Espaces vectoriels

I Définitions et premières propriétés

• Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps d'éléments neutres notés 0 et 1.

On dit qu'un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, s'il est muni :

- d'une loi de composition interne notée $+$;
- d'une loi de composition externe sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire d'une application qui à $(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times E$ fait correspondre $\lambda x \in E$,

telles que : $(E, +)$ est un groupe commutatif, et on a les coditions suivantes :

$\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall\mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \forall y \in E;\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x);\ \ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x\ ;\ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y;\ \ 1x = x.$

Les éléments de E sont des vecteurs ; les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

• Exemples

- L'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Le produit $E_1\times\cdots\times E_n$ de n espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

- L'ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F, est un espace vectoriel pour les opérations $f + g$ et λf.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré n, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

• Propriété

$$\forall\lambda \in \mathbb{K},\quad \forall x \in E,\qquad \lambda x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

De ce fait, les éléments neutres pour l'addition de $\mathbb{K}$ et de E, $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E, seront représentés par le même symbole 0 sans inconvénient.

II Sous-espaces vectoriels

• Définition

Une partie non vide F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si elle est stable pour les deux lois, et si la restriction à F des lois de E définit dans F une structure d'espace vectoriel. En fait, il faut et il suffit que F vérifie :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F, \ \forall y \in F, \qquad x+y \in F, \quad ; \quad \lambda x \in F$ ou encore $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in F, \ \forall y \in F, \qquad x+\lambda y \in F.$

Attention, la réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

– L'intersection F de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant une partie A donnée est le sous-espace vectoriel engendré par A. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant A.

On dit aussi que A est une partie génératrice de F. On note $F = Vect(A)$.

– Le sous-espace vectoriel engendré par A est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de A, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs du type :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad x_i \in A$$

• Somme de deux sous-espaces vectoriels

E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de E_1 et de E_2, et on note $E_1 + E_2$, l'ensemble des vecteurs du type $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, et qui définit le sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définitions

Quand tout vecteur x de $F = E_1 + E_2$ s'écrit, de façon unique, sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on dit que F est somme directe de E_1 et de E_2, et on note $F = E_1 \oplus E_2$.

On dit aussi que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans F.

Théorème

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow E = E_1 + E_2 \quad et \quad E_1 \cap E_2 = \{0\}$$

• Généralisation

Somme de sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle somme des E_i, et on note $\sum_{i \in I} E_i$, l'ensemble des vecteurs du type $\sum_{i \in I} x_i$ où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$.

$\sum_{i \in I} E_i$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i \in I} E_i$. Si $I = \{1, ..., n\}$, la somme se note aussi $E_1 + \cdots + E_n$.

Somme directe de sous-espaces vectoriels

– Quand tout vecteur x de $\sum_{i \in I} E_i$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{i \in I} x_i$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$, on dit que la somme des E_i est directe et on la note $\bigoplus_{i \in I} E_i$. Si $I = \{1, ..., n\}$, on note aussi $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.

– Pour démontrer que la somme des E_i est directe, la méthode la plus rapide est de partir d'une somme nulle $x_1 + \cdots + x_n = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour tout i, et de démontrer que cela entraîne que tous les x_i sont nuls.

Espaces vectoriels de dimension finie

I Cas d'un espace vectoriel

• Dépendance et indépendance linéaire

Une famille $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E est une famille libre, ou les vecteurs sont linéairement indépendants, si :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée, ou que les vecteurs sont linéairement dépendants.

Toute sous-famille non vide d'une famille libre est libre.

Pour qu'une famille $(x_1, ..., x_n)$ soit liée, il faut, et il suffit, que l'un de ses éléments soit combinaison linéaire des autres.

Cas particuliers : une famille qui contient le vecteur 0 est liée ; deux vecteurs sont liés Ssi ils sont colinéaires.

• Bases

– On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille libre de E qui engendre E.

– La famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E Ssi tout vecteur x de E peut s'écrire de façon unique : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$.

– Les scalaires x_i sont les composantes du vecteur x.

– Théorème de la base incomplète

Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

– Tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ possède au moins une base.

Attention à ne jamais écrire ou dire la base de E, car il n'y a pas unicité.

Dimension d'un espace vectoriel

Si E possède une base comportant un nombre fini n de vecteurs, on dit que E est de dimension finie.

Dans ce cas, toute base de E comporte aussi n vecteurs. On dit que n est la dimension de E ; on la note $\dim E$.

On convient que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.

• Recherche de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Toute famille libre de E a au plus n vecteurs. Si elle comporte n vecteurs, c'est une base.

Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs. Si elle comporte n vecteurs, c'est une base.

> Si on connaît déjà la dimension n de E, et si on considère une famille de n vecteurs, pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer : soit que la famille est libre, soit que la famille est génératrice.

• Dimension d'un produit cartésien $E \times F$

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies.

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, et $(f_1, ..., f_p)$ une base de F, alors l'ensemble des couples $(e_i, 0)$ et $(0, f_j)$ où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, est une base de $E \times F$. Par conséquent : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

II Cas d'un sous-espace vectoriel

• Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

– F est alors de dimension finie, et l'on a : $\dim F \leq \dim E$.

– Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

L'égalité des dimensions ne suffit pas pour conclure que $F = E$.

Il faut aussi une inclusion de l'un des espaces vectoriels dans l'autre.

– Si $\dim F = \dim E - 1$, on dit que F est un hyperplan de E.

Comme exemples d'hyperplans, vous pouvez penser à une droite dans le plan ou à un plan dans l'espace à 3 dimensions

• Dimension d'une somme

– Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

En particulier, si F et G sont en somme directe : $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

– Tout sous-espace vectoriel F de E admet des supplémentaires, qui ont tous pour dimension : $\dim E - \dim F$.

– F et G sont supplémentaires dans E <u>Ssi</u>, en réunissant une base de F et une base de G, on obtient une base de E.

On dit qu'on a choisi une base de E adaptée à la somme directe.

> Attention à ne pas partir d'une base de E, car il n'y a aucune raison de pouvoir en extraire une base de F et une base de G, ni même des vecteurs de F ou de G.

• Généralisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et des sous-espaces vectoriels E_i de E en nombre fini.

Si la somme $\bigoplus_{i \in I} E_i$ est directe, alors :

$$\dim \bigoplus_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

Pour que $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, il faut et il suffit que :

$$\dim E = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

Si aucun E_i n'est réduit à $\{0\}$, la réunion d'une base de chaque E_i constitue une base de E si, et seulement si, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$

• Rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

C'est aussi le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille.