Chapitre 1

Formules de Taylor et Développements Limités

Remarque 1.1. Les exercices notés par ($\star$) ou supplémentaires ne sera pas corrigé dans cette polycopié, ils laisant au lecteur.

Exercice 1.1. Donner un développement limité des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^x, \quad n = 3.$
2. $f(x) = \cos x, \quad n = 4.$
3. $f(x) = \sin x, \quad n = 5.(*)$
4. $f(x) = shx, \quad n = 5.$

Correction d'exercice 1.1. 1 Soit la fonction $f(x) = e^x$, on cherche le développement limité,(D.L) de f au voisinage de 0, i.e., $(\mathcal{V}(0))$ à l'ordre $n = 3$.
On a $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = e^x$. Donc $f^{(0)}(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 1$.
Comme, $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Alors, on obtient

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3).$$

2 Le D.L de $f(x) = \cos x$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 4$.
On a $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$. Donc $f^{(0)}(0) = 1,\ f^{(1)}(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f^{(2)}(0) = \cos(\pi) = -1,\ f^{(3)}(0) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0,\ f^{(4)}(0) = \cos(2\pi) = 1$.
Comme, $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$. Alors, on trouve

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

3 Le D.L de $f(x) = \sin x$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 5$.
On a $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$. Donc, $f^{(0)}(0) = 0,\ f^{(1)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ f^{(2)}(0) = \sin(\pi) = 0,\ f^{(3)}(0) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1,\ f^{(4)}(0) = \sin(2\pi) = 0,\ f^{(5)}(0) = \sin(\frac{5\pi}{2}) = 1$.
Comme, $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^4)$. D'où,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5).$$

4 Le D.L de $f(x) = shx$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = \begin{cases} shx, & \text{si } n \text{ paire} \\ chx, & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$ Donc, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ paire} \\ 1, & \text{si } n \text{ impaire.} \end{cases}$ Alors, par substitution, on trouve,

$$shx = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 1.2. 1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Donner un développement limité suivantes à l'ordre 3 au voisinage de 0 de fonction f définie par $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

2 En déduire le D.L à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

a. $f(x) = \sqrt{1 + x}$.
b. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$.
c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$.
d. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$.
e. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.
f. $f(x) = (1 + x)^{\frac{2}{3}}.(*)$

Correction d'exercice 1.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Le D.L de $f(x) = (1+x)^\alpha$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 3$.

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = \alpha, \\ f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1), \\ f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2). \end{cases}$$

Donc, par substitution dans la formule de Taylor (Mac-Laurant), on trouve,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3). \tag{1.1}$$

1 a Dans le cas où $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{2}$. Alors, d'après l'équation (1.1), on obtient

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

b Si $f(x) = f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{3}$. Par conséquent, on trouve

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3).$$

c Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha = -\frac{1}{3}$. Par substitution dans l'équation (1.1), on aura

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

d Dans le cas, où $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On peut écrire f comme suit $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, c'est à dire $\alpha = -1$. Par l'équation (1.1), on a

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3). \tag{1.2}$$

e Si $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = (1+t)^{-1}$. Tel que $t = -x$, et $\alpha = -1$. Alors $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$

Donc, par substitution, dans l'équation (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

f Reste comme exercice.

Exercice 1.3. Soit la fonction f définie par, $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{7}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en point 0.

2 Étudier l'exixtence de dévellopememnt limité de f au voisinage de 0.

Correction d'exercice 1.3. 1 a Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, alors f est continue en point 0.

b Par la définition de la dérivabilité, on trouve,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2 L a fonction f admet une dévellopement limité à l'ordre 2, car $f(x) = x^2\varepsilon(x)$ telle que $\varepsilon(x) = x^{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to 0} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
On remarque que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$, n'existe pas pour tout $n \geq 3$. Donc, f n'admet pas une D.L au voisinage de 0 d'ordre $n \geq 3$.

Exercice 1.4. Donner la formule de Taylor-Mac-Laurent des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1 $f(x) = e^{2x}, \quad n = 3.$

2 $f(x) = \cos(4x), \quad n = 4.$

3 $f(x) = ch4x, \quad n = 4.(*)$

4 $f(x) = sh3x, \quad n = 5.$

5 $f(x) = \ln(2 - x^3), \quad n = 4.$

6 $f(x) = \sin(2 + x^2), \quad n = 3.(*)$

Correction d'exercice 1.4. On donnant la formule de Taylor-Mac-Laurent pour des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. Soit $f(x) = e^{2x}$, et $n = 3$. Alors, la formule de Taylor-Mac-Laurent est $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Telles que
$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(x) = 2e^{2x}, \\ f^{(2)}(x) = 4e^{2x}, \\ f^{(3)}(x) = 8e^{2x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = 2, \\ f^{(2)}(0) = 4, \\ f^{(3)}(0) = 8. \end{cases}$$
D'où le résultat $f(x) = e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

2. Si $f(x) = \cos(4x)$, et $n = 4$. Alors, on a :
$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(x) = -4\sin(4x), \\ f^{(2)}(x) = -16\cos(4x), \\ f^{(3)}(x) = 48\sin(4x), \\ f^{(4)}(x) = 64\cos(4x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = 0, \\ f^{(2)}(0) = -16, \\ f^{(3)}(0) = 0. \\ f^{(4)}(0) = 64. \end{cases}$$
Par conséquent, on obtient $f(x) = \cos(4x) = 1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)$.

3. Laisse au lecteur

4. Dans le cas où $f(x) = sh3x$, $n = 5$. Alors, on a $f(x) = e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

5. Si $f(x) = \cos(4x)$, et $n = 4$. Alors, on a :
$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f^{(1)}(x) = 3ch(3x), \\ f^{(2)}(x) = 9sh(3x), \\ f^{(3)}(x) = 27ch(3x), \\ f^{(4)}(x) = 81sh(3x), \\ f^{(5)}(x) = 243ch(3x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = 3, \\ f^{(2)}(0) = 0, \\ f^{(3)}(0) = 27. \\ f^{(4)}(0) = 0. \\ f^{(5)}(0) = 243, \end{cases}$$
Donc, on trouve,
$$f(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^3 + o(x^6).$$

6. Pour $f(x) = \ln(2 - x^3)$, $n = 4$. Nous savons donc que, $f(x) = \ln(2 - x^3) = \ln 2 + \ln(1 - \frac{1}{2}x^3)$. Posons $t = \frac{1}{2}x^3$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$
Par la formule de Mac-Laurant de $\ln(1 - t)$ on trouve,
$$\begin{aligned} \ln(1-t) &= -t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3) \\ \Rightarrow \ln(2 - x^3) &= \ln(2) - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

7. Reste comme exercice

Exercice 1.5. Donner le D.L à d'ordre 3 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

1. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$.
2. $f(x) = e^{\cos x}$.
3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.
4. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.
5. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.
6. $f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}.(*)$

Correction d'exercice 1.5. Le D.L d'ordre 3 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

1. Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$. Alors, f est multiplication de deux fonctions $g(x) = e^x$ et $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. D'après, exercice 1.2 on a
$$\begin{aligned} g(x) = e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \\ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$
Par conséquent, on trouve
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \times \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

2 Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$. Posons $t = x + x^2$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$
et comme $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$. Alors par substitution, on aura

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + o(x^9) \\ &= 1 - x + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

3 Dans le cas où $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. On a
$e^x = 1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$. Donc, $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)}$. Posons $t = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 +$ $o(x^3)$, par suite on a $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$
Donc, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} &= 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) \\ \text{et } f(x) &= 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &- \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)^3 + o(x^9))\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

4 Si $f(x) = e^{\cos x}$. Alors, f est composition de deux fonctions $g(x) = \cos x$ et $h(x) = e^x$ respectivements, et comme $\liminf_{x\to 0} g(x) = 1 \neq 0$. Alors, il faut faire un changement de variable pour retour à zéro. Comme,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

Donc, Posons $t = -\dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$
Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned} f(x) = e^{\cos x} &= e \times e^t \\ &= e \times \left(1 + \frac{1}{1!}xt + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)\right) \\ &= e + \frac{e}{1!}(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)) + \frac{e}{2!}(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4))^2 + o(x^3) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

5 Pour $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$. On sait que

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc, on a,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Car,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{6}t^2} = 1 + \frac{1}{6}t^2 + o(t^2).$$

6 Reste comme rxercice ($\star$).

Remarque 1.2. Pour la fonction f qui définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$. On peut utiliser la méthode de division suivant les puissances croissantes, comme suit,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)}$. Par conséquent, on a

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 & \quad 1 - \frac{1}{6}x^2 \\ \underline{1 - \frac{1}{6}x^2} & 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \\ \quad -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & \\ \quad \underline{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3} & \\ \qquad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 & \\ \qquad \underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4} & \\ \qquad -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 & \\ \qquad \underline{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^5} & \\ \qquad \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{18}x^5 & \end{array}$$

D'où $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 1.6. Donner un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes

1 $f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 3,\ x_0 = 1.$

2 $f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad n = 4,\ x_0 = 1.(*)$

3 $f(x) = \sin x, \quad n = 5,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$

4 $f(x) = \tan x, \quad n = 3,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}.(*)$

Correction d'exercice 1.6. Le D.L de la fonction f à l'ordre n au $(V)(x_0)$, telles que

1 Si $f(x) = \sqrt{x},\ n = 3,\ x_0 = 1.$

On faisons la changement $t = x - 1$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 1, \end{cases}$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = (1+t)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3). \end{aligned}$$

2 Reste comme exercice

3 Pour $f(x) = \sin x, \quad n = 5,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$

On pose $t = x - \dfrac{\pi}{3}$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$

Par conséquent, et d'après les formules trigonométriques, on trouve

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\frac{\pi}{3} + t) \\ &= \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t). \end{aligned}$$

Mais, $t \to 0$, (i.e., t au voisinage de 0). Alors, d'après la formule de Mac-Laurant, on a

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5), \\ \cos(t) &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4). \end{aligned}$$

Par substitution, on trouve

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2}\Big(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)\Big) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4))\Big) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 - \frac{1}{12}t^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^5) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}(x - \frac{\pi}{3})^4 \\ &\quad + \frac{1}{120}(x - \frac{\pi}{3})^5 + o((x - \frac{\pi}{3})^5) \end{aligned}$$

4 Reste comme exercice

Exercice 1.7. Calculer les limites suivantes en utilisant soit les fonctions équivalente ou le D.L

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$.
2. $\lim_{x\to +\infty} (x^2+1)e^{\frac{1}{x^2}}$.(*)
3. $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}$.(*)
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Correction d'exercice 1.7. On utilisant le D.L pour on calcule les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} = \frac{0}{0}$, Forme indéterminée
   Au voisinage de zéro, on a $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$. Donc, par suite, on a
   $\sqrt{3+\cos x} = 2(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{48}x^4 + o(x^5))^{\frac{1}{2}}$. On pose $t = -\frac{x^2}{8} + \frac{1}{48}x^4 + o(x^5)$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$
   et comme

$$\begin{aligned}
(1+t)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{8} + \frac{1}{48}x^4 + o(x^5)) - \frac{1}{8}(-\frac{x^2}{8} + \frac{1}{48}x^4 + o(x^5))^2 \\
&\quad + \frac{1}{16}(-\frac{x^2}{8} + \frac{1}{48}x^4 + o(x^5))^3 + o(x^{12}) \\
&= 1 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{1536}x^4 + +o(x^5).
\end{aligned}$$

   Donc, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\Big(1 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{1536}x^4 + o(x^5)\Big) - 2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \Big(-\frac{1}{8} - \frac{5}{1536}x^2 + o(x^3)\Big) = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

2. Reste comme exercice
3. Reste aussi comme exercice
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{0}{0}$, $(F.I)$.
   Au voisinage de zéro, on a $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. Donc, par conséquent on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x)\Big) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.8. 1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de $f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2}$.

