

Module : **Algèbre 02**

(Série d'exercices N° 2)

Exercice n°1 :

On munit \mathbb{R}^3 de sa base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.
Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f(e_1) = (5, -1, 2); \quad f(e_2) = (-1, 5, 2); \quad f(e_3) = (2, 2, 2)$$

Exercice n°2 :

On considère les applications f et g définies par

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto g(x, y) = (y, x, x + y)$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(g)$, $\text{Im}(g)$ et préciser leurs dimensions.
3. Les applications f , g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
4. Déterminer $f \circ g$.
5. Existe-t-il une application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant $h \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$?

Exercice n°3 :

Soient $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \text{deg}(P) \leq 2\}$ et f une application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] : f(P) = -\frac{(X+1)^2}{2}P'' + (X+1)P'$$

Où P' et P'' sont les dérivées de polynôme P .

1. Déterminer l'expression de $f(P)$ pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $f \circ f = f$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
4. Calculer $\dim \text{Ker}(f)$ et $\dim \text{Im}(f)$.
5. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice n°4 : (Devoir maison)

1. Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e'_1 + e'_2 & , & \quad f(e_2) = -e'_1 + e'_2 \\ f(e_3) &= e'_1 + 3e'_2 + 2e'_3 & , & \quad f(e_4) = e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{aligned}$$

où la base canonique de \mathbb{R}^4 est notée $B_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et celle de \mathbb{R}^3 est notée $B_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

(a) Déterminer l'application linéaire f .

2. On considère l'application g suivante

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto g(x, y, z) = (x - y + z, y + z) \end{aligned}$$

(a) Montrer que g est linéaire.

(b) Déterminer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ et préciser leurs dimensions.

(c) g est-elle injective ? surjective ?