Université de M'sila
Tronc-commun sciences de la matière
Faculté des sciences
Année 2021/2022

TD Math2 Semèstre2

Ce TD est rédigé et organisé par les enseignants:

1) Tiaiba Abdelmoumen: **Maitre de conférence classe A en Mathématique (Université de M'sila).**

2) Serguine Houria: **Maitre assistant classe A en Mathématique (Université de M'sila).**

Université de M'sila
Tronc-commun sciences de la matière
Faculté des sciences
Année 2021/2022
Module Math2 semestre 2

Série N 1   Intégrales simples.

EX01 Calculer les intégrales suivantes: $(1) = \int (e^x)^{n+1}\, dx,\ (2) = \int \cos x \sin x dx,$

$$(3) = \int \frac{x}{1+x^2} dx,\ (4) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln(x))^2}}\ ,\ (5) = \int e^x \sinh(e^x)\, dx.$$

EX02 Calculer les intégrales suivantes: $(1) = \int \arcsin(x)\, dx, (2) = \int \sqrt{1+x^2 dx},$

$$(3) = \int x^n \ln(x)\, dx,\ (4) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}} dx,\ (5) = \int \frac{\sin x}{2+(\cos x)^2} dx,$$

$$(6) = \int tg(x)\, dx.$$

EX03

I) On considère $\mathbf{I}_1 = \int_0^{\pi} (x\cos(x))^2\, dx$ et $\mathbf{I}_2 = \int_0^{\pi} (x\sin(x))^2\, dx$

1- Calculer $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ et $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$.
2- En déduire $\mathbf{I}_1$ et $\mathbf{I}_2$.

II) On considère $\mathbf{J} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)\cos(qx)\, dx$ et $\mathbf{K} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\sin(qx)\, dx$

1- Calculer $\mathbf{J} + \mathbf{K}$ et $\mathbf{J} - \mathbf{k}$.
2- Endéduire $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$.

Indication: $\cos(px)\cos(qx) \pm \sin(px)\sin(qx) = \cos\left(\left(p \mp q\right) x\right)$

EX04

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Déterminer l'ensembles des points de définition de $f\ \ (D_f)$.

b) Calculer la surface $S(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)\, dx\ \ /\ \ \alpha\rangle 0$. Puis calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$.

2) Calculer l'intégrale suivante: $L = \displaystyle\int \frac{\sinh(x)}{\left(1+(\cosh(x))^2\right)(1+\cosh(x))}dx$

(posons $t = \cos(x)$).

.

EX05

1) En utilisant la décomposition des fractions rationnelles, calculer les intégrales suivantes:

$$M = \int \frac{1}{1-x^2}dx,\ \ H = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(1+x^2)}dx,\ \ W = \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}dx.$$

2) Calculer les intégrales suivantes:

$$R = \int \frac{1}{4+(5\sin(x))}dx,\ \ T = \int \frac{(\sin(x))^3}{(\cos(x))^4}dx$$

EX06 (*Devoir*) Calculer les intégrales suivantes:

$$K = \int \frac{\sin(x)}{\left(1+\cos(x)^2\right)}dx \text{ et } L = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})}dx.$$

EX07 (*Devoir*) Soient les intégrales suivantes:

$$I = \int \frac{t^2}{(1+t^2)}dt \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sqrt{1-t^2}dt.$$

1) Calculer I et J.

2) Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)(1+\cos^2 x)}dx \qquad (\ \textit{indication : poser } t = \cos x\ )$$

3) Calculer les intégrales suivantes:

$$I(x) = \int \frac{\mathbf{e}^{2x}}{(1+e^x)^2}dx \text{ et } J(x) = \int \ln\left(1+x^2\right)dx.$$

Solution des exercices de la série N1

EX01

Calcul des intégrales:

$(1) = \int (e^x)^{n+1}\, dx = \int e^x (e^x)^n\, dx = \dfrac{(e^x)^{n+1}}{n+1} + C.$

$(2) = \int \cos x \sin x dx = \int \sin x (\sin x)'\, dx = \dfrac{1}{2} (\sin x)^2 + C.$

