]] Par : Dr, TIAIBA ABDELMOUMEN

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF-M'SILA

FACULTÉ DES Sciences

DEPARTEMENT DE Tronc SM

MODULE :

Mathématiques 2
(Résumé des cours de Mathématiques 2 de Prof : L. MEZRAG)

Par : TIAIBA ABDELMOUMEN

Filière : SM

Option : Physiques et chimie

Table des matières

Première partie

Analyse 2

Chapitre 1

Les intégrales simples

1.1 Intégrale de Riemann

Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bornée. On soppose

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

1.1.1 Sommes de Darboux

Définition 1.1.1 *Subdivision ordonnée du segment $[a, b]$ est toute suite strictement croissante $(x_i)_{i=0}^{n}$ telle que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

On écrit

$d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$.

Soit $[a, b] = [0, 1]$ et $d = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Définition 1.1.2 *Pour $0 \leq i \leq n - 1$, on note*

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

et

$$s(f,d)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{i+1}-x_i\right), \quad S(f,d)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{i+1}-x_i\right).$$

*Nous appellons s et S sommes de **Darboux**.*

Exemple 1.1.1 *Soient* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *et* $[a,b]=[1,2]$. *Soit* $d=\left\{1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},2\right\}$.

$$\begin{array}{rcccl} s(f,d) & = & \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & = & 0,63 \\ S(f,d) & = & \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} & = & 0,75 \end{array}$$

Remarquons que $0,63<\ln 2<0,7$.

Remarque 1.1.1 $\forall d, \quad s(f,d)\le S(f,d)$.

Définition 1.1.3 *Soient d et d' deux subdivisions de $I=[a,b]$. On a*

$$d' \text{ est plus fine que } d \Longleftrightarrow (d\subset d').$$

Soient $[a,b]=[0,1]$, $d=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ et $d'=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{4}{5},\frac{5}{6},1\right\}$.
d' est plus fine que d car $(d\subset d')$

1.1.2 Propriétés sommes de Darboux

Proposition 1.1.1 *Si $d\subset d'$, alors*

$$s(f,d)\le s(f,d')\le S(f,d')\le S(f,d).$$

Corollaire 1.1.1

$$m\,(b-a)\le s(f,d)\le S(f,d)\le M\,(b-a).$$

Proposition 1.1.2 *Pour tout d_1,d_2 deux subdivisions de $[a,b]$, on a*

$$s(f,d_1)\le S(f,d_2).$$

1.1.3 Intégrale inférieure, intégrale supérieure

Soit

$$D = \{\text{de toutes les subdivisions de } [a,b]\}.$$

On pose

$$\int_{*[a,b]} f = \sup_{d\in D} s(f,d) \text{ et } \int_{[a,b]}^{*} f = \inf_{d\in D} S(f,d).$$

Ces deux quantités existent selon le Corollaire précédent.

Définition 1.1.4 *Les valeurs*

$$\int_{*[a,b]} f = \sup_{d\in D} s(f,d) \ \textit{et} \ \left(rep, \ \int_{[a,b]}^{*} f = \inf_{d\in D} S(f,d) \right).$$

S'appelle intégrale inférieure (respectivement .et intégrale supérieure).

Remarque 1.1.2 *Nous avons bien que :* $\int_{*[a,b]} f \le \int_{[a,b]}^{*} f.$

1.2 Fonctions intégrables, de Riemann

Définition 1.2.1 *On dira que f est Riemann intégrable noté ($\mathcal{R}$-intégrables) sur $[a,b]$ ssi*

$$\int_{*[a,b]} f = \int_{[a,b]}^{*} f.$$

On note et lire l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

Définition 1.2.2

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{*[a,b]} f = \int_{[a,b]}^{*} f.$$

Calculer l'intégrale de $f(x) = x$ sur $[0,1]$.

Théorème 1.2.1 (*Premier théorème de Riemann*). *On a*

$$f \text{ intégrable sur } [a,b] \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists d \in D : S(f,d) - s(f,d) \le \epsilon.$$

Théorème 1.2.2 *(important) f continue sur $[a,b] \Longrightarrow f$ intégrable sur $[a,b]$.*

Remarque 1.2.1 *On va vous donnez deux modèles d'exemples.*

1- Il existe des fonctions bornées mais pas intégrables.

Remarque 1.2.2 $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Soit $d \in D$.

$$s(f,d) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = 0,$$

Remarque 1.2.3

$$S(f,d) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = 1.$$

(Mais Lebesgue intégrable ! (qui est pour des auteures du premième année qulque chose de plus)).

2- Il existe des fonctions $\mathcal{R}$-intégrables mais non continues.

Remarque 1.2.4

$$\begin{array}{llll} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq \frac{1}{2}, \\ 0 & si \quad x = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

Soit $d = \{x_0, ..., x_n\}$ une subdivision de $[0.1]$.

Remarque 1.2.5 (a) $\frac{1}{2} \in d \Longrightarrow \exists i : x_i = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} s(f,d) &= m_1\left(x_1 - x_0\right) + ... + m_{i-1}\left(x_{i-1} - x_{i-2}\right) + \\ &\quad m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) + m_{i+1}\left(x_{i+1} - x_i\right) + ... + m_n\left(x_n - x_{n-1}\right) \\ &\leq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.6 $S(f,d) = 1 \Longrightarrow S(f,d) - s(f,d) \leq \epsilon.$

(b) $\frac{1}{2} \notin d \Longrightarrow \forall i : x_i \neq \frac{1}{2}$

$3-$ Continue par morceaux, implique l'intégrabilité.

(Premier théorème de la moyenne). Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors

Théorème 1.2.3

$$\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(c).$$

Remarque 1.2.7 *Soit la fonction*

$$\begin{array}{llll} f: & [0.1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 1+x & si \quad x \neq \frac{1}{2}, \\ 0 & si \quad x = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

On a $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$ *mais il n'existe pas une constante c qui peut vérifier que :* $f(c) = \frac{3}{2}$.

Corollaire 1.2.1 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue et positive. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Théorème 1.2.4 (***Théorème de Darboux***) *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue,*

$$\begin{gathered} (f \text{ intégrable sur } [a,b]) \\ \Longleftrightarrow \\ \left(\begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall d = \{x_0, ..., x_n\}, \\ x_{i+1} - x_i < \delta \Longrightarrow S(f,d) - s(f,d) < \epsilon. \end{array} \right) \end{gathered}$$

1.3 Interpretation du théorème de Darboux par des suites

Définition 1.3.1 *Soit* $d = \{x_0, ..., x_n\}$ *une subdivision de* $[a,b]$. *On pose*

$$\nu_d = \sup_{1 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

ν_d *ce n'est pas une subdivision d.*

Théorème 1.3.1 *Soit* f *une fonction intégrable sur* $[a,b]$ *et* (d_n) *une suite de subdivision sur* $[a,b]$ *telle que* $\nu_{d_n} \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$. *Alors*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s(f,d_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} S(f,d_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Corollaire 1.3.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. Alors*

$$(f \textit{ intégrable sur } [a,b])$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{l} \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f\left[a+i(\frac{b-a}{n})\right] = \\ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a+i(\frac{b-a}{n})\right] = \\ \int_a^b f(x)dx. \end{array}\right)$$

La somme $S = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ ou $S = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est appelée : **somme de Riemann**.

(1) Calculer $\int_1^a (x-1)dx$, $\int_0^1 x^2 dx$ et $\int_0^1 \mathbf{e}^x dx$.

$1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$.

1.4 Propriétés

$\mathcal{R}([a,b])$. Dans toute cette section, est l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$.

Théorème 1.4.1 *Soient $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. alors on a*

(1) *Linéarité*

$$\begin{cases} \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx & = & \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \\ \int_a^b \alpha f(x)dx & = & \alpha\int_a^b f(x)dx. \end{cases}$$

(2) *Relation de Chasles*

Pour tout c dans $[a,b]$, on a

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

(3) *Egalité sauf en un nombre fini de points*

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux égales sauf en un nombre fini de points alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

(4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. = \int_a^b f(x)dx.$

Théorème 1.4.2 *Soient* $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$.

(1)- Monotonie

$$f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(2)- Inégalité de ***Cauchy-Schwarz***

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

(3)- Inégalités de la ***moyenne***

Soient f, g *continues par morceaux sur* $[a,b]$. *Alors*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_a^b |g(x)| \, dx.$$

On a en particulier

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

La quantité $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ *est la valeur moyenne de* f *sur* $[a,b]$.

Remarque 1.4.1 *La réciproque de (3) est fausse comme le montre se contre exemple suivant :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Théorème 1.4.3 (*Second théorème de la moyenne*). *Soient* f, g *telles que* $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *et* $(g \in \mathcal{R}_+([a,b])\,(i.e\ g(x) \geq 0, \forall x \in [a,b])$ *et intégrable sur* $[a,b])$. *Alors*

$$\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Remarque 1.4.2 *On a*

1)− *Si* $g \in \mathcal{R}_-([a,b])$ *(i.e* $g(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$*) et intégrable sur* $[a,b]$*, on prend* $-g$*. Donc le théorème reste vrai si* g *ne change pas de signe.*

2)− *Si* g *change de signe le théorème est faux en général, comme le montre l'exemple suivant.* $f(x) = g(x) = x - 1$ *sur l'intervalle* $[0,2]$. $\int_0^2 f(x)g(x)dx = \frac{2}{3}$ *mais* $f(c)\int_0^2 g(x)dx = 0$ *pour tout* $x \in [0,2]$.

1.5 Relation entre les fonctions primitives et l'intégrale de Riemann

Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$. $\forall\ x \in [a,b]$, on pose que : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Théorème 1.5.1 *Soit* $f \in \mathcal{R}([a,b])$*. Alors*

(**1**)− F *est continue sur* $[a,b]$.

(**2**) - *Si* f *est continue au point* $x_0 \in [a,b]$*, alors* F *est dérivable au point* x_0 *et* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Définition 1.5.1 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application. On dira que l'application* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *si,*

$$\forall x \in [a,b], \quad F'(x) = f(x).$$

Dansce cas on note $F(x)$ par : $\int f(x)dx$.

Remarque 1.5.1 (**1**)− *La primitive n'est pas unique. Pour tout* $c \in \mathbb{R}$*,* $F(x) + c$ *est une primitve de* f.

(**2**)− *Toute fonction continue admet une primitive. D'après le théorème précédent*

$$\forall x \in [a,b], F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Exemple 1.5.1 *Calculer* $\int x^\alpha dx$ *(*$\alpha \neq -1$*,* $x > 0$*),* $\int \sin x dx$*,* $\int \cos x dx$.

Théorème 1.5.2 (*Deuxième théorème de Riemann*) (***Relation entre la primitive et l'intégrale de Riemann***).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et F une primitive de f. Alors

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b], \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Preuve. Par définition on a

$$\begin{array}{rl} & F(x_2) - F(x_1) \\ = & \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt \\ = & \int_a^{x_2} f(t)dt + \int_{x_1}^{a} f(t)dt \\ = & \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt. \end{array}$$

D'où le théorème. ■

Exemples 1.5.2 *Calculer* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k^2+n^2}$ *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+n}\right)$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k^2+n^2} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{nk}{k^2+n^2} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}$.

Ce qui implique que

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k^2+n^2} = \int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1} dx = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Pour la deuxieme limite, intégrer $\int_1^2 \dfrac{1}{x} dx$.

1.6 Calcul des primitives

Question : Soit I un intervalle ouvert et $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Comment chercher $F \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)?$$

C'est à dire le contraire de la dérivée.

Définition 1.6.1 *F est une primitive de f, si et seulement si, f est la dérivée de F.*

Remarque 1.6.1 ***Existence et unicité***

1- Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I .

2- Différence entre deux primitives de f est une constante. (***attention : le résultat est faux si*** I ***n'est pas un intervalle****).*
-3- *Soit $x_0 \in I$ alors il existe une unique primitive de f nulle en x_0 : qui est $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.*

Théorème 1.6.1 (***Intégration par parties***). *Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ et $(a,b) \in I^2$. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Exercice 1.6.1 *Calculer $\int_0^1 x\mathrm{e}^x dx$, $\int_0^1 \arctan x dx$*

Théorème 1.6.2 (***Changement de variable***). *Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,J)$, $f \in \mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$ et $(a,b) \in I^2$. Alors*

$$\int_a^b f \circ \varphi(u)\, \varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

En pratique nous n'utiliserons que des fonctions bijectives et continues et mnotones.
$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(x_0)}^{\varphi^{-1}(x)} f \circ \varphi(u)\, \varphi'(u)du.$

Exercice 1.6.2 *Calculer les intégrales suivantes :*

$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x^2 dx$, $\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}dx$ (On pose $u = \sqrt{1+x}$, j'ajoute 1 et je retranche 1 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$ $(u = x^2)$, $\int \cos^3 x dx$.

1.6.1 Primitives des fonctions rationnelles

Définition 1.6.2 (***Polynômes***) *est toute fonction de la forme :*

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subset \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, s'appelle polynôme réel.

Remarque 1.6.2 *Les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s'appellent coéfficients du polynôme. Si $a_n \neq 0$, on dit que le polynôme est de degré n et on écrit $d°P = n$. On note par $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$), l'ensemble des polynômes réels (de degré égal à n).*

Théorème 1.6.3 *Soient P, Q deux polynômes réels. Supposons que $Q \neq 0$. Alors*

$$\exists! R, S \in \mathbb{R}[X] : P = SQ + R \text{ avec } d°R < d°Q.$$

R et S s'appelent reste et quotient de P par Q.

