L'idée principale de **l'approche variationnelle** est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (1.8), ce qui entraînera le même résultat pour l'équation (1.1) à cause de la Proposition 1.2.7. En effet, nous allons voir qu'il existe une théorie à la fois simple et puissante pour analyser les formulations variationnelles. Néanmoins cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions tests (dans les notations précédentes, l'espace X) est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas pour $X = \{v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème. La principale difficulté dans l'application de l'approche variationnelle sera donc qu'il faudra utiliser un autre espace que X, à savoir l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ qui est bien un espace de Hilbert (voir le Chapitre 2).

Exercice 1.2.3 On considère le Laplacien avec condition aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (1.9) si et seulement si u appartient à $C^1(\overline{\Omega})$ et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \text{ pour toute fonction } v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{1.10}$$

En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans $C^2(\overline{\Omega})$ de (1.9) est que $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

Exercice 1.2.4 On considère l'équation des plaques

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

On note X l'espace des fonctions v de $C^2(\overline{\Omega})$ telles que v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ s'annulent sur $\partial\Omega$. Soit u une fonction de $C^4(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (1.11) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \tag{1.12}$$

1.3 Théorie de Lax-Milgram

1.3.1 Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel V. Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y\rangle$, qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. (Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est une suite convergente dont la limite appartient à cet espace.) Suivant la Remarque 1.2.10 nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \tag{1.13}$$

Les hypothèses sur a et L sont

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $v \to L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que
$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V;$$
2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $w \to a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \to a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$;
3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que
$$|a(w, v)| \leq M\|w\| \, \|v\| \text{ pour tout } w, v \in V; \tag{1.14}$$
4. $a(\cdot, \cdot)$ est **coercive** (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que
$$a(v, v) \geq \nu\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V. \tag{1.15}$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (1.13). En particulier, la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ est essentielle.

Théorème 1.3.1 (Lax-Milgram) *Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle (1.13) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire L.*

Démonstration. Pour tout $w \in V$, l'application $v \to a(w, v)$ et une forme linéaire continue sur V : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V, noté $A(w)$, tel que

$$a(w, v) = \langle A(w), v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de $a(w, v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \to A(w)$. De plus, en prenant $v = A(w)$, la continuité (1.14) de $a(w, v)$ montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|,$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ et donc $w \to A(w)$ est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V, noté f, tel que $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$ et

$$L(v) = \langle f, v\rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (1.13) est équivalent à :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = f. \tag{1.16}$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est bijectif de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L).

La coercivité (1.15) de $a(w,v)$ montre que

$$\nu\|w\|^2 \le a(w,w) = \langle A(w), w\rangle \le \|A(w)\|\|w\|,$$

ce qui donne

$$\nu\|w\| \le \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V, \tag{1.17}$$

c'est-à-dire que A est injectif. Pour montrer que A est surjectif, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans V et que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$. En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (\mathrm{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{Im}(A)$, ce qui prouve bien que A est surjectif. Soit $A(w_n)$ une suite dans $\mathrm{Im}(A)$ qui converge vers b dans V. En vertu de (1.17) on a

$$\nu\|w_n - w_p\| \le \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V, c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ est donc fermé. D'autre part, soit $v \in \mathrm{Im}(A)^\perp$; la coercivité (1.15) de $a(w,v)$ implique que

$$\nu\|v\|^2 \le a(v,v) = \langle A(v), v\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$, ce qui prouve que A est bijectif. Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité (1.17) avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est continu, donc la solution u dépend continûment de f. □

Remarque 1.3.2 Si l'espace de Hilbert V est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du Théorème 1.3.1 de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité (1.17) de A est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général) que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire $a(w,v)$ est essentielle puisque c'est elle qui donne l'injectivité de A. Remarquons pour finir que, si $V = \mathbb{R}^N$, une formulation variationnelle n'est que l'écriture, $\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, d'un simple système linéaire $Au = f$. •

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (1.13) réalise le **minimum d'une énergie** (très naturelle en physique ou en mécanique).

Proposition 1.3.4 *On se place sous les hypothèses du Théorème 1.3.1 de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(w,v) = a(v,w)$ pour tout $v, w \in V$. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v). \tag{1.18}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle (1.13). Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle (1.13).

Démonstration. Si u est solution de la formulation variationnelle (1.13), on développe (grâce à la symétrie de a)

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) + a(u,v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u).$$

Comme $u+v$ est quelconque dans V, u minimise bien l'énergie J dans V. Réciproquement, soit $u \in V$ tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Pour $v \in V$ on définit une fonction $j(t) = J(u+tv)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en t). Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(0) = 0$ qui, par un calcul simple, est exactement la formulation variationnelle (1.13). □

1.3.2 Application au Laplacien

Essayons d'appliquer le Théorème 1.3.1 de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (1.8) du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Celle-ci s'écrit bien sous la forme (1.13) avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx,$$

où clairement $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire, et $L(\cdot)$ une forme linéaire. L'espace V (noté précédemment X) est

$$V = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{1.19}$$

Comme produit scalaire sur V nous choisissons

$$\langle w, v \rangle = \int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla v(x)\, dx, \tag{1.20}$$