$(3) = \int \dfrac{x}{1+x^2} dx = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{2x}{1+x^2} dx = \dfrac{1}{2} \ln \left(1+x^2\right) + C.$

$(4) = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx$ cette intégrale est de type $\displaystyle\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$, alors $(4) = \arcsin(\ln x) + C.$

$(5) = \int e^x \sinh(e^x)\, dx$ cette intégrale est de type $\int f' \sinh f = \cosh f + C$, alors $(5) = \cosh(e^x) + C.$

EX02

Calcul des intégrales (1), (2) et (3) en utilisant l'intégration par partie:

$(1) = \int \arcsin x dx$

On pose $f(x) = \arcsin x$ et $g'(x) = 1$, alors

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g(x) = x$ et on a $(1) = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$, alors

$(1) = x \arcsin x - \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$ et donc

$(1) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$(2) = \sqrt{1+x^2} dx$, on coisit $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $g'(x) = 1$, alors

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $g(x) = x$, ce que donne

$(2) = x\sqrt{1+x^2} - \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$, ce que implique

$2(2) = x\sqrt{1+x^2} + \arg\sinh x + C$, alors

$(2) = \dfrac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \arg\sinh x + C \right].$

$(3) = \int x^n \ln(x)\, dx. \quad f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

et $g'(x) = \ln x \Longrightarrow g(x) = x \ln x - x$

$(3) = x^n [x \ln x - x] - n \int x^{n-1} (x \ln x - x)\, dx$, alors

$(3) = \dfrac{1}{n+1} \left[x^n [x \ln x - x] + \dfrac{n}{n+1} x^{n+1} + C \right].$

Calcul des intégrales (4), (5) et (6) par autres méthodes:

$(4) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx = \int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$

$= \sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2}}dx$, alors

$(4) = \sqrt{x^2+x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + C.$

$(5) = \int \frac{\sin x}{2+(\cos x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-\sin x}{1+\frac{1}{2}(\cos x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-\sin x}{1+\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{-\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$, alors $(5) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

$(6) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln(\cos x) + C.$

EX03

I)

1) Calcul $I_1 + I_2$ et $I_1 - I_2$:

$$I_1 + I_2 = \int_0^\pi x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} \tag{1}$$

On calcule $I_1 - I_2$ par l'intégration par partie deux fois, on trouve:

$$I_1 - I_2 = \int_0^\pi x^2\cos(2x)\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

2) D'après (1) et (2), on déduit que:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

II) Devoir

EX04

1) Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) L'ensemble de définition de f et $D_f = \mathbb{R}$.

b) Calcule de la surface

$$S(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-\alpha}^{+\alpha} = \arctan \alpha - \arctan(-\alpha),$$

alors

$S(\alpha) = 2\arctan \alpha$, et $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow +\infty} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \longrightarrow +\infty} (2\arctan \alpha) = \pi$.

2) On a $L = \displaystyle\int \frac{\sinh x}{\left(1+(\cosh x)^2\right)(1+\cosh x)} dx$

On pose $t = \cosh x \Longrightarrow dt = \sinh x dx$ ce que implique $L = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}$.

On utilise la décomposition en fractions simples:

$\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t)} = \dfrac{At+B}{1+t^2} + \dfrac{C}{1+t}$, après des calculs simples on trouve $A = -\dfrac{1}{2}$ et $B = C = \dfrac{1}{2}$

$L = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{t-1}{1+t^2} dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t}$

$= -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} dt$, alors:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\ln t + C \\ &= -\frac{1}{4}\ln\left(1+(\cosh x)^2\right) + \frac{1}{2}\arctan(\cosh x) + \frac{1}{2}\ln(\cosh x) + C. \end{aligned}$$

EX05

1) En utilisant la décomposition à des fractions rationnelles simples, on calcule les intégrales suivantes:

$M = \displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \int \frac{A}{1-x} dx + \int \frac{B}{1+x} dx$

On cherche A et B, on trouve:

$M = A\ln(1-x) + B\ln(1+x)\, C$.

$H = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + C.$

$W = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \int \frac{1}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x-\frac{1}{2}} dx.$

$$= A\ln(x-1) + B\ln\left(x-\frac{1}{2}\right) + C.$$

2) On calcule les intégrales R et T en utilisant le changement de variables suivant:

On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow x = 2\arctan t$, alors

$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

$$R = \int \frac{1}{4+5\sin x}dx = \int \frac{1}{4+5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t^2+5t+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{A}{t+\frac{1}{2}}dt + \int \frac{B}{t+2}dt\right].$$

De meme on calcule l'intégrale T.

Université de M'sila
Tronc-commun sciences de la matière
Faculté des sciences
Année 2021/2022
Module Math2 semestre 2

Série N 2 Equations différentielles.

EX01 Intégrez les équations suivantes: (1) $xy' = (x+1)\,y$, (2) $x = \left(y^2+1\right) y'$, (3) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. (4) $y' = -\dfrac{x+y}{x}$ (5) $y' + \dfrac{y}{1+x^2} = x$. (6) $\left(1-x^2\right)\ y' + xy = 2x$ (7) $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$ (8) $y' - y = e^{-x}\sqrt{y}\,(1)$

EX02 (Devoir) intégrez les équations suivantes: (1) $(1+e^x)\,yy' = e^x$, (2) $\tan x\,(\sin x)^2\,dx + (\cos x)^2 \cot an\,(y)\,dy = 0$, (3) $(x-y)\ ydx - x^2dy = 0$. (4) $\left(x^2+y^2\right)\ dx - 2xydy = 0$ (5) $\left(1+x^2\right) y' = y^2 + 4$. (6) $(\tan x)\ y' = y$ (7) $2xyy' - y^2 + x = 0$. (8) $\dfrac{e^y}{e^y+1} y' = \dfrac{1}{x}$

EX03 Trouver les solutions des équations suivantes et trouve les solutions qui vérifiant les conditions données: (1) $xy' + y - e^x = 0$ avec $y\,(0) = b$, (2) $y' + -\dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x$ avec $y\,(0) = 0$.

EX04 (Devoir)Trouver les solutions des équations suivantes et trouve les solutions qui vérifiant les conditions données (1) $y' + -y\tan x = \frac{1}{\cos x}$ avec $y\,(0) = 0$.

EX05 Résoudre les équations différentielles suivantes: (1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. (2) $y'' + 2y' + y = 0$.

(3) $y'' - 9y = 0$..

EX06 Résoudre les équations différentielles suivantes: (1) $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$. (2) $y'' + 2y' + y = 1 + x$.

(3) $y'' - 9y = \cos x$.

EX07 (*Devoir*) Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

EX08 (*Devoir*) Intégrer les équations différentielles suivantes

1. $y' - \dfrac{3}{x}y = 2x$.

2. $\left\{ \begin{array}{rcr} y'\left(1-x^2\right)-xy & = & 2x, \\ y(0) & = & 0. \end{array} \right.$

3. $y'' = x\left(y'\right)^2$ (poser $z = y'$ puis Bernoulli).

4. $\left\{ \begin{array}{rcr} y' - \mathbf{e}^{y-x} & = & 1, \\ y(0) & = & -1. \end{array} \right.$

(Indication: poser $z = \mathbf{e}^{y-x}$).

5. $\left\{ \begin{array}{rcr} y' & = & \mathbf{e}^{y+x}, \\ y(0) & = & 2. \end{array} \right.$

(L'unique solution de l'équation est la fonction $y(x) = \ln\left(1+e^2-e^x\right)$ définie sur $\left]-\infty, \ln\left(1+e^2\right)\right[$).

EX09 (*Devoir*) Intégrer les équations suivantes

$$\begin{array}{lcl} y'+y & = & x^2 \\ y'-y\cos x & = & \sin 2x \\ \sin x dy & = & y dx \\ \left(1-x^2\right)y'+xy & = & 2x \end{array}$$

EX10 (*Devoir*)Intégrer les équations différentielles du second ordre

1. $y''-y'-2y=0.$

2. $\left\{ \begin{array}{rcr} y''-5y'+4y & = & \mathbf{e}^x, \\ y(0)=y'(0) & = & 0. \end{array} \right.$

3. $\left\{ \begin{array}{rcr} y''+6y'+10y & = & -10x^2+\dfrac{6}{5}, \\ y(0)=-y'(0) & = & -\dfrac{1}{5}. \end{array} \right.$

Solution des exercices de la série N2

EX01

1) L'équation suivante

$$xy^{'} = (x+1)\,y \tag{1}$$

est une équation différentielle d'ordre1 à variables séparables (e.d.d1 à v.s)

on va séparer les variables:

$$\frac{y^{'}}{y} = \frac{x+1}{x}$$

tel que $y^{'} = \dfrac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+1}{x}dx$$

Par intégration

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

Ce qui imlique

$$\ln y = x + \ln x + C$$

Alors la solution est

$$y = Kx \exp x \qquad \text{tel que } K = \exp C$$

2) De meme on résoud l'équation

$$x = \left(y^2 + 1\right) y^{'} \tag{2}$$

On trouve

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}y^3 + 2y + K} \qquad \text{tel que } K = 2C$$

3) L'équation suivante

$$y^{'} = \frac{x+y}{x-y} \tag{3}$$

est une équation différentielle d'ordre 1 homogène

C'est à dire on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

L'équation (3) imlique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \tag{3'}$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= \frac{y}{x} \Longrightarrow y = tx \\ &\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}x + t \end{aligned}$$

Par substitution dans $\left(3'\right)$

$$\frac{dt}{dx}x + t = \frac{1+t}{1-t}$$

Après des calculs simples on trouve

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-t}{1+t^2}dt$$

On integre

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt$$

On trouve

$$\ln x = \arctan t - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + C \qquad \text{et } t = \frac{y}{x}$$

Alors

$$x = K\exp\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right) \quad \text{tel que } K = \exp C$$

4) De meme on integre l'équation

$$y' = -\frac{x+y}{x} \tag{4}$$

On trouve

$$y = \frac{K}{2x} - \frac{x}{2} \quad \text{tel que } K = e^C$$

5) On résoud maintenant l'équation

$$\left(1-x^2\right)y' + xy = 2x \tag{5}$$

Une équation différentielle d'ordre1 linéaire; on cherche premièrement la solution générale y_G puis la solution particulière y_p et la solution globale est la somme $y_G + y_p$

a) **Solution générale (solution sans second membre)**

$$\left(1-x^2\right)y^{'}+xy=0$$

i.e

$$\frac{y'}{y}=-\frac{x}{1-x^2}$$

Par intégration on trouve

$$y_G=K\sqrt{1-x^2} \quad \text{tel que } K=e^C$$

b) **Solution particulière (solution avec second membre)**

On utilise la méthode de variation de constante

i.e

$$\begin{aligned} y_p &= K(x)\sqrt{1-x^2} \\ \text{qui donne} \quad y_p^{'} &= K'(x)\sqrt{1-x^2}-K(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

On substitue y_p et $y_p^{'}$ dans l'équation (6) on trouve

$$K^{'}(x)=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{par intégration} \quad K(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+A$$

Alors

$$y_p=2+A\sqrt{1-x^2}$$

Finalement

$$y=y_G+y_p=2+(K+A)\sqrt{1-x^2}$$

6) De meme méthde on résoud l'équation (6) $y^{'}+\dfrac{y}{1+x^2}=x$

7) On résoud l'équation

$$y^{'}+\frac{y}{x}=-xy^2 \tag{7}$$

Une équation différentielle d'ordre1 de Bernoulli avec $\alpha = 2$

On pose $z = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Longrightarrow y = \frac{1}{z}$

$$\Longrightarrow y' = -\frac{1}{z^2}z'$$

on remplace les valeurs y et y' dans (7), on obtient

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{x}\frac{1}{z} = -x\frac{1}{z^2}$$

i.e

$$z' - \frac{1}{x}z = x\ . \quad \text{on est dans le cas linéaire}$$

On résoud cette équation on trouve $z_G = Kx$ et $z_p = (x + A)\, x$. ce qui donne $z = z_G + z_p = x^2 + (A + K)\, x$.

On sait que $y = \frac{1}{z}$ alors $y = \dfrac{1}{x^2 + (A + K)\, x}$

8) L'équation suivante

$$y' - y = e^{-x}\sqrt{y} \tag{8}$$

est une équation de Bernoulli avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on la résoud comme la méthode dans l'équation (7)

$z = \sqrt{y} \Longrightarrow y = z^2$ et $y' = 2zz'$ et l'équation (8) équivalente à l'équation $2z' - z = e^{-x}$, cette équation est linéaire; on la résoud comme dans l'équation (6), on trouve $z = (K + A)\, e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}e^{-x}$

et comme $y = z^2$ alors la solution est $y = \left[(K + A)\, e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}e^{-x}\right]^2$

EX02 (Devoir)

EX03

1) Résolution de l'équation

$$xy' + y - e^x = 0 \text{ avec } y(a) = b \tag{1}$$

Cette équation est d'ordre1 linéaire avec une condition $y(a) = b$

Alors on résoud l'équation $xy' + y = e^x$

La solution générale (sans second membre) est $y_G = \frac{K}{x}$ et la solution particulière $y_p = \dfrac{e^x + A}{x}$

On utilise la condition $y(a) = b$ pour trouver la constante A dans y_p

On remplace x par a et y_p par b dans l'expression $y_p = \dfrac{e^x + A}{x}$, on trouve $b = \dfrac{e^a + A}{a}$; alors $A = ab - e^a$

Ce qui donne $y_p = \dfrac{e^x - e^a + ab}{x}$
Finalement $y = y_G + y_p = \dfrac{e^x - e^a + K + ab}{x}$

2) De meme on eésoud de l'équation

$$y^{'} - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x \quad \text{avec } y(0) = 0 \tag{2}$$

EX04 (Devoir)

EX05

Toutes les équations dans cet exercice sont des équations différentielles d'ordre2 linéaire sans second membre à coefficients constants.

1) Soit l'équation suivante

$$y^{''} - 5y^{'} + 6y = 0 \tag{1}$$

On procède la méthode de résolution comme suit
Supposons que la solution générale de l'équation (1) est sous la forme $y = ke^{rx}$, alors $y^{'} = kre^{rx}$ et $y^{''} = kr^2e^{rx}$
On remplace y, $y^{'}$ et $y^{''}$ dans (1)

$$ke^{rx}\left(r^2 - 5r + 6\right) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{r^2 - 5r + 6 = 0}_{\text{équation caractéristique } (1^*)}$$

(1*) admet deux solutions réelles $r_1 = 3$ et $r_2 = 2$
Alors

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \\ &= C_1e^{3x} + C_2e^{2x} \end{aligned}$$

2) On résoud l'équation

$$y^{''} + 2y^{'} + y = 0 \tag{2}$$

On procède la meme méthode de résolution que dans l'équation (1), et l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$.
Cette équation admet une solution double $r = -1$
Alors la solution est

$$\begin{aligned} y &= e^{rx}\left(C_1x + C_2\right) \\ &= e^{-x}\left(C_1x + C_2\right) \end{aligned}$$

3) On résoud l'équation

$$y^{''} + 9y = 0 \tag{3}$$

qui a comme équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$
Cette équation admet deux solutions complexes $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$
Alors la solution est

$$y = C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix}$$

EX06

Toute les équations dans cet exercice sont des équations différentielles d'ordre2 linéaire complète à coefficients constants.

1) Soit l'équation suivante

$$y^{''} - 5y^{'} + 6y = e^{-x} \tag{1}$$

On résoud cette équation comme suit

$$\underbrace{y_G}_{\text{S. générale de (1)}} = \underbrace{y}_{\text{S. générale de (1) sans 2ème membre}} + \underbrace{y_0}_{\text{S. particulière de (1)}}$$

D'après l'EX05 l'équation (1), la solution générale sans second membre est

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

On utilise la méthode de variation des constants comme suit
On cherche $y_G = C_1(x)\, e^{3x} + C_2(x)\, e^{2x}$ la solution générale de (1) (solution avec second membre)
On résoud le système d'équations suivants avec les inconus $C_1^{'}(x)$ et $C_2^{'}(x)$
$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{'}(x)\, e^{3x} + C_2^{'}(x)\, e^{2x} = 0 \\ 3C_1^{'}(x)\, e^{3x} + 2C_2^{'}(x)\, e^{2x} = e^{-x} \end{array} \right.$ on trouve
$C_2^{'}(x) = -e^{-3x}$ alors $C_2(x) = \dfrac{1}{3}e^{-3x} + K_2$ et $C_1^{'}(x) = e^{-4x}$ alors $C_1(x) = -\dfrac{1}{4}e^{-4x} + K_1$
Ce qui donne

$$y_G = K_1 e^{3x} + K_2 e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-x} \quad \text{avec } y_0 = \frac{1}{12}e^{-x} \text{ est une solution particulière de (1)}$$

2) Soit l'équation

$$y^{''} + 2y^{'} + y = 1 + x \tag{2}$$

D'après l'EX05 l'équation (2), la solution générale sans second membre est

$$y = e^{-x}(C_1 x + C_2)$$

On procède la meme méthode de résolution comme l'équation (1) de cet exercice et on cherche

$$\begin{aligned} y_G &= e^{-x}\left(C_1(x)\,x + C_2(x)\right) \\ &= C_1(x)\,xe^{-x} + C_2(x)\,e^{-x} \end{aligned}$$

On résoud le système suivant
$\begin{cases} C_1'(x)\,xe^{-x} + C_2'(x)\,e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)\,e^{-x} - C_1'(x)\,xe^{-x} - C_2'(x)\,e^{-x} = 1 + x \end{cases}$
On trouve

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= (1+x)\,e^{x} \Longrightarrow C_1(x) = xe^{x} + K_1 \\ C_2'(x) &= \left(x^2 + x\right)e^{x} \Longrightarrow C_2(x) = \left(x^2 - x + 1\right)e^{x} + K_2 \end{aligned}$$

On remplace $C_1(x)$ et $C_2(x)$ dans y_G, on trouve

$$\begin{aligned} y_G &= K_1xe^{-x} + K_2e^{-x} + x - 1 \\ \text{avec } y_0 &= x - 1 \text{ est une solution particulière de } (2) \end{aligned}$$

3) Soit l'équation

$$y'' + 9y = \cos x \qquad (3)$$

D'après l'EX05 l'équation (3), la solution générale sans second membre est

$$y = C_1e^{3ix} + C_2e^{-3ix}$$

De meme comme l'équation (2), on cherche la solution générale de l'équation complète (3)

$$y_G = C_1(x)\,e^{3ix} + C_2(x)\,e^{-3ix}$$

On résoud le système d'équations suivant
$\begin{cases} C_1'(x)\,e^{3ix} + C_2'(x)\,e^{-3ix} = 0 \\ 3iC_1'(x)\,e^{3ix} + -3iC_2'(x)\,e^{-3ix} = \cos x \end{cases}$
Qui donne

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= \frac{i}{6}e^{3ix}\cos x \Longrightarrow C_2(x) = \frac{i}{6}\int e^{3ix}\cos x dx \\ &\Longrightarrow C_2(x) = \frac{i}{6}\int(\cos 3x + i\sin 3x)\cos x dx \\ &\Longrightarrow C_2(x) = \frac{i}{6}\int(\cos 3x\cos x + i\sin 3x\cos x)\,dx \end{aligned}$$

En utilisant les transformations trigonométrique $\begin{cases} \cos 3x\cos x = \dfrac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x] \\ \sin 3x\cos x = \dfrac{1}{2}[\sin 4x + \sin 2x] \end{cases}$

On trouve

$$C_2(x) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}e^{4ix} + e^{2ix}\right) + K_1$$

Et

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{i}{6}e^{-3ix} \Longrightarrow C_2(x) = -\frac{i}{6}\int e^{-3ix}dx \\ &\Longrightarrow C_2(x) = \frac{1}{18}e^{-3ix} + K_2 \end{aligned}$$

Alors la solution générale de (3) est

$$y = K_1 e^{3ix} + K_2 e^{-3ix} + \frac{1}{48}e^{7ix} + \frac{1}{24}e^{6ix} + \frac{1}{18}e^{-6ix}$$

Université de M'sila
Tronc-commun sciences de la matière
Faculté des sciences
Année $2021/2022$

Module Math2 semestre 2

Série N 3 Fonctions a plusieures variables.

