le résultat suivant (dont nous laissons la démonstration au lecteur en guise d'exercice).

Lemme 2.2.7 *Soit σ une fonction de $L^2(\Omega)^N$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a*

$$\left| \int_\Omega \sigma(x) \cdot \nabla\phi(x)\, dx \right| \leq C\|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors σ admet une divergence au sens faible.

Exercice 2.2.4 Soit Ω un ouvert borné constitué de deux ouverts Ω_1 et Ω_2 séparés par une surface $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Montrer qu'une fonction vectorielle de classe C^1 sur chaque morceau Ω_1 et Ω_2 admet une divergence faible dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si sa composante normale est continue à travers la surface Γ.

2.3 Définition et principales propriétés

2.3.1 Espace $H^1(\Omega)$

Définition 2.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall\, i \in \{1, ..., N\}\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{2.5}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v au sens de la Définition 2.2.3.

En physique ou en mécanique l'espace de Sobolev est souvent appelé **espace d'énergie** au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (c'est-à-dire de norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ finie). Les fonctions d'énergie finie peuvent éventuellement être “singulières” ce qui a un sens physique possible (concentration ou explosion locale de certaines grandeurs). On consultera avec intérêt les exemples explicites de l'Exercice 2.3.2 et du Lemme 3.2.33.

Proposition 2.3.2 *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \Big(u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \Big) dx \tag{2.6}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Il est évident que (2.6) est bien un produit scalaire dans $H^1(\Omega)$. Il reste donc à montrer que $H^1(\Omega)$ est complet pour la norme associée. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Par définition de la norme de $H^1(\Omega)$, $(u_n)_{n\geq 1}$ ainsi que $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\geq 1}$ pour $i \in \{1, ..., N\}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe des limites u et w_i telles que u_n converge vers u et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge vers w_i dans $L^2(\Omega)$. Or, par définition de la dérivée faible de u_n, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \phi(x)\, dx. \tag{2.7}$$

Passant à la limite $n \to +\infty$ dans (2.7), on obtient

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_\Omega w_i(x) \phi(x)\, dx,$$

ce qui prouve que u est dérivable au sens faible et que w_i est la i-ème dérivée partielle faible de u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Donc, u appartient bien à $H^1(\Omega)$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$. □

Exercice 2.3.1 Montrer que les fonctions continues, C^1 par morceaux et à support borné dans $\overline{\Omega}$, appartiennent à $H^1(\Omega)$.

En dimension $N \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont en général **ni continues ni bornées**, comme le montre le contre-exemple suivant.

Exercice 2.3.2 Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $N = 2$, montrer que la fonction $u(x) = |\log(|x|)|^\alpha$ appartient à $H^1(B)$ pour $0 < \alpha < 1/2$, mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Si $N \geq 3$, montrer que la fonction $u(x) = |x|^{-\beta}$ appartient à $H^1(B)$ pour $0 < \beta < (N-2)/2$, mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

La dimension $N = 1$ fait "exception" à la non-continuité des fonctions de $H^1(\Omega)$ comme l'affirme le lemme suivant où, sans perte de généralité, on prend $\Omega = (0, 1)$.

Lemme 2.3.3 *Pour toute fonction $v \in H^1(0, 1)$ et pour tout $x, y \in [0, 1]$, on a*

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s)\, ds. \tag{2.8}$$

Plus généralement, pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $v \to v(x)$, définie de $H^1(0, 1)$ dans $\mathbb{R}$, est une forme linéaire continue sur $H^1(0, 1)$. En particulier, toute fonction $v \in H^1(0, 1)$ est continue sur $[0, 1]$.

Il est très important en pratique de savoir si **les fonctions régulières sont denses dans l'espace de Sobolev** $H^1(\Omega)$. Cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev qui apparaît ainsi très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complété par les limites de suites de fonctions régulières dans la norme de l'énergie $\|u\|_{H^1(\Omega)}$. Cela permet de démontrer facilement de nombreuses propriétés en les établissant d'abord sur les fonctions régulières puis en utilisant un argument de "densité".

Théorème 2.3.5 (de densité) *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, ou encore si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Rappelons que la notation $\mathbb{R}^N_+$ désigne le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^N$ tel que $x_N > 0\}$.