Exemple 1.6.1 $P(x) = x^3 - x + 1$

$Q(x) = x^2 + 1$

$P(x) = 3x^7 + x^6 - 5x^5 + x^3 - 2x - 1$

$Q(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 3$

$S = 3x^3 + 10x^2 + 22x + 53$

$R = 137x^3 - 45x^2 + 11x + 158$

1.6.2 Les fractions rationnelles

Définition 1.6.3 (***Fractions rationnelles***) *Soient P, Q deux polynômes réels. Supposons que $Q \neq 0$. La fonction*

$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

s'appelle fraction rationnelle.
On dira que $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est régulière si $d°P < d°Q$.

Définition 1.6.4 (***Fractions simples***). *Les fonctions suivantes :*

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \dfrac{A}{(x-a)^n} \\ x & \longmapsto & \dfrac{Ax+B}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n} \end{array}$$

où $(a, b, A, B) \in \mathbb{R}^4$ et $n \in \mathbb{N}$, s'appellent respectivement fractions simples de premier espèce et du second espèce.

1.6.3 La décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples

Théorème 1.6.4 (***Important***) *On pourra décomposer toute fraction rationnelle régulière en somme des fractions simples.*
Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *une fraction rationnelle. Alors,*

$$\begin{array}{rl} Q(x)= & (x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_k)^{n_k} \\ & \left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]^{m_1}\ldots\left[(x-a_l)^2+b_l^2\right]^{m_l}. \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} \dfrac{P}{Q} & = & \frac{A_{11}}{(x-x_1)} & + & \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} & + & \ldots & + \frac{A_{1n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} \\ & + & \frac{A_{21}}{(x-x_2)} & + & \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} & + & \ldots & + \frac{A_{2n_2}}{(x-x_2)^{n_2}} \\ & \vdots & & & & & & \\ & + & \frac{A_{k1}}{(x-x_k)} & + & \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} & + & \ldots & + \frac{A_{kn_k}}{(x-x_k)^{n_k}} \\ & + & \frac{A'_{11}x+B_{11}}{(x-a_1)^2+b_1^2} & + & \frac{A'_{12}x+B_{12}}{\left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]^2} & + & \ldots & + \frac{A'_{1m_1}x+B_{1m_1}}{\left[(x-a_1)^2+b_1^2\right]^{m_1}} \\ & \vdots & & & & & & \\ & + & \frac{A'_{1l}x+B_{1l}}{(x-a_l)^2+b_l^2} & + & \frac{A'_{l2}x+B_{l2}}{\left[(x-a_l)^2+b_l^2\right]^2} & + & \ldots & + \frac{A'_{lm_l}x+B_{lm_l}}{\left[(x-a_l)^2+b_l^2\right]^{m_l}}. \end{array}$$

Exemple 1.6.2 *Décomposer en fractions simples les fractions suivants :*

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)},\ \frac{1}{x^4+1},\ \frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}.$$

Solution 1.6.1 $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x-2)^2}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)}$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl} & A & + & B & & & + & D & & & = & 0 \\ - & 4A & - & 3B & + & C & - & 5D & + & E & = & 0 \\ & 5A & + & 3B & - & C & + & 8D & - & 5E & = & 0 \\ - & 4A & - & 3B & + & C & - & 4D & + & 8E & = & 1 \\ & 4A & + & 2B & - & C & - & 5D & - & 4E & = & 1 \end{array}$$

En ajoutant les équations on trouve $A=1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & B & & & + & D & & & = & -1 \\ - & 3B & + & C & - & 5D & + & E & = & 4 \\ & 3B & - & C & + & 8D & - & 5E & = & -5 \\ - & 3B & + & C & - & 4D & + & 8E & = & 5 \\ & 2B & - & C & - & 5D & - & 4E & = & 1 \end{array}$$

La cinquième c'est combinaison des quatres autres, donc on l'élimine.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & B & & & + & D & & & = & -1 \\ - & 3B & + & C & - & 5D & + & E & = & 4 \\ & 3B & - & C & + & 8D & - & 5E & = & -5 \\ - & 3B & + & C & - & 4D & + & 8E & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrr} (2)+3(1) & + & C & - & 2D & + & E & = & 1 \\ (3)-3(1) & - & C & + & 5D & - & 5E & = & -2 \\ (4)+3(1) & + & C & - & D & + & 8E & = & 2 \end{array}$$

$A = \frac{25}{25},\ B = \frac{-22}{25},\ C = \frac{15}{25},\ D = \frac{-3}{25},\ E = \frac{A}{25}.$

$$\frac{x^3}{x^3+x^2+x+1} = 1 + \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} A & + & B & & & = & 1 \\ & & B & + & C & = & 1 \\ A & & & + & C & = & 1 \end{array}$$

Ce qui implique que $A = B = C = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} A & + & & + & C & & & = & 0 \\ A\sqrt{2} & + & B & + & C\sqrt{2} & + & D & = & 0 \\ A & - & B\sqrt{2} & + & C & + & D\sqrt{2} & = & 0 \\ & & B & & & + & D & = & 1 \end{array}$$

Ce qui implique que $A = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ B = -1,\ C = \frac{-1}{2\sqrt{2}},\ D = 2.$

Remarque 1.6.3 *Toute fraction rationnelle s'écrit d'une manière unique comme somme d'un nombre fini de fractions simples et d'un polynôme. Donc, le calcul des primitives d'une fraction rationnelle revient au calcul des primitives des fractions simples.*

(1)- Première espèce

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \ln|x-a| & n=1 \\ \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & n>1 \end{cases}$$

(2)- Deuxième espèce

$$\begin{aligned} & \int \frac{Ax+B}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx \\ = & \int \frac{A(x-a)+aA+B}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx \\ = & \frac{A}{2}\int \frac{2(x-a)+aA+B}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx \qquad (a) \\ + & (aA+B)\int \frac{1}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx \qquad (b) \end{aligned}$$

$$(a) = \int \frac{du}{[u+b^2]^n},\ u=(x-a)^2.$$

(b) revient à calculer $I_n = \int \frac{1}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx.$

On pose

$$I_n = \int \frac{bdt}{\left[(bt)^2+b^2\right]^n} = \frac{1}{b^{2n-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt = \frac{1}{b^{2n-1}}J_n.$$

$$I_1 = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{b}\arctan t + c = \frac{1}{b}\arctan\frac{x-a}{b}+c.$$

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}dt \ \left(u=1, v=\frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} \Longrightarrow v' = \frac{-2t(n-1)}{(t^2+1)^n}\right) \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^n}dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^n}dt\right) \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)J_{n-1} - 2(n-1)J_n \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$J_n = \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Par conséquent

$$J_n = \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1} + \frac{b^{2n-1}}{2n-2}\frac{x-a}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^{n-1}}.$$

Exemple 1.6.3 *Calculer* $\int \frac{x^5-x^2+2x+1}{x^3-1}dx.$

Solution 1.6.2 $I(x) = x^2 + \dfrac{2x+1}{x^3-1}$

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}$$
$\Longrightarrow A = 1,\ B = -1,\ C = 0.$

Donc

$$\begin{aligned} I &= x^2 + \frac{1}{(x-1)} + \frac{-x}{(x^2+x+1)} \\ &= x^2 + \frac{1}{(x-1)} - \tfrac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\int I(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int \frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C.$$

$$\int I(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

Exemple 1.6.4 *Calculer* $I_2 = \int \dfrac{1}{\left[x^2+2x+2\right]^2}dx.$

Solution 1.6.3

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}dx \qquad (t = x+1) \\ &= \int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt \\ I_1 &= \int \frac{1}{(t^2+1)}dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)} + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\left[x^2+2x+2\right]^2}dx = \tfrac{1}{2}\left[\arctan(x+1) + \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\right] + C.$$

Exemple 1.6.5 *Calculer* $\int \dfrac{x^6+x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x+1}dx.$

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^6+x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x+1} \\
= \quad & \frac{x^6+x+1}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2} \\
= \quad & x+1+\frac{-x^4-4x^3+3x^2+x+2}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2} \\
& \frac{-x^4-4x^3+3x^2+x+2}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2} \\
= \quad & \frac{Ax+b}{(x^2+1)}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}+\tfrac{E}{x-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
A & & & & & & & + & E & = & -1 \\
-A & + & B & & & & & & & = & -4 \\
A & - & B & + & C & & & + & 2E & = & 3 \\
-A & + & B & - & C & + & D & & & = & 1 \\
 & - & B & & & - & D & + & E & = & 2
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= -\tfrac{5}{4} \\
B &= -\tfrac{21}{4} \\
C &= -\tfrac{6}{4} \\
D &= \tfrac{14}{4} \\
E &= \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$I(x)=x+1-\tfrac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{5x+21}{x^2+1}\right)}_{(a)}-\tfrac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{6x-14}{\left(x^2+1\right)^2}\right)}_{(b)}+\tfrac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{(c)}.$$

$$(a)=\frac{5}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{21}{x^2+1}=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)+21\arctan x+C.$$

$$(b)=3\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}-14\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$
\begin{aligned}
& \int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\ (u'=1, v=\frac{1}{x^2+1}) \\
= \quad & \frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\
= \quad & \frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}-2\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right)+C.$$

$$\int I(x)dx=\frac{x}{2}+x^2-\frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)+21\arctan x\right]-\frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{-3}{x^2+1}-\frac{1}{28}\left(\arctan x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right]+\frac{1}{4}\ln|x-1|+C.$$

1.7 Primitives des fonctions se ramenant aux fractions rationnelles

Soit f une fraction rationnelle réelle telle que $(f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)})$.

1.7.1 Calcul de $I=\int f(\mathbf{e}^x)dx$.

En effet. On multiplie et on divise par $\mathbf{e}^x$ puis on pose $t=\mathbf{e}^x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{f(\mathbf{e}^x)}{\mathbf{e}^x}\mathbf{e}^x dx \\ &= \int \frac{f(t)}{t}dt. \end{aligned}$$

Nous sommes dans le cas d'une fraction rationnelle.

Exemple 1.7.1 *Calculer*

$$I=\int \frac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{3x}}dx.$$

Solution 1.7.1 $f(t)=\dfrac{t}{1+t^3}$, $dt=\mathbf{e}^x dx$.

$$\begin{aligned} & I \\ &= \int \frac{t}{1+t^3}dt \\ &= \int \frac{t}{(1+t)\left(1+t+t^2\right)}dt \\ &= \tfrac{1}{3}\ln\left(1+\mathbf{e}^x\right)-\frac{1}{2}\ln\left[\left(\mathbf{e}^x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] \\ & -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\mathbf{e}^x-1}{\sqrt{3}}\right)+C. \end{aligned}$$

1.7.2 Calcul de $I=\int f(\sinh x,\cosh x)dx$.

Même chose car $\sinh x$ et $\cosh x$ s'écrivent en fonction de $\mathbf{e}^x$.

Calculer

$$I = \int \frac{\mathbf{1}}{\cosh x} dx.$$

Solution 1.7.2

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathbf{1}}{\cosh x} dx &= \int \frac{2}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}} dx \\
&= \int \frac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^{2x} + \mathbf{1}} dx \\
&= \int \frac{2}{t^2+1} dt \\
&= 2\arctan t + C \\
&= 2\arctan \mathbf{e}^x + C + C.
\end{aligned}$$

1.7.3 Calcul de $I = \int f(\sin x, \cos x) dx$.

On pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
dx &= \frac{2dt}{1+t^2}
\end{aligned}$$

$I = \int f(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}) \dfrac{2}{1+t^2} dt.$

Exemple 1.7.2 *Calculer* $\int \dfrac{\sin x}{1-\sin x} dx$

Solution 1.7.3 $\int \dfrac{\sin x}{1-\sin x} dx = \int \dfrac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} dx = -x - \dfrac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + C.$

1.8 Primitives des fonctions irrationnelles (ou abéliennes)

Soit f une fonction rationnelle en fonction de x et $y(x)$.
$(\Longleftrightarrow f(x, y(x)) = \dfrac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$, P et Q des polynômes de deux variables)
$f(x, y(x)) = \dfrac{x}{y(x)}, \dfrac{x^2 + y(x)}{1 + y(x)}, \dfrac{1+x}{x + y^2(x)}$ avec $y(x) = \sqrt{1+x^2}$.

1.8.1 Calcul de $I_n = \int f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx$

f est une fraction rationnelle en fonction $x, y(x)$ et $n \geq 1$.

On pose $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{a'x+b'}}$. Donc $y^n = \dfrac{ax+b}{a'x+b'}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{b'y^n - b}{a - a'y^n} \\ dx &= \frac{ny^{n-1}(b'a - a'b)}{(a - a'y^n)^2}. \end{aligned}$$

Et par conséquent $I_n = \int f\left(\dfrac{b'y^n - b}{a - a'y^n}, y\right) \dfrac{ny^{n-1}}{(a - a'y^n)^2} dy$ qui est une fraction rationnelle en fonction de y.

Exemple 1.8.1 **Exemples 1.8.2** *Calculer*

$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{x}.$$

Solution 1.8.1 $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

$y^2 = \dfrac{1+x}{1-x} \Longrightarrow x = \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$ et $dx = \dfrac{4y}{(y^2+1)^2} dy$.

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2}{y^2+1} + \frac{2}{y^2-1}\right) dy \\ &= \arctan y + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C \\ &= \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \tfrac{1}{2} \ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C. \end{aligned}$$

Exemple 1.8.3 *Calculer* $I = \int \sqrt{x+4} \dfrac{dx}{x}$.

1.8.2 Calcul de $I = \int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

f est une fraction rationnelle en fonction $x, y(x)$.

$\triangle > 0$

Soient α, β les racines de $ax^2+bx+c=0$. On pose $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$. Ce qui implique $x = \dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$. Donc $I = \int f\left(\dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a-t^2}, t\left(\dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a-t^2} - \alpha\right)\right) dt$ qui est une primitive d'une fonction rationnelle en fonction de t.