EX01 Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis les représenter.

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y+1} \\ g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \sqrt{1-xy} \\ h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \ln(xy) \\ e: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & e(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} \end{array}$$

EX02 Calculer les limites des fonctions suivantes si elles existent.

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,5)} \frac{1}{x}\sin(xy), \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{xy}\right), \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x}{x+y},$$
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \lim_{(x,y)\longrightarrow(+\infty,a^2)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x.$$

EX03 Vérifier si les fonctions suivantes sont continues au point $(0,0)$.

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+y} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ e: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^\alpha+y^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

EX04

1. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

$f(x,y)=\dfrac{y}{x}$, $g(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $h(x,y)=\ln\left(\sin\left(x+xy\right)\right)$, $e(x,y)=\arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

2. Chercher f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f''_{yx} où $f(x,y)=x^3y$.

3. Calculer $f''_{x^2}(0,0)\,,f''_{yx}(0,0)\,,f''_{y^2}(0,0)$ où $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n\,.m,n\in\mathbb{Z}$

EX05 (Devoir) Soit

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si} \quad x\neq y \\ 0 & \text{si} \quad x=-y \end{cases} \end{array}$$

1. Trouver Df et représenter cet ensemble graphiquement sur le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier la continuité au point $(0,0)$.
3. Etudier la continuité au point $(x,-x)$.
4. Calculer f'_x et f'_y Si $x\neq y$. .

EX06 (Devoir)Soit la fonction f définie par:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=\dfrac{\left(\ln\left(-x^2-y^2+e\right)\right)-1}{(x^2+y^2)} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f et représenter D_f graphiquement sur le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ aux points $(x,y)\in D_f$.

EX07 (*Devoir*) Soit H une fonction définie de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ comme le suivant:

$$\begin{array}{rlll} H: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & H(x,y) = \ln(x+y+1) - \ln\left(-\left(x^2+y^2-9\right)\right) \end{array}$$

1. Trouver DH et représenter cet ensemble graphiquement sur le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les fonctions suivantes:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\ ,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) \text{ et } \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y)\cdot$$

Solution des exercices de la série N3

EX01 Représentation des domaines de définition des fonctions

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+1}$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in IR^2 / x \neq 0, y+1 \neq 0\right\}. \\ &= \left\{(x,y) \in IR^2 / x \neq 0, y \neq -1\right\}. \end{aligned}$$

C'est à dire la fonction f est définie sur le plan XOY sauf les droites d'équations $x = 0$ et $y = -1$.

2) $g(x,y) = \sqrt{1-xy}$

$D_g = \left\{(x,y) \in IR^2 / 1 - xy \geqslant 0\right\}.$

$$\begin{aligned} 1 - xy &\geqslant 0 \Longrightarrow -xy \geqslant -1 \\ &\Longrightarrow xy \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow y \leqslant \frac{1}{x} \end{aligned}$$

on représente sur le plan XOY la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

Le domaine de définition de g est les points (x,y) qui se trouvent inférieur la courbe $y = \dfrac{1}{x}$.

3) $h(x,y) = \ln(xy)$

$D_h = \left\{(x,y) \in IR^2 / xy \geqslant 0\right\}.$

La fonction h soit définie où x et y sont toutes les deux positives ou négatives pour donner le produit xy est positif.

4) $e(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

$D_e = \left\{(x,y,z) \in IR^3 / 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0\right\}.$

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$$

Dans ce cas le domaine de définition est les points (x,y,z) qui se trouvent à l'intérieur de la sphère d'origine $(0,0,0)$ et de rayon 1.