Remarque 2.3.6 L'espace $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui est dense dans $H^1(\Omega)$ est constitué des fonctions régulières de classe C^∞ à support borné (ou compact) dans le fermé $\overline{\Omega}$. En particulier, si Ω est borné, toutes les fonctions de $C^\infty(\overline{\Omega})$ ont nécessairement un support borné, et donc $C_c^\infty(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$. Précisons que les fonctions de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ ne s'annulent pas nécessairement sur le bord de l'ouvert Ω, ce qui différencie cet espace de $C_c^\infty(\Omega)$ (voir la Remarque 1.2.2). Par contre, si Ω n'est pas borné, les fonctions de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ s'annulent "à l'infini". •

Remarque 2.3.7 La notion de régularité d'un ouvert a été introduite dans la Définition 1.2.5. Il n'est pas nécessaire de connaître précisément cette définition de la régularité d'un ouvert. Il suffit de savoir *grosso modo* que l'on demande que le bord de l'ouvert soit une surface régulière et que l'on exclut certaines "pathologies" (voir la Remarque 1.2.6). •

2.3.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 2.3.8 *Soit $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

On verra un peu plus loin (voir le Corollaire 2.3.16) que $H_0^1(\Omega)$ est en fait le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des **fonctions qui s'annulent sur le bord** $\partial\Omega$ puisque tel est le cas des fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. En général, $H_0^1(\Omega)$ est **strictement plus petit** que $H^1(\Omega)$ car $C_c^\infty(\Omega)$ est un sous-espace **strict** de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ (voir le Théorème 2.3.5 et la Remarque 2.3.6). Une exception importante est le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$: en effet, dans ce cas $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^N = \Omega$ et le Théorème 2.3.5 affirme que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, donc on a $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. Cette exception se comprend aisément puisque l'espace entier $\mathbb{R}^N$ n'a pas de bord.

Proposition 2.3.9 *Muni du produit scalaire (2.6) de $H^1(\Omega)$, l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Par définition $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ (qui est un espace de Hilbert), donc c'est aussi un espace de Hilbert. □

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante.

Proposition 2.3.10 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{2.9}$$

Démonstration. Pour les fonctions $v \in C_c^\infty(\Omega)$ on a déjà démontré l'inégalité de Poincaré (2.9) dans le Lemme 1.3.5. Par un argument de densité le résultat reste vrai pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$. En effet, comme $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ (par sa Définition 2.3.8), il existe une suite $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|v - v_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left(|v - v_n|^2 + |\nabla(v - v_n)|^2\right) dx = 0.$$

En particulier, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |v_n|^2 \, dx = \int_\Omega |v|^2 \, dx \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx.$$

Par application du Lemme 1.3.5, on a

$$\int_\Omega |v_n(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2 dx. \tag{2.10}$$

On passe alors à la limite $n \to +\infty$ dans chacun des deux termes de l'inégalité (2.10) pour obtenir le résultat recherché. Ce type d'argument "par densité" sera très souvent repris par la suite. □

Remarque 2.3.11 L'inégalité de Poincaré (2.9) n'est pas vraie pour les fonctions de $H^1(\Omega)$. En effet, les fonctions constantes (non nulles) annulent le terme de droite dans (2.9) mais pas le terme de gauche. L'hypothèse sous-jacente essentielle dans l'inégalité de Poincaré est que les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω (voir la Remarque 2.3.18 pour des variantes de cette hypothèse). •

Un corollaire important de l'inégalité de Poincaré est le résultat suivant qui fournit une norme équivalente plus simple dans $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 2.3.12 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Démonstration. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. La première inégalité

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|v|^2 + |\nabla v|^2\right) dx\right)^{1/2}$$

est évidente. D'autre part, l'inégalité de Poincaré du Lemme 1.3.5 conduit à

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (C+1) \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = (C+1)|v|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

ce qui prouve que $|v|_{H_0^1(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{H^1(\Omega)}$. □

2.3.3 Traces et formules de Green

Nous avons vu qu'en dimension $N \geq 2$ les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues (voir le contre-exemple de l'Exercice 2.3.2). Comme pour toute fonction mesurable, on ne peut donc parler de la valeur ponctuelle d'une fonction $v \in H^1(\Omega)$ que "presque partout" dans Ω. En particulier, il n'est pas clair de savoir si on peut définir la "valeur au bord", ou "trace" de v sur le bord $\partial\Omega$ car $\partial\Omega$ est un ensemble négligeable ou de mesure nulle. Fort heureusement pour les problèmes aux limites que nous étudions, il y a tout de même un moyen pour définir la trace $v_{|\partial\Omega}$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Ce résultat essentiel, appelé théorème de trace, est le suivant.