Exemple 1.8.4 *Calculer*

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Solution 1.8.2 $x^2+3x-4 = (x+4)(x-1) = (x+4)^2 t^2$

$\Longrightarrow x = \dfrac{1+4t^2}{1-t^2}$ et $dx = \dfrac{10t}{(1-t^2)^2}dt.$

$\sqrt{x^2+3x-4} = (x+4)\,t = \left(\dfrac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right)t = \dfrac{5t}{1-t^2}.$

$I = \int \dfrac{\dfrac{10t}{(1-t^2)^2}}{\dfrac{5t}{1-t^2}}dt = \int \dfrac{2}{1-t^2}dt = \ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right| + C.$

$\triangle = 0$

$a \geq 0$ évidente.

$a < 0$ impossible.

$\triangle < 0$

$a = 0$ premier cas.

$a < 0$ impossible.

$a > 0$ on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t.$

$\Longrightarrow x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$ et $dx = .$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t.$ Nous sommes dans le cas d'une fraction rationnelle.

Exemple 1.8.5 *Calculer*

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx,\ J = \int \sqrt{x^2+1}dx \text{ et } K = \int \sqrt{x^2-4}dx.$$

Solution 1.8.3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+t \Longrightarrow x = \dfrac{t^2-1}{1-2t}$ *et* $dx = -2\frac{(t^2-t+1))}{(1-2t)^2}.$

$I = -2\int \frac{(t^2-t+1))^2}{(1-2t)^2(t^2-1)}dt.$

$\sqrt{x^2+1} = x + t \Longrightarrow x = \dfrac{1-t^2}{2t}$ et $dx = -\frac{(t^2+1)}{2t^2}$.

$$\begin{aligned} & J \\ = & -\int \frac{t^4+2t^2+1)}{4t^3} dt \\ = & -\tfrac{1}{4}\left(t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3}\frac{1}{t^3}\right) + C \\ = & -\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+1} - x - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^3}\right) + C. \end{aligned}$$

Ou on pose $x = \sinh t \Longrightarrow \sqrt{x^2+1} = \cosh t$.

$$\begin{aligned} J = \int \cosh^2 t dt &= \frac{1}{2}\int(\cosh 2t + 1)\, dt \\ &= \frac{1}{4}(\sinh 2t) + \frac{t}{2} + C \\ &= \frac{1}{4}\sinh(2\arg\sinh x) + \frac{1}{2}\arg\sinh x + C. \end{aligned}$$

$K = \int \sqrt{x^2-4}dx = 2\int\left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\right)dx$. On pose $\cosh t = \dfrac{x}{2}$, donc $dx = 2\sinh t dt = \dfrac{1}{2}\int(\cosh 2t - 1)\, dt = \sinh 2t - \dfrac{t}{2} + C$.

$K = \sinh(2\arg\cosh x) - \dfrac{1}{2}\arg\cosh x + C.$

Ou on pose $\sqrt{(x-2)(x+2)} = (x-2)\,t$, donc $x = -2\frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \dfrac{-8t}{(1-t^2)^2}dt$.

$K = 32\int \dfrac{t^2}{(1-t^2)^3}dt = 32\int\left(\dfrac{1}{(1-t^2)^3} - \dfrac{1}{(1-t^2)^2}\right)dt.$

1.9 Exercices non corrigés

Exercice 1.9.1 *En utilisant le premier théorème de Riemann, calculer*

$$\int_a^b dx,\ \int_0^1 x dx,\ \int_0^1 x^2 dx,\ \int_a^b \mathbf{e}^x dx.$$

Exercice 1.9.2 *Calculer les limites suivantes*

1$-$ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}\right)$.

2$-$ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{1^p + 2^p + ...n^p}{n^{p+1}}\right)$ $(p > 1)$.

Exercice 1.9.3 *Montrer que*

$$f \text{ monotone sur } [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx < +\infty.$$

Exercice 1.9.4 *Montrer que l'intégrale suivante est nulle pout tout $a > 0$.*

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} dx.$$

(*Indication : on pose* $t = \frac{1}{x}$).

Exercice 1.9.5 *En intégrant par parties, trouver*

$$I(x) = \int \frac{x\mathbf{e}^x}{(1 + x)^2} dx \text{ et } J(x) = \int \ln(1 + x^2)\, dx.$$

Exercice 1.9.6 *Soit* $I_n = \int_0^1 x^n \mathbf{e}^{-x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1− *Calculer* I_1.

2− *Trouver une relation entre* I_n *et* I_{n+2}.

Exercice 1.9.7 *En posant* $x = \frac{1 - t}{1 + t}$, *trouver*

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx \text{ et } J(x) = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x} dx.$$

(*Déduire* J *de* I).

Exercice 1.9.8 *Trouver*

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^4 - 4)}} dx \text{ (poser} t = x^2).$$

Exercice 1.9.9 *Calculer les primitives des fractions suivantes après les avoir simplifier*

$$\frac{x - 1}{x(1 + x)}, \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \frac{x}{(x^2 - x + 1)(1 + x)}, \frac{x}{x^2 + 2x + 2}, \frac{x^4}{x^4 - 1}.$$

Exercice 1.9.10 *Calculer*

$\int \frac{1}{2 - \sin^2 x} dx$, $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$, $\int \tan x dx$, $\int \tan^2 x dx$.

Exercice 1.9.11 *Calculer les primitives des fonctions suivantes*

$$\frac{1}{\sinh x}, \frac{1}{\cosh x}, \coth^2 x, \tanh^2 x, \cosh^2 x.$$

Exercice 1.9.12 *Soit*

$$I(x) = \frac{x}{x^2+2x+2}.$$

1− *Calculer* $\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$.
2− *En déduire* $\int \arctan(1+x)\,dx$.

Exercice 1.9.13 *Calculer les primitives abéliennes*
$\int x\sqrt{1+x}dx$, $\int x\sqrt[3]{\frac{1+x}{x}}dx$, $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}dx$ (*poser* $t = x^3$),
$\int \sqrt{1+x^2}dx$, $\int \sqrt{x^2-1}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}}dx$, $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$,
$\int \sqrt{x^2-2x+2}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Exercice 1.9.14 **Soit* $a \in \mathbb{R}_+$ *et* $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x dx$.

1− *Trouver une relation entre* $I(a)$ *et* $I(a+2)$;

2− *Montrer que la fonctionf définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$f(a) = (a+1)\,I(a)\,I(a+1)$$

est périodique et de période 1, *calculer* $f(0)$.

3− *Démontrer que la fonction* $a \longmapsto I(a)$ *est décroissante.*

Chapitre 2

Equations différentielles du premier ordre

2.1 Equations différentielles quelconques

Définition 2.1.1 *Une équation de la forme :*

$$F(x, y, y') = 0$$

où y qui est en fonction de x est l'inconnu, s'appelle équation différentielle du premuier ordre.

2.1.1 Equations séparables

Elles sont de la forme

$$y'f(y) = g(x).$$

La solution générale est donnée par

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \text{ (car } y' = \frac{dy}{dx}).$$

Exemple 2.1.1 *Intégrer les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}
(y^2+1)\,y' &= x+1 \\
(x-1)\,y' + \sqrt{1-y^2} &= 0
\end{aligned}$$

2.1.2 Equations homogènes

Elles sont de la forme :

$$y' = F(\frac{y}{x}).$$

La solution générale est donnée par

$$x = C\mathbf{e}^{G(\frac{y}{x})}$$

telle que $C \in \mathbb{R}$ et $G(t) = \int \frac{dt}{F(t)-t}$ (pour la preuve on pose que $y = tx \Longrightarrow dy = tdx + xdt$).

2.2 Equations linéaires

Elles sont de la forme

$$y' + yf(x) = g(x). \tag{1}$$

2.2.1 Intégration de l'équation homogène (i.e., sans second membre)

$$y' + yf(x) = 0.$$

simplement elle est une équation à variables séparables. La solution générale est donnée par

$$y = C\underbrace{\mathbf{e}^{-\int f(x)dx}}_{y_1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Intégration de l'équation complète (1)

$$\underbrace{y_G}_{\text{S. générale de (1)}} = \underbrace{y}_{\text{S. générale de (1) sans 2ème membre}} + \underbrace{y_0}_{\text{S. particulière de (1)}}$$

Comment trouver y_0 ?

Par constataion à l'oeil nu.

Sinon

Par la méthode de la variation de la constante.

Méthode de la variation de la constante.

On pose $y_0(x) = C(x) y_1(x)$. Après calcul, on trouve $y_0(x) = \mathbf{e}^{-\int f(x)dx}.\int g(x)\mathbf{e}^{\int f(x)dx}dx$.

Exemple 2.2.1 *Intégrer $xy' - 2y = x$ ($-x$ solution particulière).*

$(1-x^2)\, y' - xy = x$.

2.2.3 Equations de Bernoulli

Elles sont de la forme

$$y' + yf(x) = y^\alpha g(x).$$

* $y = 0$, c'est une solution particulière.

* $\alpha = 0$, équation linéaire complète.

* $\alpha = 1$, équation linéaire sans second membre.

* $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, y \neq 0$; on pose $z = y^{1-\alpha}$. On aura, $\frac{1}{1-\alpha} z' + zf(x) = g(x)$. On est dans le cas linéaire.

Exemple 2.2.2 *Intégrer*

1. $xy' - y = y^2 \ln x$.
2. $xy' - y = \sqrt{y}$.

2.3 Exercices

Exercice 2.3.1 *Intégrer les équations différentielles suivantes*

1− $y' - \dfrac{3}{x} y = 2x$.

2– $\left\{\begin{array}{rcl} y'\left(1-x^2\right)-xy & = & 2x, \\ y(0) & = & 0. \end{array}\right.$

3– $y''=x\left(y'\right)^2$ *(poser $z=y'$ puis Bernoulli).*

4– $\left\{\begin{array}{rcl} y'-\mathbf{e}^{y-x} & = & 1, \\ y(0) & = & -1. \end{array}\right.$

(*Indication : poser $z=\mathbf{e}^{y-x}$*).

5– $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \mathbf{e}^{y+x}, \\ y(0) & = & 2. \end{array}\right.$

(*L'unique solution de l'équation est la fonction $y(x)=\ln\left(1+e^2-e^x\right)$ définie sur* $]-\infty,\ln\left(1+e^2\right)[$).

Exercice 2.3.2 *Résoudre l'équation homogène*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(xy'-y\right)^2 & = & x^2-y^2, \\ y(1) & = & 0. \end{array}\right.$$

(*Deux solutions qui sont $y_1(x)=-x\sin\left(\ln x\right)$ et $y_2(x)=x\sin\left(\ln x\right)$ définies sur l'intervalle* $\left]\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}},\mathbf{e}^{+\frac{\pi}{2}}\right[$

Exercice 2.3.3 *Résoudre l'équation de Bernoulli*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y+xy^2, \\ y(0) & = & 2. \end{array}\right.$$

(*La solution est $y(x)=\dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x\left(1-x\right)-\frac{1}{2}}$ qui est définie sur l'intervalle $]x_1,x_2[$, $x_1\approx-1,678$ et $x_2\approx 0,768$* .

Exercice 2.3.4 *Intégrer les équations différentielles suivantes*

1– $y'-y\cos x=\sin 2x$.

2– $x^2y'+y=2xy+x$.

3– $xy'+y=\sin x$.

4– $y'-x^2(y'+1)+xy=0$.

Exercice 2.3.5 (*Définition d'une équation de Riccati*).

Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

où a, b et c sont trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Une équation de Riccati ne se résout que si l'on en connaît une solution particulière φ. *On procède alors au changement d'inconnue*

$$z = y - \varphi$$

et on aura

$$z' = [a(x) + 2b(x)\varphi]\, z(x) + b(x)z^2(x)$$

qui est l'équation de Bernoulli.

Résoudre l'équation de Riccati

$$\begin{cases} y' &= 2xy + y^2 + x^2 - 1, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Par tatonnement on voit que $\varphi(x) = -x$ *est une solution particilière. La solution est* $y(x) = x + \dfrac{1}{1-x}$ *qui est définie sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$.

$$\begin{aligned} y' &= 2xy + y^2 + x^2 - 1 \\ &= y^2 + 2xy + x^2 - 1 \\ &= (y+x)^2 - 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{y'+1}{(y+x)^2} = 1.$$

En intégrant l'équation par rapport à x, *on aura*

$$-\frac{1}{y+x} = x + C$$

et ainsi de suite.

ADDITIF

Exercice 2.3.6 *Soit l'équation différentielle linéare du premier ordre*

$$y' - y = \mathbf{e}^x \sin x$$

1− *trouver* $y : y(0) = 0$.

2− *On pose*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{y(x)}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f *est continue en* 0.

3− *Calculer approximativement*

$$\int_0^t f(x)dx$$

quand t est proche de 0.

Exercice 2.3.7 *Trouver les solutions particulières de*

$$\begin{aligned} ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right) dy &= 0 & y = 4 \quad pour \quad x = 0, \\ xdy - ydx &= \sqrt{x^2 + y^2} & y = 1 \quad pour \quad x = 1. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Les equations différentielles du second ordre

3.1 Généralités

Définition 3.1.1 *On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme* $F(x, y, y', y'') = 0$ *entre la variable* x *et la fonction* $y(x)$ *et ses deux dérivées premières.*

Exemple 3.1.1 $y'' + \omega y = 0$ *admet pour solutions sur* $\mathbb{R}$ *les fonctions* $\varphi_1(x) = \sin \omega x$ *et* $\varphi_2(x) = \cos \omega x$.

Exemple 3.1.2 $y'' = 0$ *admet pour solutions tout polynôme de la forme* $ax + b$ *avec* a *et* b *deux constantes arbitraires.*

Remarque 3.1.1 *Sous certaines conditions nous admettrons que une équation différentielle du second ordre à une infinité de solutions dépendantes de deux constantes arbitraires :* $y = \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2)$.

L'ensemble de ces solutions constitue l'intégrale générale et représente l'équation d'une famille de courbes dépendant de deux paramètres : qui sont appelées courbes intégrales. Une intégrale particulière est obtenue en imposant des conditions initiales. Le plus souvent elles se présentent de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$. Dans ce cas, la courbe est assujettie à deux conditions : passer par un point (x_0, y_0) et avoir un coéfficient de tangente donné y'_0.

3.1.1 Equations qui ne contenant pas de y

Soit $F(x, y', y'') = 0$. On pose $y' = z(x)$, l'équation devient alors $F(x, z, z') = 0$.

Exemple 3.1.3 $y'' + y'^2 = 0$.

Solution 3.1.1 *On pose* $y' = z \Longrightarrow z' + z^2 = 0$. *On aura*

$$\begin{array}{lll} -\dfrac{dz}{z^2} & = & dx \Longrightarrow \dfrac{1}{z} = x + c_0 \\ \Longrightarrow z & = & \dfrac{1}{x+c_0} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+c_0} \\ \Longrightarrow y & = & \ln(x + c_0) + c_1 \end{array}$$

(c_0 et c_1 étant des constantes).

3.1.2 Equations qui ne contenant pas de x

$F(y, y', y'') = 0$, et si on considère que $y\prime$est une fonction de y, on peut donc poser et .

L'équation devient alors, avec pour nouvelle variable y, qui est une équation du premier ordre pour z. Soit ou et en intégrant avec .

3.2 Equations différentielles linéaires du second ordre

Définition 3.2.1 *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme :*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{1}$$

où $a(x), b(x), c(x)$ *et* $f(x)$ *sont des fonctions.*

On associe à cette équation l'équation sans second membre appelée équation homogène ($a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ est appelée l'équation complète) :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{H}$$

On a le théorème fondamental suivant.

Théorème 3.2.1 *La solution générale s'obtient en ajoutant à une solution particulière de l'équation complète, la solution générale de l'équation sans second membre (H).*

$$y_G = y_P + y_H. \tag{2}$$

3.2.1 Intégration de l'équation sans second membre (H)

I-Si on connaît deux intégrales particulières y_1 et y_2 .

La solution générale s'écrit $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. Les deux solutions doivent être linéairement indépendantes, ce qui se traduit par

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

($w(x)$ est appelé le **Wronskien**).

II- Si on connaît une intégrale particulière y_1

On a donc : $a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0$. On pose $y = y_1 z(x)$ où $z(x)$ est une fonction inconnue de x.
et d'où en remplaçant dans (1) $a(x)() + b(x)() + c(x) = 0$.
Cette équation s'intègre comme une équation se ramenant à une équation du premier ordre
III-3-3 Si on ne connaît pas de solution particulière, ce n'est généralement pas intégrable sauf si a, b et c sont des constantes..
III-4 Intégration de l'équation complète.
III-4-1 Si on connaît une solution particulière y_p .
La solution générale est alors .

Exemple : L' équation (1) admet pour solution de l'équation sans second membre la vue du second membre, l' intégrale particulière sera un polynôme du troisième degré . On obtient donc en remplaçant dans (1) .

Remarque 3.2.1 *Si on ne connaît pas de solution particulière. On applique la méthode de Lagrange appelée aussi méthode de la variation de la constante. Elle ne doit être employée qu'en dernier recours (surtout en physique). Soit l'intégrale générale de l'équation sans second membre dans laquelle on va faire varier les constantes c'est à dire que* $y_g = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

soit $y_g = \lambda_1(x)\, y_1 + \lambda_2(x)\, y_2$ *. L'équation différentielle fournissant une première relation pour déterminer ces deux fonctions, il nous sera possible d'en imposer une seconde. On dérive pour obtenir . En dérivant on obtient et en reportant dans l'équation* (1)*. Comme* y_1 *et* y_2 *sont des solutions particulières, l Comme* y_1 *et* y_2 *sont linéairement indépendantes . Le système précédent est un système de Cramer et détermine* $\lambda_1(x)$ *et* $\lambda_2(x)$*, .*

Exemple 3.2.1 *: y" + y = cotan x.*

3.3 Equations linéaires à coéfficients constants

Elles sont de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{3}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3.3.1 Equations homogène (i.e., $f(x) = 0$)

On cherche la solution générale sous la forme, $y = \mathbf{e}^{rx}$. On remplace y par $\mathbf{e}^{rx}$ dans (3) sans le second membre, on aura

$$\mathbf{e}^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{ar^2 + br + c}_{\text{équation caractéristique } (*)} = 0.$$

1- (*) *Admet deux racines réelles* r_1 *et* r_2 *distinctes.*

Soit $y_1 = \mathbf{e}^{r_1 x}$ et $y_2 = \mathbf{e}^{r_2 x}$. La solution générale de l'équation (3) sans second membre est

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2- r_1 *et* r_2 *complexes.*

$r_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta$, $r_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right) \\ = \quad & C_1 \mathbf{e}^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 \mathbf{e}^{\alpha x} \sin \beta x \\ = \quad & C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3- (*) *Admet une racine double.*

La solution est de la forme, $y = z(x)\mathbf{e}^{rx}$. On remplace y par sa valeur dans (2) sans le second membre, on trouve $z = C_1 x + C_2$, C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène est

$$\begin{aligned} & C_1 x \mathbf{e}^{rx} + C_2 \mathbf{e}^{rx} \\ = \quad & C_1 y_1 + C_2 y_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.3.2 Equation complète (i.e., $f(x) \neq 0$)

$$\underbrace{y_G}_{\text{S. générale de (3)}} = \underbrace{y}_{\text{S. générale de (3) sans 2ème membre}} + \underbrace{y_0}_{\text{S. particulière de (3)}}$$

A. *Cas où* $f(x) \in R_n[X]$.

- $c \neq 0$. On remplace y par un polynôme de degré n, puis on identifie.
- $c = 0, b \neq 0$. On remplace y par un polynôme de degré $n+1$, puis on identifie.
- $c = 0, b = 0, a \neq 0$. On intègre deux fois de suite $f(x)$.

B. *Cas où* $f(x) = \mathbf{e}^{\alpha x} P_n(x)$.

On cherche la solution particilière en posant $y = \mathbf{e}^{\alpha x} P(x)$ (P polynôme quelconque). (3) s'écrit

$aP" + P'(2\alpha a + b) + P(a\alpha^2 + b\alpha + c) = P_n(x)$.

On est dans le premier cas.

C.. *Cas où* $f(x) = A\cos \alpha x + B \sin \alpha x; \alpha, A$ *et* B *dans* $\mathbb{R}$.

- $\mathbf{i}\alpha$ n'est une racine de l'équation caractéristique. On cherche y_0 sous la forme

$$y_0 = A' \cos \alpha x + B' \sin \alpha x.$$

- $\mathbf{i}\alpha$ est une racine de l'équation caractéristique (nécesserement simple). On cherche y_0 sous la forme

$$y_0 = x \left(A' \cos \alpha x + B' \sin \alpha x \right).$$

3.4 Dans le cas général,

Pour intégrer l'équation (3), on applique la méthode de variation des constantes.
Soit y la solution générale de (3) sans le second membre ($\Longrightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2$).
Recherche d'une solution particulière par le méthode de variation des constantes. On pose

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \text{ avec } C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0.$$

Après calcul, on trouve

$$\begin{aligned} & a y_0'' + b y_0' + c y_0 \\ = & \; C_1 \underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + C_2 \underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0} \\ & + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) \\ = & \; f(x). \end{aligned}$$

On aura donc deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) & = & 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) & = & f(x) \end{cases}$$

Ce système a une et une seule solution car y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

$\Longrightarrow C_1(x)$ et $C_2(x)$.

Exemple 3.4.1 *Intégrer* $y" + y = x \sin x$.

Solution 3.4.1 *1-* $y" + y = 0 \Longrightarrow y = C_1 \underbrace{\sin x}_{y_1} + C_2 \underbrace{\cos x}_{y_2}$.

$(r^2+1=0 \Longleftrightarrow r_1=\mathbf{i}, r_2=-\mathbf{i})$

2-

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x &= 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x &= x\sin x \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} C_1'(x) &= \frac{1}{2}x\sin x \\ C_2'(x) &= x\sin^2 x \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (intégration par parties)

$$\begin{cases} C_1(x) &= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin^2 x + C_1 \\ C_2(x) &= -\frac{1}{4}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - x^2\right) + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & y_G \\ = \quad & C_1\sin x + C_2\cos x + C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \\ = \quad & \tfrac{\sin x}{4}\left(-x\cos 2x + \tfrac{1}{2}\sin^2 x + C_1\right) - \tfrac{\cos x}{4}\left(x\sin 2x + \tfrac{1}{2}\cos 2x - x^2 + C_2\right) \end{aligned}$$

C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}$.

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Intégrer les équations suivantes*

$$\begin{aligned} y' + y &= x^2 \\ y' - y\cos x &= \sin 2x \\ \sin x dy &= y dx \\ (1-x^2)\,y' + xy &= 2x \end{aligned}$$

Exercice 3.5.2 *Intégrer les équations différentielles du second ordre*

1$-$ $y'' - y' - 2y = 0.$

2$-$ $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y &= \mathbf{e}^x, \\ y(0) = y'(0) &= 0. \end{cases}$

3$-$ $\begin{cases} y'' + 6y' + 10y &= -10x^2 + \dfrac{6}{5}, \\ y(0) = -y'(0) &= -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

Exercice 3.5.3 *Résoudre l'équation*

$$\begin{aligned} y'' + y &= \cos x, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

La solution est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right) \sin x + \cos x.$$

Exercice 3.5.4 *Résoudre l'équation*

$$\begin{aligned} 4y'' - 12y' + 9y &= x, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 3.5.5 *Résoudre l'équation*

$$y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = x^2$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

La solution cherchée est

$$y = \frac{5\sqrt{3}}{12} \mathbf{e}^{-x} \sin\left(x\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4} x\,(x-1)\,.$$

Chapitre 4

Fonctions à plusieurs variables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des suites finies $(x_1, ..., x_n)$ telles que $x_i \in \mathbb{R}$; $i \in \{1, ..., n\}$.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$.

Le but premier de ce cours est d'étudier la généralisation de la notion de continuité et au prochain chapitre de dérivabilité aux fonctions de plusieurs variables. Notre section sera consacré aux fonction f définie sur une partie Ω généralement ouverte de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour simplifier les notations, on se limite dans cette section à des fonctions de deux ou trois variables. La notion de continuité s'appliquent de même aux fonctions de trois variables et plus.

4.1 Distances et normes

4.1.1 Distances sur $\mathbb{R}^n$

Définition 4.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle distance sur $\mathbb{R}^n$, toute application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiants les propriétés suivantes :*

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La dernière propriété est dite "inégalité triangulaire" ou de "convexité".

$d(x,y)$ se lit distance de x à y.

1. $d(x,y)=x-y$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Soit

$$d: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases} \end{array}$$

d est une distance sur $\mathbb{R}^n$, appelée "distance discrète".

Proposition 4.1.1 *On a*
(*a*) *Pour tout* x,y,z *dans* $\mathbb{R}^n$, $|d(x,z)-d(z,y)| \leq d(x,y)$.
(*b*) *Pour tout* $x_1,...,x_m$ *dans* $\mathbb{R}^n$, $d(x_1,x_m) \leq \sum\limits_{j=i}^{m-1} d(x_j,x_{j+1})$.

Proposition 4.1.2 (***Distance entre deux parties de*** $\mathbb{R}^n$). *Soient* A,B *deux parties de* $\mathbb{R}^n$ *muni d'une distance* d. *On définit la distance entre* A *et* B *par*

Définition 4.1.2

$$D(A,B)=\inf\{d(x,y): x\in A \text{ et } y\in B\}.$$

Remarque 4.1.1 *D n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ bien qu'on parle de distance.*

Définition 4.1.3 (***Parties bornées, diamètre***). *On appelle diamètre de A, le nombre*

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y): x\in A \text{ et } y\in A\}.$$

Remarque 4.1.2 *$\delta(A)\geq 0$ est peut être égal à $+\infty$. On dira que qu'une partie A est bornée, si et seulement si, $\delta(A)<+\infty$.*

4.1.2 Normes sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.1.4 *On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$, toute application*

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{llcl} (a) & N(x) & = & 0 \Longleftrightarrow x = 0 \\ (b) & N(\lambda x) & = & \lambda N(x) \\ (c) & N(x+y) & \leq & N(x) + N(y) \end{array}$$

Remarque 4.1.3 *Si $n = 1$, N est la valeur absolue $|.|$. Par la suite on adoptera la notation $\|.\|$ au lieu de $N(.)$ qui se trouve souvent dans la littérature (livres,...). $\|x\|$ se lit "norme de x".*

Exemples 4.1.1 *Soit $x \in \mathbb{R}^n ; x = (x_1, ..., x_n)$. On pose*

$$\|x\|_1 = \|x_1\| + ... + \|x_n\|$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2}$$
$$\|x\|_\infty = \sup \{\|x_i\| : 1 \leq i \leq n\}$$

ce sont 3 normes sur $\mathbb{R}^n$. La norme $\|x\|_2$ est appelée norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lcl} (\mathbb{R}^n, \|x\|_1) & = & l_n^1 \\ (\mathbb{R}^n, \|x\|_2) & = & l_n^2 \\ (\mathbb{R}^n, \|x\|_\infty) & = & l_n^\infty \end{array}$$

Vérification de ces normes et justification des notations.

4.1.3 Distance associée à une norme

Définition 4.1.5 *On appelle distance associée à une norme $\|.\|$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x-y\|. \end{array}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_1 \\ \|x-y\|_2 \\ \|x-y\|_\infty \end{cases}$$

4.1.4 Suites de $\mathbb{R}^n$

Définition 4.1.6 *On appelle suite de $\mathbb{R}^n$, toute application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ m & \longmapsto & x_m \end{array}$$

qu'on note par $(x_m)_m$.

Définition 4.1.7 *On dit qu'une suite $(x_m) \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_m - x\| = 0 (\Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} x_m = x).$$

On dira que x est la limite de la suite (x_m).

Remarque 4.1.4 *Il suffit de trouver une seule norme pour qui la suite converge, car elles sont toutes équivalentes. Donc dans la suite on travaille uniquement avec la norme euclidienne ou avec les normes faciles à manouvrer. La limite est unique.*

4.2 Fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 4.2.1 *On appelle fonction numérique de n variables, toute application*

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & f(x_1, ..., x_n). \end{array}$$

On appelle domaine de définition de f noté D_f, l'ensembledes $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels cette fonction est définie.

1. $$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

   $D_f = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = x^{yz} \end{array}$$

$D_f = \{(x,y,z) : x > 0\}$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{array}$$

$D_f = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x + \arccos y \end{array}$$

$D_f = \{(x,y) : 0 \leq y \leq \pi\}$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \ln(x+y) \end{array}$$

$D_f = \{(x,y) : -y < x\}$.

4.2.1 Représentation de fonctions à plusieurs variables

La fonction suivante représente la sphère

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & z = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & z = \sqrt{(x^2+y^2) - \frac{1}{2}} \end{array}$$

représente un chateau d'eau.

Remarque 4.2.1 *Il n'est pas possible de faire des représentations graphiques des fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $n \geq 3$.*

4.2.2 Continuité de fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Limite d'une fonction en un point

Définition 4.2.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f a une limite l quand $x \longrightarrow x_0$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Dans ce cas on dira que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$.

Théorème 4.2.1 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction numérique de* n *variables et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Alors*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\, (x_m) \subset \mathbb{R}^n : x_m \longrightarrow x_0, ona \lim_{m \longrightarrow \infty} f(x_m) = l.$$

4.3 Continuité d'une fonction

Définition 4.3.1 *On dira que* f *est continue au point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

On dira que f *est continue sur* $D \subset \mathbb{R}^n$, *si elle est continue en tout point de* D.

1. Soit f définie par
   $$\begin{array}{cccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$
   $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas, donc elle n'est pas continue en $(0,0)$ (continuité dans toutes les directions).
2. $f(x,y) = \begin{cases} (1 + x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   est continue en $(0,0)$.
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   n'est pas continue (voir la direction $y = x^2$).

Proposition 4.3.1 *Si* f *est continue, toutes les applications partielles qui lui sont associées sont continues.*

Remarque 4.3.1 *Attention : la réciproque est fausse en général. On pourra étudier la continuité en 0 de l'application*
$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

Coordonnées polaires (dans le plan)

Soit
$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$
$r^2 = x^2 + y^2$ et $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.
$r \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|(x,y)\| \longrightarrow 0.$

Remarque 4.3.2 *Pour déterminer θ, il faut prendre en compte le quadrant où se trouve le point M.*

Soit $M(\sqrt{3},1)$. On se propose de calculer r et θ. On commence par θ.
$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ où $\pi + \dfrac{\pi}{6}$. On choisit $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. $r = 2$.

Coordonnées sphériques (dans l'espace)

Soit
$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,\beta) & \longmapsto & (x,y,z) = (r\cos\beta\cos\theta, r\cos\beta\sin\theta, r\sin\beta) \end{array}$$
$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ et $\sin\beta = \dfrac{z}{r}$.
$r \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|(x,y,z)\| \longrightarrow 0.$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ $(0 < \beta < \pi)$.
Soit $M(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3)$. On se propose de calculer r, θ et β. On commence par θ.
$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$, $r = 5$ et $\sin\beta = -\dfrac{3}{5}$. On choisit $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. $r = 2$.

Remarque 4.3.3 *Coordonnées pôlaires, sphériques,cylindriques généralisées (ça dépend des livres).*

Exemple 4.3.1 (*Sur la sontinuité*)

1. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Coordonnées polaires ($(x,y)\longrightarrow(0,0)\Longleftrightarrow r\longrightarrow 0$).

2. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Coordonnées polaires

   $$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\\ =\ &\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r\cos\theta\sin\theta}{r}\\ =\ &\cos\theta\sin\theta.\end{aligned}$$

   La limite n'existe pas et donc pas de continuité.

3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Continue sur $\mathbb{R}^2$.

4. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

   Voir coordonnées pôlaires.

5. $f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\frac{y}{x} & \text{si} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,y).\end{cases}$

   Continue sur $\mathbb{R}^2$.

6. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

7. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Chapitre 5

Fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

5.1 Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Définition 5.1.1 *Soit f une fonction définie dans un voisinage (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Si les fonctions partielles*

$x \longmapsto f(x, y_0)$ *et* $y \longmapsto f(x_0, y)$

sont dérivables en x_0 et y_0 respectivement, leurs dérivées sont sont appelées dérivées partielles de f au point (x_0, y_0).

On note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

On va justifier cette notation après.

Remarque 5.1.1 *D'après la définition, il est évidentd'utiliser les formules ordinaires des dérivées dans $\mathbb{R}$ pour calculer les dérivées partielles.*

1. $f(x, y) = x^y$.
2. $f(x, y) = \mathbf{e}^{\sin \frac{y}{x}}$.
3. $f(x, y) = \mathbf{e}^x \sin y$.
4. Calculet $f'_x(1, 2, 0), f'_y(1, 2, 0), f'_z(1, 2, 0)$ de $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$.

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   $f'_x(0,0) = f'_y(0,0)$.

Remarque 5.1.2 *Les dérivées partielles existent au point* $(0,0)$ *mais* f *n'est pas continue* $\Longrightarrow f(x,0)$ *et* $f(0,y)$ *sont continues.*

Dérivées partielles dans une direction et gradient

Définition 5.1.2 *Soit* f *une fonction définie dans un voisinage* (x_0, y_0) *de* $\mathbb{R}^2$*. On pose* $z(t) = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+h^2}} f(x_0 + th, y_0 + tk)$.

Si z *est dérivable au point* 0*, on appelle cette dérivée, dérivée de* f *au point* (x_0, y_0) *dans la direction* (h,k).

1. Donner la dérivée de $\mathbf{e}^x \sin y$ au point $(0,0)$ dans la direction de (h,k).

   On pose $z(t) = \mathbf{e}^{th} \sin tk$ puis on calcule la dérivée.

2. Soit

   $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Donner sa dérivée au point $(0,0)$ dans la direction de (h,k).

Définition 5.1.3 *Le vecteur* $\overrightarrow{grad} f_{(x_0,y_0)} = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right)$ *est appelé gradient de* f *au point* (x_0, y_0).

$\overrightarrow{grad} f_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire.

Le lien entre la dérivée dans une direction et le gradient est donné par le théorème suivant.

Théorème 5.1.1 *Soit* f *une fonction de deux variables à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, admettant des dérivées partielles* f''_x *et* $f'^{\prime}_y$*. La dérivée de* f *dans la direction* $(h,k) = \mathrm{Pr}_{/(h,k)} \overrightarrow{grad} f_{(x_0,y_0)}$.

Exercice 5.1.1 *Soit* $f(x,y) = x^2 y$.

1. *Donner la dérivée de* f *au point* $(1,1)$ *dans la direction de* $(-1,2)$.
2. $\overrightarrow{grad} f, (1,1)$.
3. $\mathrm{Pr}_{/(-1,2)} \overrightarrow{grad} f_{(1,1)}$.

5.1.1 Dérivées secondes

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction admettant des dérivées partielles au voisinage de (x_0, y_0).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{(x_0,y_0)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{array} \right. \end{array}$$

Supposons que f'_x et f'_y admettent eux aussi des dérivées partielles au point (x_0, y_0). On peut définir alors quatre dérivées partielles

$f''_{xx}(x_0, y_0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, $f'_{yx}{}'(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $f'_{yy}(x_0, y_0) = f''_{y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

Ces dérivées partielles s'appellent dérivées partielles secondes.

1. $f(x,y) = x^y, \quad x > 0.$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Les dérivées partielles premières sont continues partout sauf au point $(0,0)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ mais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Théorème 5.1.2 (*Schwarz*). *Soit f une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles f''_{xy} et $f'_{yx}{}'$ dans un voisinage de (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ continues en (x_0, y_0). Alors*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Preuve. Admis. ■

5.1.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'order $3, 4, ..., n$.

Soit f une fonction de deux variables dans $\mathbb{R}$. Supposons que f admet des dérivées partielles secondes dans un voisinage de (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. Si ces dernières admettent des dérivées partielles (qui seront nommées dérivées patielles d'ordre) on les note par :

$$f'''_{x^3}, f'''_{x^2y}, f'''_{yx^2}, f'''_{xyx}, f'''_{xy^2}, f'''_{y^3}, f'''_{y^2x}, f'''_{yxy}.$$

Si les dérivées partielles sont continues au $\mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$ on a

$$\left.\begin{array}{l} f'''_{x^2y} = f'''_{yx^2} = f'''_{xyx} \\ f'''_{xy^2} = f'''_{y^2x} = f'''_{yxy} \end{array}\right\} \text{généralisation du théorème précédent.}$$

Il y a donc à considérer que

$$f'''_{x^3},\ f'''_{yx^2},\ f'''_{xy^2},\ f'''_{y^3}.$$

5.2 Différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction définie dans un $\mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$ dans $\mathbb{R}$. On dira que f est différentiable au point (x_0, y_0) si les dérivées partielles existent au point (x_0, y_0) et si*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{1}{\|(h,k)\|} \left(f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (h,k)\left(f'_x, f'_y\right)\right) = 0.$$

Dans ce cas la différentielle de f au point (x_0, y_0) sera notée par

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

$$\begin{array}{rccc} df_{(x_0,y_0)}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \longmapsto & \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right)(h,k) \end{array}$$

1. f différentielle $\Longrightarrow f$ continue.
2. La différentielle est unique.
3. Soit
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   a. f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   b. $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$ existent en mais non continues en $(0,0)$.

   c. f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
4. Soit
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{y}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,y). \end{cases}$$

a. f est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($|f(x,y) - f(0,0)| < x^2$).

b. $f'_x(0,0)$ existe et continue sur $\mathbb{R}^2$en mais et f'_y n'est pas continue en $(0, y_0)$ si $y_0 \neq 0$.

c. f différentiable en $(0, y_0) \Longrightarrow$ dans $\mathbb{R}^2$.

5. Calculer l'accroissement totale de $f(x,y) = xy$ au point (2.3) si $\triangle x = 0.1$ et $\triangle y = 0.2$.

Remarque sur les deux premiers exemples.

Théorème 5.2.1 *Supposons que les dérivées partielles existent et sont continues dans un $\mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$. Alors, f est différentiable au point (x_0, y_0).*

Définition 5.2.2 *Dans ce cas f est dite continuement différentiable en $(x_0, y_0) =$ (de classe $\mathcal{C}^1$).*

Proposition 5.2.1 *Soit f et g deux fonctions différentiables. Alors*

$$\begin{aligned} d(\alpha f + g) &= \alpha df + dg, \\ d(fg) &= gdf + fdg, \\ d\left(\frac{1}{f}\right) &= -\frac{df}{f^2}. \end{aligned}$$

Définition 5.2.3 ***L'expression*** *$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est la différentielle totale exacte d'une fonction $f(x,y)$ si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.*

Soit l'expression $(3x^2y - 2y^2)\,dx + (x^3 - 4xy + -y^2)\,dy$. Vérifier que qu'elle est une différentielle totale exacte puis calculer f.

Un aperçu sur la différentiation des fonctions composées.

$$\begin{array}{lclcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,s) & \longmapsto & (x,y) = (g(r,s), h(r,s) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lclcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) & \longmapsto & f(x,y) = xy^2 \end{array}$$

5.3 Fonctions différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$

5.3.1 Introduction

Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si f est dérivable au point x, on a

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Sous cette forme on ne peut la généraliser pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, car ladivision par un vecteur n'est pas définie. En transansformant (1), on aura

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h} = 0.$$

$f'(x)$ est une application linéaire de

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & f'(x)h \end{array}$$

et sous cette forme on peut généraliser la définition aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 5.3.1 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application. On dira que f est différentiable au point x de $\mathcal{U}$, s'il existe une application linéaire $L_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_x h}{\|h\|} = 0.$$

On note L_x par df_x.
Cette définition est équivalente à celle ci. Considérons

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & x = (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x), ..., f_p(x)) \end{array}$$

Supposons que les dérivées partielles de $f_1, ..., f_p$ existent au point x. On dira que f est différentiable au point x si

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} [f(x+h) - f(x) - Jh] = 0$$

où

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice "jacobienne" de f au point x. On note par $df_x h = Jh$ qui est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

1- $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x^2-y^2, 2xy) \end{array}$

2- $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x\mathbf{e}^y, z\mathbf{e}^x) \end{array}$

3- $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (\sin xy, xz, z) \end{array}$

Théorème 5.3.1 (*Des fonctions composées*) *Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications. Soit $x \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) \in \mathcal{V}$. Si f est différentiable au point x et g est différentiable au point $f(x)$, alors $d(g \circ f)_{(x)} = dg_{(f(x))}.df_x$.*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & =(x,y) & \longmapsto & (x, x+y) \end{array}, \quad \begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & =(u,v) & \longmapsto & (\mathbf{e}^u, uv, v) \end{array}$$

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, dg_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^u & 0 \\ v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, dg_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^x & 0 \\ x+y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$dg_{(f(x,y))}.df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^x & 0 \\ 2x+y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(g \circ f)(x,y) = (\mathbf{e}^x, x(x+y), (x+y)), d(g \circ f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^x & 0 \\ 2x+y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applications aux changement de coordonnées, polaires, sphériques et cylindriques.

1- Polaires

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) & \longmapsto & xy^2 \end{array}$$

2- Sphériques

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[\times[0,2\pi]\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta,\beta) & \longmapsto & ((r\sin\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\cos\beta)) & \longmapsto & xy^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}]0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi[& \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\beta) & \longmapsto & (x,y,z)=(r\cos\beta\cos\theta, r\cos\beta\sin\theta, r\sin\beta) \end{array}$$

3- Cylindriques

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, z) & \longmapsto & xy^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}]0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & (x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{array}$$

5.3.2 Exercices

Exercice 5.3.1 *Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.*

$f(x,y)=\dfrac{y}{x}$, $g(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $h(x,y)=\ln(\sin(x+xy))$, $e(x,y)=\arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

En déduire df, dg, dh, de.

Exercice 5.3.2 *Chercher* f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f''_{yx} *où* $f(x,y)=x^3y$.

Exercice 5.3.3 *Calculer* $f''_{x^2}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$, $f''_{y^2}(0,0)$ *où* $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$.

Exercice 5.3.4 *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5.3.5 *Calculer* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ *(qu'est-ce que vous remarquez) ?*

Exercice 5.3.6 *Soit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy}{x+y} & si \quad x \neq -y \\ 0 & si \quad x = -y \end{array} \right. \end{array}$$

1− *Trouver df.*

2− *Etudier la continuité au point $(x,-x)$.*

3− *Est-ce que f'_x et f'_y sont continues au point $(x,-x)$.*

Exercice 5.3.7 *Calculer df avec $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.*

Exercice 5.3.8 *Trouver $\mathbf{grad} f(x,y)$ et $\mathbf{grad} g(x,y)$ avec $f(x,y) = x-y+(xy)^3$ et $g(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$.*

Exercice 5.3.9 *Soit $f(x,y) = x(x^2+y^2-1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

1− *Calculer $\nabla f(x,y)$ et déterminer l'ensemble des points où ce gradient s'annule.*

2− *$df(x,y)$ désignant la différentielle de f en (x,y), donner l'expression de $df(x,y)(h,k)$.*

Exercice 5.3.10 *Montrer que*

$$(3x^2y - 2y^2)\,dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)\,dy$$

Exercice 5.3.11 *est une différentielle totale exacte d'une fonction f qu'on déterminera.*

Exercice 5.3.12 *Si*

$$\frac{\partial f}{\partial U}(a,b) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+th, b+tk) - f(a,b)}{t} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial U}(a,b)$ est la dérivée de f au point (a,b) suivant le vecteur $U = (h,k)$.

1− *Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial U}(1,2)$ où $f(x,y) = xy - x^3 - y^3$ et $U = (4,3)$.*

2− *Calculer la dérivée de $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ au point $(1,1)$ suivant la première bissectrice $(x > 0)$.*

3− *Montrer que*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pr}_U \nabla f(1,2) & = & \dfrac{\partial f}{\partial U}(1,2) \\ \mathrm{Pr}_{(x,x)} \nabla f(1,1) & = & \dfrac{\partial f}{\partial (x,x)}(1,1) \end{array}$$

où $\nabla f = \mathbf{grad}(f)$.

4− *Vérifier que*

$$\frac{\partial f}{\partial U}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\sin\beta$$

où α et β sont les angles compris entre U et les directions positives ox et oy respectivements (on pourra en déduire ceci de la première définition).

Exercice 5.3.13 *Soit la fonction*

$$\varphi = \frac{(x^2z+y)^3 \ln\left(\dfrac{yz}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

1− *Calculer dr, ds, dt où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $s = x^2z+y$ et $t = \dfrac{yz}{x}$.*

2− *Ecrire $d\varphi$ en fonction de dr, ds et dt puis en déduire $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$.*

Exercice 5.3.14 *Soient les fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sin(x^2-y^2) \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

1− *Calculer h'_x et h'_y avec $h = f \circ g$ et en déduire $dh(x,y)$.*

2− *Donner les matrices jacobiennes des fonctions f, g et $f \circ g$. Que remarquez-vous ?*

Exercice 5.3.15 *Donner les matrices jacobienne et df, dg et $d(f \circ g)$ où*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (u^2+v^2, uvw) \end{array} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, (xy)^2, \ln y) \end{array}$$

Chapitre 6

Intégrales multiples

Nous commençons par les intégrales doubles, qui seront traitées d'une manière proche de la science physique. Une fois le mécanisme assimilé, les intégrales triples et plus deviendront une simple affaire d'imagination et d'intuition. Nous essayerone de vous faire familiariser mathématiquement avec ces notions qui sont d'un intérêt capital dans la deuxième année. Deux théorèmes fondamentaux l'une de Fubini simple à retenir mais esentiel pour calculer n'importe quelle intégrale, l'autre du changement de variables qui demande des raisonnements rigoureux et pénibles à la fois. Mais une fois l'idée générale assimilée, les exercices feront le principale,i.e., vous entraineront à bien comprendre cette notion.

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 *On appelle pavé tout rectangle P du plan $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes.*

$\Longrightarrow P = [a,b] \times [c,d]$.

On note par $S(P) = (b-a)(d-c)$ qui est ≥ 0.

Remarque 6.1.1 *La surface d'un segment est nulle, comme dans $\mathbb{R}$ la longueur d'un point est nulle (évidemment la surface d'un point est nulle).*

Définition 6.1.2 *Un ensemble P est dit pavable s'il est réunion disjointe d'un nombre fini de pavés.*

$\Longrightarrow P = \coprod_{i=1}^{n} P_i$ avec $P_i \cap P_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$.

Et par conséquent $\quad S(P) = \sum_{i=1}^{n} S(P_i)$.

Définition 6.1.3 *Une partie de $\mathbb{R}^2$ est bornée si on peut l'inclure dans un pavé.*

$$D \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{bornée} \Longleftrightarrow \exists P \text{ (pavé)} \subset \mathbb{R}^2 : D \subset P.$$

Définition 6.1.4 *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné. On dira que D est quarrable s'ils existent deux suites (D_n) et (D'_n) pavables tel que :*

$\forall n, \quad D'_n \subset D \subset D_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (S(D_n) - S(D'_n)) = 0$.

Dans ce cas on pose

$S(D) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S(D_n) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S(D'_n)$.

Exemple 6.1.1 *Toute surface limitée par une coube fermée continue ou continue par morceaux est quarrable (voir exercices).*

Remarque 6.1.2 *Soient D et D' deux ensembles quarrables (ou ont des surfaces). Si D et D' sont disjoints, alors $S(D \cup D') = S(D) + S(D')$ ($\Longrightarrow$ que si (D_n) est une suite de parties quarrables 2 à 2 disjointes, alors $S(\coprod_n D_n) = \sum_n S(D_n)$. Comme conséquence directe, si $D' \subset D$ alors $S(D \diagdown D') = S(D) - S(D')$ et $S(D') \leq S(D)$.*

Remarque 6.1.3 *Cette propriété nécessite un commentaire, la démonstration est simple. D et D' ont des surfaces $\Longrightarrow D \diagdown D'$ a une surface. Mais si D et D' sont qurrables $\not\Rightarrow D \diagdown D'$ est quarrable comme le montre l'exemple suivant :*

$D = [0,1]^2$ *et* $D' = \left\{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{Q} \cap [0,1]^2\right\}$.

La partie $D \diagdown D'$ n'est pas quarrable car on ne pourra jamais y mettre un pavé.

Les parties de ce genre sont rares et on les rencontre presque jamais en pratique et par conséquent on s'interesse qu'aux parties qurrables par la suite.

$$\begin{pmatrix} \textit{quarrable} & \Longrightarrow & \textit{a une surface} \\ \textit{quarrable} & \not\Longleftarrow & \textit{a une surface} \end{pmatrix}$$

6.2 Intégrales de Riemann d'une fonction réelle définie sur une partie quarrable

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie quarrable et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application réelle.

$$D \text{ est quarrable} \Longrightarrow \begin{cases} \exists\, (D_n) \text{ pavables: } S(D_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} S(D), \\ \text{avec } D_n = \coprod_{i=1}^{m_n} P_i^n \text{ et } \sup_{1 \leq i \leq m_n} S(P_i^n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \,. \end{cases}$$

$$S(P_i^n) = \left(a_{i+1}^n - a_i^n\right)\left(b_{i+1}^n - b_i^n\right).$$

Soit (x_i^n, y_i^n) un point quelconque de P_i^n.

Définition 6.2.1 *On dira que f est intégrable au sens de Riemann sur D si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^n, y_i^n) S(P_i^n) \textit{ existe.} \tag{6.2.1}$$

Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur D, le nombre qu'on note par $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ ou $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$

Remarque 6.2.1 - *Cette définition ne dépend pas de D_n ni des points (x_i^n, y_i^n).*

- On l'appelle aussi intégrale double et représente un volume.

- On constate que cette théorie est identique à celle de l'intégrale simple (i.e., de Riemann d'une fonction d'une variable réelle) ; Elles se différencient uniquement en notation et dessins qui sont lourds.

- Les intégrales triples qu'on verra plus loins, seront simples si on assimile bien les intégrales doubles.

6.3 Propriétés des intégrales doubles

Théorème 6.3.1 *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une partie quarrable fermée et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, f est intégrable au sens de Riemann sur D.*

Preuve. Soit (D_n) une suite pavable telle que

$$S(D_n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} S(D), \quad D_n = \coprod_{i=1}^{m_n} P_i^n \text{ et } \sup_{1 \leq i \leq m_n} S(P_i^n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Soit

$$M_i^n = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in P_i^n\}$$

et

$$m_i^n = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in P_i^n\}.$$

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i^n - m_i^n)S(P_i^n) = 0$, alors f est intégrable sur D. L'application f est continue sur un pavé fermé $\Longrightarrow f$ uniformément continue sur ce pavé. Donc

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta_\epsilon > 0 : \forall\,(x,y)\,,(x',y') \in P \quad \|(x,y)-(x',y')\| < \delta_\epsilon \Longrightarrow |f(x,y)-f(x',y')| < \epsilon.$$

$$\begin{aligned}\sup_{1\le i\le m_n} S(P_i^n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad &\Longrightarrow \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad S(P_i^n) < \delta_\epsilon \\ &\Longrightarrow \quad M_i^n - m_i^n < \epsilon \text{ et } S(D_n) \leq S(D) + \epsilon\end{aligned}$$

par conséquent $\forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(M_i^n - m_i^n)S(P_i^n) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{n}\epsilon S(P_i^n) \\ &\leq \quad \epsilon S(D_n) \\ &\leq \quad \epsilon\,(S(D)+\epsilon) = \epsilon'.\end{aligned}$$

D'où la démonstration. ■

Remarque 6.3.1 *Même si f est continue par morceaux (i.e., discontinue en un nombre fini de points) le théorème reste vrai.*

Proposition 6.3.1 *1- Soit D et D' deux ensembles quarrables disjoints. Alors*

$$\int_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \int_{D'} f(x,y)dxdy + \int_{D''} f(x,y)dxdy.$$

2- Soit $f : D \longrightarrow R$ une application continue. On pose

$$M = \sup_D f(x,y) \text{ et } m = \inf_D f(x,y).$$

Alors, $mS(D) \leq \int_{D''} f(x,y)dxdy \leq MS(D)$.

3- Soit D un ensemble quarrable. On note par

$$\mathcal{R}(D) = \{f,\ \text{Riemann intégrable sur } D\}.$$

Alors, $\mathcal{R}(D)$ est un espace vectoriel de plus L'application $\varphi : \mathcal{R}(D) \longrightarrow R$

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathcal{R}(D) & \longrightarrow & R \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = \displaystyle\int_{D''} f(x,y)dxdy\end{array}$$

est linéaire et croissante.

4- Si f,g sont intégrables sur D, alors $\sup\{f,g\}$ *et* $\inf\{f,g\}$ *le sont aussi sur D* ($\Longrightarrow |f|$ *est intégrable et d'après 3* $\left|\int_{D''} f(x,y)dxdy\right| \leq \int_{D''} |f(x,y)|\, dxdy$.

5- Inégalité de Cauchy-Schwarz (C-S) : si f et g sont Riemann intégrables sur D quarrable, alors fg l'est aussi. De plus

$$(\int_{D''} fgdxdy)^2 \leq \int_{D''} f^2(x,y)dxdy \int_{D''} g^2(x,y)dxdy.$$

Preuve. Par example pour l'inéglité de Schwarz

$$\int_D fgdxdy = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{i=1}^{n} (fg)\,(x_i^n, y_i^n)S(P_i^n)$$

$$\begin{aligned}
\int_D fgdxdy &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{i=1}^{m_n} (fg)\,(x_i^n, y_i^n)S(P_i^n) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{i=1}^{m_n} f(x_i^n, y_i^n)\sqrt{S(P_i^n)}g(x_i^n, y_i^n)\sqrt{S(P_i^n)} \\
&\quad \text{(Inégalité de C-S pour les sommes finies)} \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{i=1}^{m_n} f^2(x_i^n, y_i^n)S(P_i^n) \sum_{i=1}^{m_n} g^2(x_i^n, y_i^n)S(P_i^n)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{D''} f^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{D''} g^2(x,y)dxdy\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité. ■

6.4 Calcul des intégrales doubles

Théorème 6.4.1 *(A admettre malgré sa simplicité).*

Soit $f : P = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{R}$*-intégrable sur P. On suppose que les fonctions*

$$\begin{array}{lcl} x \longmapsto f(x,y) & , & x \longmapsto \int_c^d f(x,y)dy, \\ y \longmapsto f(x,y) & et & y \longmapsto \int_a^b f(x,y)dx \end{array}$$

Théorème 6.4.2 *sont* $\mathcal{R}$*-intégrables. Alors,*

$$\int_P f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Remarque 6.4.1 ***1-*** *Le théorème de Fubini est très important pour calculer une intégrale double sur un pavé. Il lie les intégrales doubles aux intégrales simples. De plus, l'ordre n'intervient pas.*

2- Si f est continue ou continues par morceaux les quatres suppositions sont vraies. En général, on s'intéresse qu'à ces fonctions.