2. Déduire les dérivées successives, $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Correction d'exercice 1.8. 1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t} &= 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^2) \qquad (1.3) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

En mettant $t = x + x^2$, dans l'équation (1.3), on trouve donc, $t \to 0$ si $x \to 0$, et par substitution, on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t} &= \frac{1}{1+x+x^2} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - x - x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Puis, on fait la multiplication en omettant les termes de degré strictement supèrieur à dégré 3. Alors,

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2} &= \cos x \times \frac{1}{1+x+x^2} \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\Big) \times \Big(1 - x - x^3 + o(x^3)\Big) \\
&= 1 - x - \frac{1}{2}^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3). \ (*)
\end{aligned}$$

2 Maintenant, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au $\mathcal{V}(0)$, on a

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Pat la comparaion les coefficients on peut conclure que

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = -1,\ \text{et}\ f^{(3)}(0) = 9.$$

Car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $f^{(n)}(0) = n! \times a_n$ tels que a_n sont les coefficients de polynôme dans $(*)$.

Exercice 1.9. **1** Calculer le développement limité à l'ordre 4 au point 0 de $f(x) = e^{\cos x}$.

2 En déduire $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Correction d'exercice 1.9. On utilise les développements limités en 0 pour la fonction e^x et $\cos x$. Lorsque x tend vers 0, comme $\cos x$ tend vers 1 donc il faut la ramener à 0. Alors, On a

1

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons que

$$e^{\cos x} = e^{1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)} = e \times e^{-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)}.$$

Posons $t = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$, donc, $t \to 0$ si $x \to 0$, et on trouve

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) \\ e^t &= 1 + \frac{1}{1!}\Big(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\Big) + \frac{1}{2!}\Big(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\Big)^2 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Puis, on obtient

$$f(x) = e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4).\ \ (*)$$

2 Maintenant on utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au $\mathcal{V}(0)$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$

En comparant les coefficients on peut conclure que

$$f(0) = e,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -e,\ f^{(3)}(0) = 0,\ \text{et}\ f^{(4)}(0) = 4e.$$

Car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $f^{(n)}(0) = n! \times a_n$ tels que a_n sont les coefficients de polynôme dans $(*)$.

Exercice 1.10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}$.

1 Donner le D.L à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty.(*)$) de f.

2 Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique quand x tend vers $\pm\infty$.

3 Préciser sa position relative par rapport à cette asymptote.$(*)$

Correction d'exercice 1.10. **1** **a** Au voisinage de $+\infty$. On a $f(x) = x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}$ On pose $t = \frac{1}{x}$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty, \end{cases}$

Par le D.L de la fonction $\sqrt[3]{1-t}$ au $\mathcal{V}(0)$. On obtient ,donc,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-t} &= 1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2) \\ &= 1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= x\Big(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o(\frac{1}{x^2})\Big) \\ &= x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \end{aligned}$$

b Le même méthode au $\mathcal{V}(-\infty)$. on trouve, on a $f(x) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2 En deduit, d'après qui ce précède que, $(\Delta):\ y = x - \frac{1}{3}$ est un assymptôte oblique au $\mathcal{V}(+\infty)$. Car,

$$\lim_{x\to 0+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to 0+\infty}\left(\frac{1}{9x} + o((\frac{1}{x}))\right) = 0.$$

3 Au au $\mathcal{V}(+\infty)$. On a la signe de $(f(x)-x)$ est

$$\forall x \in]0+\infty[:\ (f(x)-x) = \left(\frac{1}{9x} + o((\frac{1}{x}))\right) > 0.$$

Alors, la courbe de f est sur la droite assymptôte oblique (Δ).

De même manière, on a (C_f) la courbe de f est situé au-dessous de $(D):\ y = x - \frac{1}{3}$ l'assymptôte oblique au $\mathcal{V}(-\infty)$.

Exercice 1.11. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

1 Donner le D.L à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty.(*)$) de f.

2 Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique quand x tend vers $\pm\infty$.