Théorème 2.3.13 (de trace) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0*

$$\begin{array}{lcl} H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) & \rightarrow & L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v & \rightarrow & \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} . \end{array} \tag{2.11}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Remarque 2.3.14 Grâce au Théorème de trace 2.3.13 on peut donc parler de la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$. Ce résultat est remarquable car il n'est pas vrai pour une fonction de $L^2(\Omega)$. •

Démonstration. Démontrons le résultat pour le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N, x_N > 0\}$. Soit $v \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Avec la notation $x = (x', x_N)$, on a

$$|v(x',0)|^2 = -2\int_0^{+\infty} v(x', x_N)\frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N)\, dx_N,$$

et, en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$|v(x',0)|^2 \leq \int_0^{+\infty}\left(|v(x', x_N)|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N)\right|^2\right) dx_N.$$

Par intégration en x', on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x',0)|^2\, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^N_+}\left(|v(x)|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_N}(x)\right|^2\right) dx,$$

c'est-à-dire $\|v\|_{L^2(\partial\mathbb{R}^N_+)} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}$. Par densité de $C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, on obtient ainsi le résultat.

Pour un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, on utilise un argument de cartes locales du bord qui permet de se ramener au cas de $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Nous ne détaillons pas cet argument de cartes locales (assez technique) et nous renvoyons le lecteur curieux à [1]. □

Le Théorème de trace 2.3.13 permet de généraliser aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green précédemment établie pour des fonctions de classe C^1 au Corollaire 1.2.3.

Théorème 2.3.15 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)\,ds, \tag{2.13}$$

où $n = (n_i)_{1\le i\le N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Démonstration. Rappelons que la formule (2.13) a été établie pour des fonctions de classe C^1 dans le Corollaire 1.2.3. On utilise à nouveau un argument de densité. Par densité de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ (voir le Théorème 2.3.5), il existe des suites $(u_n)_{n\ge1}$ et $(v_n)_{n\ge1}$ dans $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ qui convergent dans $H^1(\Omega)$ vers u et v, respectivement. En vertu du Corollaire 1.2.3 on a

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v_n\frac{\partial u_n}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i\,ds. \tag{2.14}$$

On peut passer à la limite $n \to +\infty$ dans les deux premiers termes de (2.14) car u_n et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ (respectivement, v_n et $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$) convergent vers u et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (respectivement, v et $\frac{\partial v}{\partial x_i}$) dans $L^2(\Omega)$. Pour passer à la limite dans la dernière intégrale de (2.14), on utilise la continuité de l'application trace γ_0, c'est-à-dire l'inégalité (2.12), qui permet d'affirmer que $\gamma_0(u_n)$ (respectivement, $\gamma_0(v_n)$) converge vers $\gamma_0(u)$ (respectivement, $\gamma_0(v)$) dans $L^2(\partial\Omega)$. On obtient ainsi la formule (2.13) pour des fonctions u et v de $H^1(\Omega)$. □

Comme conséquence du Théorème de trace 2.3.13 on obtient une caractérisation très simple de l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 2.3.16 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

Démonstration. Comme toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ est limite d'une suite de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ qui ont bien sûr une trace nulle, la continuité de l'application trace γ_0 implique que la trace de la limite est aussi nulle. On en déduit que $H_0^1(\Omega)$ est contenu dans le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$. La réciproque est plus technique et découle d'un double procédé de cartes locales puis de régularisation et de translation. Nous renvoyons à [1], [7], [24] pour plus de détails. □

Grâce au Corollaire 2.3.16 nous pouvons donner une autre démonstration de la Proposition 2.3.10 à propos de l'inégalité de Poincaré. Cette nouvelle démonstration n'est plus "constructive" mais est basée sur un argument de contradiction qui possède le mérite de se généraliser très facilement. En effet, il existe de nombreuses variantes de l'inégalité de Poincaré, adaptées aux différents modèles d'équations aux dérivées partielles. Au vu de l'importance de cette inégalité pour la suite, il n'est donc pas inutile d'en donner une démonstration aisément adaptable à tous les cas de figure.