Corollaire 6.4.1 *Soit $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b$ et $g(x) \leq y \leq h(x)\}$ (g,h continues $\Longrightarrow D$ quarrable). Alors,*

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

dès que le terme de droite a un sens.

Preuve. On pose $c = \min\limits_{[a,b]} g(x)$ et $d = \max\limits_{[a,b]} h(x)$ ce qui donne $[g(x), h(x)] \subset [c,d]$ pour tout x dans $[a,b]$. On prend $P = [a,b] \times [c,d]$ et $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in P \setminus D. \end{cases}$ puis on applique le théorème de Fubini. ■

Remarque 6.4.2 ***1-*** *Si f est continue ou continue par morceauxsur D, le terme de droite a un sens.*

2- *Même raisonnement si*

$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d$ et $g(y) \leq x \leq h(y)$, g et h continues$\}$.

Exemple 6.4.1 *Calculer $\int_{[0,1]^2} \mathbf{e}^{x+y} dxdy$.*

Soit $D = \{(x,y) : y = x^2,\ x = 2 \text{ et } x = 1\}$.

Solution 6.4.1 *(i). Représenter D.*

(ii). Calculer $\int_D (x+y)\, dxdy$.

(1) On a d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} \mathbf{e}^{x+y} dxdy &= \int_{[0,1]} dx \int_{[0,1]} \mathbf{e}^{x+y} dxdy \\ &= \int_{[0,1]} dx \int_{[0,1]} \mathbf{e}^x \mathbf{e}^y dxdy \\ &= \int_{[0,1]} \mathbf{e}^x dx \int_{[0,1]} \mathbf{e}^y dxdy \\ &= \left(\int_{[0,1]} \mathbf{e}^x dx \right)^2 \\ &= (\mathbf{e} - 1)^2. \end{aligned}$$

Exemple 6.4.2 *2- $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2$ et $g(x) = 1 \leq y \leq x^2 = h(x)\}$.*

Solution 6.4.2 *En appliquant le corollaire précédent à f sur D, on aura*

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)dxdy &= \int_{[1,2]} dx \int_1^{x^2} (x+y)\, dy \\
&= \int_{[1,2]} \left[xy + \tfrac{y^2}{2}\right]_1^{x^2} dx \\
&= \int_{[1,2]} \left(x^3 + \tfrac{x^4}{2} - x - \tfrac{1}{2}\right) dx \\
&= \left[\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{x^5}{10} - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x}{2}\right]_1^2 \\
&= \tfrac{97}{20}.
\end{aligned}$$

6.5 Théorèmes de changements de variables

6.5.1 Rappels sur le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Commençons par la définition géomètrique.

Définition 6.5.1 *Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ pris dans cet ordre est le vecteur w déterminé de la manière suivante.*

- Sa direction est $\perp$ au plan formé par u et v.

- Son sens est tel que le sens de rotation autour de v ramenant u vers v, soit le sens direct de l'espace (sens du tir bouchon).

- Son module est l'aire du parallélogramme construit sur u et v.

Notation 6.5.1 *Le produit vectoriel (ou extérieur de u par v sera noté par $u \wedge v$ qui se lit u vectoriel u (ou u extérieur v).*

Les propriétés suivantes sont sont simples à vérifier.

- $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \sin\theta$.

- $\|u \wedge v\| = 0 \Longleftrightarrow u \| v$ ($u \wedge u = 0$ et $u \wedge 0 = 0 \wedge u = 0$).

- $u \wedge v = -v \wedge u$ (antisymmétrie).

- $a\,(u \wedge v) = au \wedge v = u \wedge av, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

- Le produit vectoriel est distributive par rapport à l'addition.

$$w \wedge (u+v) = w \wedge u + w \wedge v.$$

On peut voir la démonstration géométrique dans la littérature.

Maintenant nous allons déduire la forme analytique de la forme géométrique. Soient

$$u = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad v = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3.$$

$$\begin{aligned} u \wedge v &= x\mathbf{e}_1 \wedge v + y\mathbf{e}_2 \wedge v + z\mathbf{e}_3 \wedge v \\ &= (xy'\mathbf{e}_3 - xz'\mathbf{e}_2) + (-yx'\mathbf{e}_3 + yz'\mathbf{e}_1) + (zx'\mathbf{e}_2 - zy'\mathbf{e}_1) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

6.5.2 Différentielle d'une application linéaire

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \varphi(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \\ &= x\varphi(\mathbf{e}_1) + y\varphi(\mathbf{e}_2) \\ d\varphi(x,y) &= \frac{d\varphi}{dx}x + \frac{d\varphi}{dy}y \\ &= x\varphi(\mathbf{e}_1) + y\varphi(\mathbf{e}_2) \\ &= \varphi(x,y) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ que la différentielle de φ est elle même.

Exemple 6.5.1 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que*

$$\varphi(x,y) = (x+y, x-y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)).$$

Solution 6.5.1 *On pourra vérifier facilement que φ est linéaire. Calculons la différentielle.*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= J_\varphi(x,y) \text{ (=jacobien de } \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx} & \frac{d\varphi_1}{dy} \\ \frac{d\varphi_2}{dx} & \frac{d\varphi_2}{dy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ y-y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.5.3 Transformation d'un pavé P de $\mathbb{R}$ par une application linéaire bijective $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

On a $\varphi(\mathbf{e}_1)$ et $\varphi(\mathbf{e}_2) \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \varphi(\mathbf{e}_1) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$ et $\varphi(\mathbf{e}_2) = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2$. Donc $\varphi(\alpha\mathbf{e}_1) = \alpha\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha\alpha_2\mathbf{e}_2$ et $\varphi(\beta\mathbf{e}_2) = \beta\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta\beta_2\mathbf{e}_2$.

Remarque 6.5.1 ***1-*** *φ transforme un pavé en un parallélogramme (dilatation) aui est quarrable.*

2- *Cette transformation modifie la surface.*

Exprimant $S(\varphi(P))$ en fonction de $S(P)$.

$$\begin{aligned}
S(\varphi(P)) &= \|\alpha\varphi(\mathbf{e}_1) \wedge \beta\varphi(\mathbf{e}_2)\| \\
&= |\alpha\beta| \|\varphi(\mathbf{e}_1) \wedge \varphi(\mathbf{e}_2)\| \\
&= |\alpha\beta| \|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\| \\
&= |\alpha\beta| |\det J_\varphi| \\
&= S(P) |\det J_\varphi| .
\end{aligned}$$

En général si D est quarrable $\varphi(D)$ est pavable et $S(\varphi(D)) = S(D)|\det J_\varphi|$ pour tout φ linéaire et bijective. En effet, on sait que par définition ils existent deux suites (D_n) et (D'_n) pavables telles que $D'_n \subset D \subset D_n$. Donc $\varphi(D'_n) \subset \varphi(D) \subset \varphi(D_n)$

$$\begin{array}{llllll}
\Longrightarrow & \varphi\left(\coprod_{i=1}^{m'_n} P'^i_n\right) & \subset & \varphi(D) & \subset & \varphi\left(\coprod_{i=1}^{m_n} P^i_n\right) \\
\Longrightarrow & \coprod_{i=1}^{m'_n} \varphi\left(P'^i_n\right) & \subset & \varphi(D) & \subset & \coprod_{i=1}^{m_n} \varphi(P^i_n) \\
\Longrightarrow & S\left(\coprod_{i=1}^{m'_n} \varphi(P'^i_n)\right) & \subset & S(\varphi(D)) & \subset & S\left(\coprod_{i=1}^{m_n} \varphi(P^i_n)\right) \\
\Longrightarrow & \sum_{i=1}^{m'_n} S(\varphi(P'^i_n)) & \leq & S(\varphi(D)) & \leq & \sum_{i=1}^{m_n} S(\varphi(P^i_n)) \\
\Longrightarrow & \sum_{i=1}^{m'_n} |\det J_\varphi| S(P'^i_n) & \leq & S(\varphi(D)) & \leq & \sum_{i=1}^{m_n} |\det J_\varphi| S(P^i_n) \\
\Longrightarrow & |\det J_\varphi| S(D'_n) & \leq & S(\varphi(D)) & \leq & |\det J_\varphi| S(D_n)
\end{array}$$

et par conséquent $S(\varphi(D)) = |\det J_\varphi| S(D)$.

Remarque 6.5.2 *Si φ est affine bijective (i.e., dilatation + translation) les résultats restent les mêmes. En effet, $\varphi = \varphi_1 + (x_0, y_0)$ implique*

$$\begin{aligned} S(\varphi(D)) &= S(\varphi_1(D) + (x_0, y_0)) \\ &= S(\varphi_1(D)) \\ &= \left|\det J_{\varphi_1}\right| S(D) \\ &= \left|\det J_{\varphi}\right| S(D) \end{aligned}$$

Théorème 6.5.1 ***(Changement de variables par une application bijective)***

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble quarrable, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur D et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire bijective. Alors

$\varphi^{-1}(D)$ est quarrable et $f \circ \varphi$ est intégrable sur $\varphi^{-1}(D)$. De plus

$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(u,v) \left|\det J_{\varphi}\right| dudv$

$$\begin{array}{lllll} \varphi^{-1}(D) & & & & \\ \cap & & & & \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Calculer $\iint_D (x^2 - y^2) \cos xy dxdy$

avec

$D = \{(x,y) : 0 \leq x + y \leq 4,\ xy \geq 1 \text{ et } x \leq y\}.$

Solution 6.5.2

$$\begin{array}{lllll} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi \left|\det J_{\varphi}\right|.$

Calcul de $\varphi^{-1}(D)$.

$$\begin{array}{lllll} 0 \leq x + y \leq 4 & \Longleftrightarrow & 0 \leq u \leq 2. & & \\ xy \geq 1 & \Longleftrightarrow & u^2 - v^2 \geq 1 & \Longleftrightarrow & v^2 \leq u^2 - 1 \text{ et } u \geq 1. \\ x \leq y & \Longleftrightarrow & u + v \geq u - v & \Longleftrightarrow & v \geq 0. \end{array}$$

Ceci implique que $1 \leq u \leq 2$ et $0 \leq v \leq \sqrt{u^2 - 1}$.

$\varphi^{-1}(D) = \left\{(u,v) : 1 \leq u \leq 2 \text{ et } 0 \leq v \leq \sqrt{u^2 - 1}\right\}$, $J_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det J_{\varphi} = 2$.

$$\begin{array}{rl} & \iint_{\varphi^{-1}(D)} -4uv\cos\left(u^2-v^2\right)2dudv \\ = & 4\int_1^2 udu\int_0^{\sqrt{u^2-1}} -2v\cos\left(u^2-v^2\right)2dudv \text{ (Fubini)} \\ = & 4\int_1^2 udu\left[\sin\left(u^2-v^2\right)\right]_0^{\sqrt{u^2-1}} \\ = & 4\int_1^2\left(u\sin 1-u\sin u^2\right)du \\ = & 6\sin 1+2\cos 4-2\cos 1. \end{array}$$

Théorème 6.5.2 *(Cas général). Soit D un ensemble quarrable $\subset \mathcal{V}$ uovert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction intégragle sur D. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ un difféomorphisme (i.e., φ bijective et de classe $\mathcal{C}^1 \Longleftrightarrow \varphi^{-1}$ bijective et de classe $\mathcal{C}^1 \Longleftrightarrow \varphi$ bijective et $\det J_\varphi \neq 0$). Alors, $\varphi^{-1}(D)$ est quarrable et $f\circ\varphi$ est intégrable sur D. De plus, on a l'égalité*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f\circ\varphi(u,v)\left|\det J_\varphi\right| dudv.$$

Exemple 6.5.2 *Calculer $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ où $D=\left\{(x,y) : 1<x^2+y^2<9\right\}$.*

Solution 6.5.3 *On utilise le changement de variables en coordonnées polaires.*

$$\begin{array}{rlcl} D' = &]2,3[\times[0,2\pi[& \xrightarrow{\varphi} & D \\ & (r,\theta) & \longmapsto & \varphi(r,\theta)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

Il est clair que φ est une bijection de D' sur D.

$$\det J_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

$$\begin{array}{rl} & \iint_{\varphi^{-1}(D)=D'} f\circ\varphi(u,v)\left|\det J_\varphi\right| dudv \\ & \iint_{\varphi^{-1}(D)=D'} f\circ\varphi(r,\theta)\left|\det J_\varphi\right| drd\theta \\ = & \iint_{D'} r^2 drd\theta \\ = & \int_0^{2\pi} d\theta\int_2^3 r^2 dr \\ = & \frac{38}{3}\pi. \end{array}$$

Exemples 6.5.3 *Calculer $\iint_D \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$*

où

$D=\left\{(x,y) : x>0,\ y>0 \text{ et } x^2+y^2<1\right\}.$

Solution 6.5.4 $0<r<1$ *et* $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}.$

$\iint_D \mathbf{e}^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\mathbf{e}^{-r^2} drd\theta = \dfrac{\pi}{2\mathbf{e}}$.

Trouver $I = \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$ où $D = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$.

on pose $x = au$ et $y = bv$, donc $\det J_\varphi = ab$. $\varphi^{-1}(D) = \{(u,v) : u^2+v^2 < 1\}$.

$I = |ab| \iint_{\varphi^{-1}(D)=\text{cercle de rayon } 1} \left(a^2u^2 + b^2v^2\right) dudv$.

On fait un autre changement de variables en coordonnées polaires.

$0 < r < 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

$I = |ab| \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \left(a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta\right) d\theta dr = \dfrac{|ab|\,\pi}{4}\left(a^2+b^2\right)$.

On pourra faire un seul changement de variables appelé changement de variables en coordonnées elleptiques.