EX02 Calcul des limites si elles existent:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,5)} \frac{1}{x}\sin(xy) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,5)} y\frac{\sin(xy)}{xy} = 5$

Car $\dfrac{\sin(xy)}{xy} \to 1$ quand $(x,y) \longrightarrow (0,5)$.

2) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) = 0.$

Car la fonction $\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ est bornée et $\left(x^2+y^2\right) \to 0$ quand $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

3) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x}{x+y} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}.$

Cette limite dépende de θ, alors elle n'existe pas.

4) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$

Cette limite dépende de θ, alors elle n'existe pas.

5) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(+\infty,a^2)} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x = e^{a^2}.$

Car on sait que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

EX03 Continuité des fonctions au point $(0,0)$:

On sait que une fonction $f(x,y)$ soit continue dans un point (x_0,y_0) si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} (x,y) = f(x_0,y_0)$.

1) D'après 3) dans l'EX02 $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$ n'existe pas, alors $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

2) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{2x^2}{x+y} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2x^2}{x+ax} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2}{1+a}x = 0 = g(0,0)$.

Dans ce cas on calcule la limite sur la direction $y = ax$, alors g est continue en $(0,0)$.

3) D'après 4) dans l'EX02 $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas, alors $h(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$.

4) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{x^\alpha - y^\alpha}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^\alpha(1-a^\alpha)}{x^2(1+a^2)} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-a^\alpha}{1+a^2} x^{\alpha-2}.$

On discute cette limite d'après les valeurs de α.

a) si $\alpha = 2$, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = \dfrac{1-a^2}{1+a^2} \neq e(0,0)$, alors e n'est pas continue en $(0,0)$.

b) si $\alpha < 2$, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = \infty$, alors e n'est pas continue en $(0,0)$.

c) si $\alpha > 2$, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} e(x,y) = 0$, alors e est continue en $(0,0)$.

EX04

1) calculs des dérivées partielles premières des fonctions:

a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

$$\begin{aligned} f_x^{'}(x,y) &= -\frac{y}{x^2} \text{ (on fixe } y \text{ et on dérive seulement par rapport à } x) \\ f_y^{'}(x,y) &= \frac{1}{x} \text{ (on fixe } x \text{ et on dérive seulement par rapport à } y) \end{aligned}$$

b) $g(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$. alors$\begin{cases} g_x^{'}(x,y) = \dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\ g_y^{'}(x,y) = \dfrac{\frac{-x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \end{cases}$

c) $h(x,y) = \ln(\sin(x+xy))$. alors$\begin{cases} h_x^{'}(x,y) = \dfrac{(1+y)\cos(x+xy)}{\sin(x+xy)} \\ h_y^{'}(x,y) = \dfrac{x\cos(x+xy)}{\sin(x+xy)} \end{cases}$

2) On a $f(x,y) = x^3y$ alors $\begin{cases} f_x^{'}(x,y) = 3x^2y \\ f_y^{'}(x,y) = x^3 \\ f_{x^2}^{''}(x,y) = 6xy \\ f_{y^2}^{''}(x,y) = 0 \\ f_{xy}^{''}(x,y) = 3x^2 \\ f_{yx}^{''}(x,y) = 3x^2 \end{cases}$

3) On a $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n .m,n \in Z$.

a)
$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{m(1+x)^{m-1}}{1} = m \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n-1}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{n(1+y)^{n-1}}{1} = n \end{aligned}$$

c)
$$f'_x(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(x,0)}{x-0} = 0$$

d)
$$f'_y(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,y)}{y-0} = 0$$

e)
$$\begin{aligned} f'_y(x,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{(1+x)^m(1+y)^n-(1+x)^m}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{n(1+x)^m(1+y)^{n-1}}{1} = n(1+x)^m \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} f''_{x^2}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f'_x(x,0)-f'_x(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-m}{x} = 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} f''_{y^2}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f'_y(0,y)-f'_y(0,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{-n}{y} = 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} f''_{yx}(x,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right)(0,0) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{n(1+x)^m-n}{x} = nm \end{aligned}$$