Autre démonstration de la Proposition 2.3.10. On procède par contradiction. S'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx,$$

cela veut dire qu'il existe une suite $v_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$1 = \int_\Omega |v_n(x)|^2 dx > n \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2 dx. \tag{2.15}$$

En particulier, (2.15) implique que la suite v_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Par application du Théorème de Rellich 2.3.21 ci-dessous, il existe une sous-suite $v_{n'}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$. De plus, (2.15) montre que la suite $\nabla v_{n'}$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ (composante par composante). Par conséquent, $v_{n'}$ est une suite de Cauchy dans $H_0^1(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert, donc elle converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite v. Comme on a

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2 dx \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

on en déduit, en vertu du Lemme 2.2.5, que v est une constante dans chaque composante connexe de Ω. Mais comme v est nulle sur le bord $\partial\Omega$ (en vertu du Corollaire 2.3.16), v est identiquement nulle dans tout Ω. Par ailleurs,

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |v_n(x)|^2 dx = 1,$$

ce qui est une contradiction avec le fait que $v = 0$. □

Remarque 2.3.18 La démonstration par contradiction de la Proposition 2.3.10 se généralise facilement. Prenons par exemple, le cas d'un ouvert Ω, borné connexe et régulier de classe $\mathcal{C}^1$, dont le bord $\partial\Omega$ se décompose en deux parties disjointes régulières $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$ dont les mesures superficielles sont non nulles. On définit un espace V par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}.$$

Par application du Théorème de trace 2.3.13, il est facile de voir que V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$. Comme pour $H_0^1(\Omega)$, l'argument de contradiction permet de démontrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que toute fonction $v \in V$ vérifie l'inégalité de Poincaré (2.9). •

2.3.4 Un résultat de compacité

Nous consacrons cette sous-section à l'étude d'une propriété de compacité connue sous le nom de théorème de Rellich qui jouera un rôle essentiel dans la théorie spectrale des problèmes aux limites (voir le Chapitre 5) que nous utiliserons pour résoudre les problèmes d'évolution en temps. Rappelons tout d'abord que, dans un espace de Hilbert de dimension infinie, il n'est pas vrai que, de toute suite bornée, on puisse extraire une sous-suite convergente (au contraire de ce qui se passe en dimension finie, voir l'Exercice 2.3.5).

Théorème 2.3.21 (de Rellich) *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).*

Le Théorème 2.3.21 peut être faux si l'ouvert Ω n'est pas borné. Par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^N$, l'injection canonique de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la suite $u_n(x) = u(x + ne)$ où e est un vecteur non nul et u une fonction de $H^1(\mathbb{R}^N)$ (on translate u dans la direction e). Il est clair qu'aucune sous-suite de u_n ne converge dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Remarque 2.3.22 Si l'on remplace $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$, alors non seulement le Théorème 2.3.21 de Rellich reste vrai, mais en plus il n'est pas nécessaire de supposer que l'ouvert Ω est régulier. •

Exercice 2.3.5 Soit $\Omega = (0,1)$ et $u_n(x) = \sin(2\pi n x)$. Montrer que la suite u_n est uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$, mais qu'il n'existe aucune sous-suite convergente. Pour cela on montrera, grâce à une intégration par parties, que, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(x)\phi(x)\,dx = 0,$$

et on en déduira une contradiction si une sous-suite de u_n converge dans $L^2(\Omega)$. Généraliser ce contre exemple à $H^1(\Omega)$ en considérant une primitive de u_n.

2.3.5 Espaces $H^m(\Omega)$

On peut aisément généraliser la Définition 2.3.1 de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ aux fonctions qui sont $m \geq 0$ fois dérivables au sens faible. Commençons par donner une convention d'écriture bien utile. Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ un **multi-incide**, c'est-à-dire un vecteur à N composantes entières positives $\alpha_i \geq 0$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et, pour une fonction v,

$$\partial^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

A partir de la Définition 2.2.3 de la dérivée première faible, on définit par récurrence sur m la dérivée d'ordre m faible : on dit qu'une fonction $v \in L^2(\Omega)$ est m fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles faibles d'ordre $m - 1$

sont dérivables faiblement au sens de la Définition 2.2.3. Remarquons que, dans la définition d'une dérivée croisée, l'ordre de dérivation n'est pas important, à cause du théorème de Schwarz $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}$, ce qui justifie la notation $\partial^\alpha v$ où l'ordre de dérivation n'est pas indiqué.

Définition 2.3.23 *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall\, \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{2.17}$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le résultat facile suivant.

Proposition 2.3.24 *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x)\, dx \tag{2.18}$$

et de la norme $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Les fonctions de $H^m(\Omega)$ ne sont pas toujours continues ou régulières (cela dépend de m et de la dimension N), mais si m est suffisamment grand alors toute fonction de $H^m(\Omega)$ est continue. Rappelons qu'en vertu du Lemme 2.3.3, en dimension d'espace $N = 1$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont continues. Nous admettrons le résultat suivant qui généralise le Lemme 2.3.3 aux dimensions supérieures.