$\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ br\sin\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow \det J_\varphi = abr.$

Comme vous auriez pu constater que parfois dans certains exercices (exemples) on peut appliquer facilement le théorème de Fubini mais la fonction réelle n'admet pas de primitives simples et à ce moment là le théorème de changement de variables est nécéssiare.

6.6 Intégrales triples

Ayant défini dans $\mathbb{R}^3$ la notion de pavé, pavable et quarrable ; on pourra définir d'une manière analogue la notion d'intégrale de Riemann dans l'espace (pavé = rectangle dans $\mathbb{R}^2$, pavé = parallélipipède dans $\mathbb{R}^3$).

Définition 6.6.1 *Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'un quarrable borné de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sum\limits_{i=1}^{m_n} f(x_i^n, y_i^n, z_i^n) vol(V_i^n)$, existe on dira que f est Riemann intégrable sur V et on la note par $\int_V f$ ou $\displaystyle\iiint_V f$.*

$V_n = \coprod\limits_{i=1}^{m_n} V_i^n$, $vol(V_n) \longrightarrow vol(V)$, (x_i^n, y_i^n, z_i^n) un point quelconque de V_i^n et $\sup\limits_i vol(V_i^n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

6.7 Calcul des intégrales triples

6.7.1 Formule de Fubini

1. Soit $V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D$ quarrable dans $\mathbb{R}^2$ et $g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$. Alors, si f est $\mathcal{R}$-intégrable sur V on aura

$$\iiint_V f = \iint_D dxdy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad \text{FIG } (1)$$

(2) Si f est comme dans la FIG (2) on aura

$$\iiint_V f = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

Cas particulier : si $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ un pavé, c'est comme dans les intégrales doubles.

Remarque 6.7.1 *La formule de Fubini exprime le lien entre intégrales doubles et triples.*

Exemples 6.7.1 *Soit* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < x$ *et* $0 < z < xy\}$.

Calculez $\iiint_V xyzdxdydz$.

Solution 6.7.1 *En appliquant la formule de Fubini (i), on trouve*

$$\iiint_V xyzdxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{xy} xyzdz$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_V xyzdxdydz &= \tfrac{1}{2} \iint_D (xy)^3 \, dxdy \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x (xy)^3 \, dy \\ &= \tfrac{1}{64}. \end{aligned}$$

Exemple 6.7.2 *Soit* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, 0 < y, 0 < y$ *et* $x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Solution 6.7.2 *Calculez* $\int_V f$, *où* $f = x(y+z)$.

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_0^1 dz \int_{D_z} x(y+z) \, dxdy \\ &= \int_0^1 dz \int_{C(0,\sqrt{1-z^2})} x(y+z) \, dxdy \end{aligned}.$$

Puis on fait un chagement de variables en coordonnées polaires.

6.7.2 Changement de variables

Théorème 6.7.1 *(Admis). Soit U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et φ un difféomrphisme de U_1 dans U_2. Soit $V \subset U_2$ quarrable. Alors $\varphi^{-1}(V)$ est quarrable. De plus*

$$\int_V f = \iint_{\varphi^{-1}(V)} f \circ \varphi(u,v,w) \left|\det J_\varphi\right| dudvdw.$$

Exemple 6.7.3 ***(Coordonnées cylindriques)***

$$\begin{array}{lcl}]0,\infty[\times [0,2\pi[\times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{array}$$

$\det J_\varphi = rdrd\theta dz.$

Exemple 6.7.4 ***(Coordonnées sphériques)***

$$\begin{array}{lcl}]0,\infty[\times [0,2\pi[\times [0,\pi[& \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\beta) & \longmapsto & (x,y,z) = (r\cos\beta\cos\theta, r\cos\beta\sin\theta, r\sin\beta) \end{array}$$

$\det J_\varphi = r^2 \sin\beta drd\theta d\beta.$

Calculer $\int_{\{x^2+y^2+z^2\leq 4\}} \sin\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz.$

On fait un changement de variables en coordonnées sphériques.

$0 < r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < \pi.$

$$\begin{array}{rcl} \int f & = & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \sin r^3 \sin\beta drd\theta d\beta \\ & = & 2\pi \left[\frac{1}{3}\cos r^3\right]_0^2 \left[\cos\beta\right]_0^\pi 2\pi \\ & = & 4\left[1 - \frac{1}{3}\cos 8\right]. \end{array}$$

Soit $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 \text{ et } x^2+y^2 \leq z^2\right\}.$

Calculet $Vol(V)$.

En coordonnées cylindriques $Vol(V) = \int_0^1 \int_0^z \int_0^{2\pi} rdrd\theta dz = \frac{2\pi}{3}.$

6.7.3 Exercices

Exercice 6.7.1 *Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = y^2/4$ et $y = 2x$.*

1− *Déterminer les points d'intersection de ces deux courbes.*

2− *Dessiner le domaine D.*

3− *Calculer l'aire de D.*

4− *Calculer l'intégrale double*

$$\iint_D (y-x)dxdy.$$

Exercice 6.7.2 *Pour chacun des domaines suivants, calculer l'intégrale double*

$$I_i = \iint_{D_i} x^2 y dxdy.$$

1− D_1 *est le triangle :* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. *Sol.* $1/60$.

2− D_2 *est le triangle :* $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$. *Sol.* $97/60$.

3− D_3 *est le demi disque* $y > 0$ *et* $x^2 + y^2 < 1$.

4− D_4 *est le disque de centre* $(0,1)$ *et de rayon* 2.

Exercice 6.7.3 *Soit* D *le triangle :* $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$. *Calculer*

$$\iint_D x dxdy.$$

Exercice 6.7.4 *Soit* $a > 0$. *Montrer que*

$$\int_0^a \left(\int_0^x f(x,y)dy\right) dx = \int_0^a \left(\int_y^a f(x,y)dx\right) dy.$$

Exercice 6.7.5 *Soit* D *le disque de centre* O *et de rayon* a. *Calculer*

$$\iint_D \frac{1}{a^2 + x^2 + y^2} dxdy.$$

(*Sol.* $\pi \ln 2$).

Exercice 6.7.6 *Soit* D *le domaine défini par les inégalités*

$$0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \ \textit{et} \ x^2 + y^2 \geq 1.$$

Représenter D *puis calculer*

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

(*Sol.* $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\pi$, *découper l'intégrale sur le disque et le carré*).

Exercice 6.7.7 *Représenter et calculer l'aire du domaine*

$$D = \left\{(x;y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2,\ 3 \leq xy \leq 5\right\}.$$

(*On pourra utiliser le changement de variable* $u = \dfrac{y}{x}$ *et* $v = xy$. *Sol.* $\ln 2$).

Exercice 6.7.8 *En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer*

$$\iiint_D (5 - \sqrt{x^2+y^2})dxdydz$$

où D *est le domaine de* $\mathbb{R}^3$ *borné par le paraboloïde* $z = 25 - x^2 - y^2$ *et le plan* $z = 9$.

Exercice 6.7.9 *Soit le demi disque ouvert*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, (x-1)^2 + y^2 < 1\right\}.$$

1− *Calculer les intégrales doubles*

$$\iint_D dxdy \ \ et \ \iint_D (x-1)\,dxdy.$$

2− *On pose* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ *et on considère l'application* $\varphi : U \longrightarrow U$ *définie par* $\varphi(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}(x,-y)$. *Vérifier que* $\varphi \circ \varphi = Id$. *En déduire que* φ *est une bijection de* U *sur* U. (*on pose* $(s,t) = \varphi(x,y)$ *et on aura* $(s^2+t^2) = (x^2+y^2)^{-2}(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^{-1}$. *Ensuite* $\varphi(\varphi(x,y)) = \varphi(s,t) = (x,y)$).

3− *Montrer que* φ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U.

4− *Calculer le jacobien de* φ *et le déterminant du jacobien de* φ *en tout point* $(x,y) \in U$.

$$((J_\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}).$$

5− *Au moyen d'un changement de variable convenable et en utilisant les résultats de la question* 1, *calculer l'intégrale double*

$$\iint_E \frac{s}{(s^2+t^2)^3} dsdt$$

où

$$E = \left\{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 : s > \frac{1}{2}, \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + t^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

(*On utilise simplement le changement de variable* $(s,t) = \varphi(x,y)$).

Deuxième partie

Algèbre 2

Chapitre 7

Matrices. Valeurs et vecteurs propres

Chapitre 8

Matrices

Exercice 8.0.10 *Soit* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $g = (g_1, g_2, g_3)$ *une autre base de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & (1,1,0) \\ g_2 & = & (0,1,1) \\ g_3 & = & (1,0,1) \end{array}$$

1− *Trouver la matrice de passage* P *de* e *à* g $(g = Pe)$.

2− *Trouver la matrice de passage* R *de* g *à* e $(e = Rg)$.

3− *Vérifier que* $RP = I_3$.

Exercice 8.0.11 *On considère l'application* u *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (5x-4y, x) \end{array}$$

1− *Montrer que* u *est linéaire et écrire la matrice* A *de* u *dans la base canonique.*

2− *Quelle est la matrice* B *de* u *dans la base* $\{(1,1),(4,1)\}$ *?*

3− *En utilisant la formule du changement de bases, calculer* A^n $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 8.0.12 *Soient* f *et* g *les endomorphismes de* $\mathbb{R}^4$ *de matrices respectives dans la base canonique*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1− *f est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

2− *Que valent* $\dim \mathbf{Im}(f)$ *et* $\dim \mathbf{Ker}(f)$ *?*

3− *Mêmes questions pour g.*

Chapitre 9

Valeurs propres et vecteurs propres. Diagonalisation d'une matrice

Exercice 9.0.13 *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x,y) = (-y,x)$. Cet endomorphisme possède-t-il des valeurs propres ?*

Exercice 9.0.14 *Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.0.15 *On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est égale à*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base orthonormée (g_1, g_2, g_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.

La matrice M est-elle diagonalisable ?

(*La matrice M est réelle symmétrique, donc elle est diagonalisable*).

Trouver la matrice diagonale associée à M.

Même question avec

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.0.16 *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

1− *Quels sont les valeurs propres de A ?*

2− *L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?*

Exercice 9.0.17 *Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.0.18 1− *Calculer* $\det M$*.*

2− *Déterminer le rang de M.*

3− *Quelle est la dimension de* $\mathbf{Ker}(u)$ *? En déterminer une base.*

4− *Calculer les valeurs propres de M et préciser leur ordre de multiplicité.*

5− *Montrer que M est diagonalisable.*

6− *En utilisant une matrice diagonale D semblable à M, calculer pour tout $n \geq 1$, M^n en fonction de M.*

Exercice 9.0.19 *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 9.0.20 1− *Quels sont les valeurs propres de M ?*

2− *La matrice M est-elle diagonalisable ?*

3− *Regardons maintenant la matrice M comme un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Quels sont les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$? Vérifier que la matrice M est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Calculer D^3. En déduire M^3.*

Exercice 9.0.21 *Diagonaliser*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Même question

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} P = & 5 & 1 \\ & -4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{matrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right),$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} P = & 3 & 1 \\ & -8 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{matrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} (P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} (P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{i} & -\mathbf{i} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1+\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 10

Déterminants

Exercice 10.0.22 *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{i} & -1 & -\mathbf{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathbf{i} & -1 & \mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.0.23 *Inverses de matrices (s'il y a lieu).*

1− $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2− $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.0.24 *Soit*

$$\triangle(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ 4 & 9 & x & x^2 \\ -1 & -1 & x & -1 \\ 2 & 3 & x & x \end{vmatrix}.$$

Vérifier que $\triangle(x)$ est un polynôme. De quel degré est-il ? Quel est son coéfficient dominant ? Trouver des racines évidentes de $\triangle(x)$. En déduire $\triangle(x)$.

Exercice 10.0.25 *Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles puis calculer leur inverse*

1− *En résolvant le système $A{\cdot}X = Y$ où X est une matrice colonne.*

2− *En calculant la matrice des cofacteurs de ${}^tA$.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \left(j = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3− *Que faut-il en conclure ?*

Exercice 10.0.26 *Calculer le produit des deux matrices*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En déduire la valeur de $\det A_1$.

Exercice 10.0.27 *Soient a, b deux paramètres rèels.*

1− *Calculer le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & b & -b \\ -b & a & -b & b \\ b & -b & a & -b \\ -b & b & -b & a \end{pmatrix}.$$

(*Suggestion : commencer par additionner les lignes de ce déterminant*).

2− *Pour quelles valeurs de a et de b la matrice A est-elle inversible ?*

3− *Donner, suivant les valeurs de a et de b, le rang de A.*

Chapitre 11

Systèmes d'équations

Exercice 11.0.28 *Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.*

1− *Par la méthode du pivot de Gauss.*

2− *Par la méthode des déterminants.*

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & t & = & 2 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 4 \end{array} \right.$$

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 5 \\ x & + & 3y & + & 5z & + & 7t & = & 11 \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2z & + & 5t & = & 7 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccr} x & + & y & + & 2z & - & 5t & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & - & 9t & = & -3 \\ 2x & + & y & - & z & + & 3t & = & -11 \\ x & - & 3y & + & z & + & 7t & = & -5 \end{array} \right.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 11.0.29 *Résoudre les systèmes suivants*

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 3y & + & z & = & -5 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 4y & + & 3z & = & 9 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 11.0.30 *On considère le système*

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & (m+1)\,y & & & + & 2mt & = & a \\ mx & & & + & z & + & t & = & b \\ (2m+1)\,x & & y & + & (m+1)\,z & + & t & = & c \\ & & & & (m+1)\,z & + & (m+1)\,t & = & d \end{array}\right.$$

où a, b, c, d et m sont des paramètres réels.

Déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système admet une solution unique.

Chapitre 12

Diagonalisation d'une matrice

Chapitre 13

Déterminants

Chapitre 14

Systèmes d'équations