3 Préciser sa position relative par rapport à cette asymptote.$(*)$

Correction d'exercice 1.11. 1 a Au voisinage de $+\infty$. On a $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. On pose $t = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, donc,

$$\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty, \end{cases}$$

On utilisant le D.L de la fonction $\sqrt{1+t}$ au $\mathcal{V}(0)$. On a ,donc,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= x + \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

b Le même méthode au $\mathcal{V}(-\infty)$. telle que on a $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ On pose $t = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, donc,

$$\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty, \end{cases}$$

D'après le D.L de Mac-Laurant de la fonction $\sqrt{1+t}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^2} + o\left((\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons que

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \\
&= -x\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= -x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

2 En deduit, d'après qui ce précède que, $(\Delta):\ y = x + \frac{1}{2}$ est un assymptôte oblique au $\mathcal{V}(+\infty)$. Car,

$$\lim_{x\to 0+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to 0+\infty}\left(-\frac{3}{8x} + o((\frac{1}{x}))\right).$$

3 Au au $\mathcal{V}(+\infty)$. On a la signe de $(f(x)-x)$ est

$$\forall x \in]0+\infty[: \ (f(x)-x) = \Big(-\frac{3}{8x} + o((\frac{1}{x}))\Big) < 0.$$

Alors, la courbe de f est sous la droite assymptôte oblique (Δ).
De même manière, on a $(D): \ y = -x - \frac{1}{2}$ l'assymptôte oblique au $\mathcal{V}(-\infty)$ est situé au-dessus la courbe de f.

Exercice 1.12. 1 Donner le D.L la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. Puis deduire le D.L de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 4.

2 D'après quqstion 1, deduire le D.L de la fonction $f(x) = \arctan(x)$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 5.

Correction d'exercice 1.12. 1 a D'après la formule de Mac-Laurant, on a

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3). \tag{1.4}$$

b Si on pose $x = t^2$ dans l'équation (1.4), et comme $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty. \end{cases}$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^2} &= 1 - t^2 + t^4 + t^6 + o(t^6) \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + o(x^4). \end{aligned} \tag{1.5}$$

2 D'après quastion 1, et par l'intégration de l'équation (1.5) tèrme à tèrme entre 0 et x on aura

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^x \Big(1 - t^2 + t^4 + o(t^4)\Big)dt \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^5 + o(x^5) = \arctan(x). \end{aligned}$$

Exercice supplémentaire 1.1. Étudier au voisinage de x_0, les fonctions f définies ci-dessous (tangente, position par rapport à la tangente)

1 $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x}, x_0 = 0,$

2 $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}, x_0 = 1.$

3 $f(x) = \frac{1}{x}\Big(e^x - \frac{6}{6-x^3}\Big), x_0 = 0, (\star)$

Correction d'exercice supplémentaire 1.1. 1 On a

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

D'où

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2).$$

La fonction f se prolonge par continuité en zéro par la valeur ?1.
L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le D.L. d'ordre 1 suivante

$$y = -1 + \frac{1}{2}x.$$

Alors, $f(x) - y = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{6}x^2$, et Lorsque x tend vers 0 la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente.

2 Pour $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}, x_0 = 1$. Posons $t = x - 1$ $t \to 0$ si $x \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = f(t+1) &= 1 + t + 2\sqrt{1+t} + 2\sqrt{1+\frac{t}{4}} \\ &= 1 + t + 2\Big(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\Big) \\ &- 2\Big(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{128} + o(t^2)\Big) \\ &= 1 + \frac{7t}{4} - \frac{15t^2}{64}o(t^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = 1 + \frac{7}{4}(x-1) - \frac{15}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

La courbe admet comme tangente la droite d'équation

$$y = 1 + \frac{7}{4}(x-1) = -\frac{3}{4} + + \frac{7}{4}x.$$

Alors,

$$f(x) - y = -\frac{15}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \sim -\frac{15}{64}(x-1)^2.$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0, est donnée par le signe de $-\frac{15}{64}(x-1)^2$. Donc, la courbe est au-dessous de sa tangente au voisinage du point de coordonnées $(1, 1)$.

3 Reste comme exercice.