Théorème 2.3.25 *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, et si $m > N/2$, alors $H^m(\Omega)$ est un sous-espace de l'ensemble $C(\overline{\Omega})$ des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.*

Remarque 2.3.26 Par application réitérée du Théorème 2.3.25 à une fonction et à ses dérivées, on peut en fait améliorer sa conclusion. S'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $m - N/2 > k$, alors $H^m(\Omega)$ est un sous-espace de l'ensemble $C^k(\overline{\Omega})$ des fonctions k fois différentiables sur $\overline{\Omega}$. •

La "morale" du Théorème 2.3.25 est que plus m est grand, plus les fonctions de $H^m(\Omega)$ sont régulières, c'est-à-dire dérivables au sens usuel (il suffit d'appliquer successivement le Théorème 2.3.25 à une fonction $v \in H^m(\Omega)$ et à ses dérivées $\partial^\alpha v \in H^{m-|\alpha|}(\Omega)$).

Comme pour $H^1(\Omega)$, les fonctions régulières sont denses dans $H^m(\Omega)$ (si du moins l'ouvert Ω est régulier ; voir la Définition 1.2.5). La démonstration du Théorème de densité 2.3.5 se généralise très facilement à $H^m(\Omega)$. Nous ne la répéterons pas et nous énonçons seulement le résultat de densité suivant.

Théorème 2.3.27 *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^m$, ou bien si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, alors $C^\infty_c(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

On peut aussi obtenir des résultats de trace et des formules de Green d'ordre plus élevés pour l'espace $H^m(\Omega)$. Par souci de simplicité, nous nous contentons de traiter le cas $m = 2$ (qui est le seul que nous utiliserons par la suite).

Théorème 2.3.28 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. On définit l'application trace γ_1*

$$\begin{array}{lll} H^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v & \to & \gamma_1(v) = \left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}, \end{array} \tag{2.19}$$

avec $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla u \cdot n$. Cette application γ_1 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^2(\Omega)$, on a

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C \|v\|_{H^2(\Omega)}. \tag{2.20}$$

Démonstration. L'existence de l'application trace γ_1 (et ses propriétés) est une simple conséquence du précédent Théorème de trace 2.3.13 pour les fonctions de $H^1(\Omega)$. En effet, si $v \in H^2(\Omega)$, alors $\nabla v \in H^1(\Omega)^N$ et on peut donc définir la trace de ∇v sur $\partial\Omega$ comme une fonction de $L^2(\partial\Omega)^N$. Comme la normale est une fonction continue bornée sur $\partial\Omega$, on en déduit bien que $\frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$. □

Le Théorème de trace 2.3.28 permet de généraliser aux fonctions de $H^2(\Omega)$ une formule de Green précédemment établie pour des fonctions de classe C^2 au Corollaire 1.2.4.

Théorème 2.3.30 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x)\, ds. \tag{2.22}$$

Démonstration. Comme (2.22) est vraie pour des fonctions de classe C^2 et que les fonctions régulières sont denses dans $H^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, on utilise un argument de densité. Nous renvoyons à la démonstration du Théorème 2.3.15 pour plus de détails. Le seul argument nouveau ici est qu'il faut utiliser la continuité de l'application trace γ_1, c'est-à-dire l'inégalité (2.20). □

Lemme 2.2.4 (dérivation faible)	$u \in L^2(\Omega)$ est dérivable au sens faible si, $\forall i$, $\left\| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right\| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$
Proposition 2.3.2	$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx$
Théorème 2.3.5 (théorème de densité)	$C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$
Proposition 2.3.10 (inégalité de Poincaré)	$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ (Ω borné) $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$
Théorème 2.3.13 (théorème de trace)	$u \to u_{\|\partial\Omega}$ application continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$
Théorème 2.3.15 (formule de Green)	$\forall u, v \in H^1(\Omega)$ $\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\, n_i\, ds$
Corollaire 2.3.16 (caractérisation de $H_0^1(\Omega)$)	$H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$
Théorème 2.3.21 (théorème de Rellich)	l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (Ω borné régulier)
Théorème 2.3.30 (formule de Green)	$\forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ $\int_\Omega v \Delta u\, dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds$

TABLE 2.1 – Principaux résultats sur les espaces de Sobolev qu'il faut absolument connaître.