

Série : N 1



Le
22 février 2022



Remarque

l'exercice noté par (★) ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de TD.

Exercice 01

Donner un développement limité des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^x$, $n = 3$.
2. $f(x) = \cos x$, $n = 4$.
3. $f(x) = \sin x$, $n = 5$.
4. $f(x) = shx$, $n = 5$.
5. $f(x) = chx$, $n = 4$.(★)

Exercice 02

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Donner un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$.
2. En déduire le D.L à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$. | (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. | (e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. |
| (b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. | (d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$. | (f) $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}$.(★) |

Exercice 03

Donner la formule de Taylor-Mac-Laurent des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^{2x}$, $n = 3$.
2. $f(x) = \cos(4x)$, $n = 4$.
3. $f(x) = ch4x$, $n = 4$.(★)
4. $f(x) = sh3x$, $n = 5$.
5. $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 3$.
6. $f(x) = \ln(2-x^3)$, $n = 4$.
7. $f(x) = \sin(2+x^2)$, $n = 3$.(★)

Exercice 04

Donner le D.L à d'ordre 3 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$. | 3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$. | 5. $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.(★) |
| 2. $f(x) = e^{\cos x}$. | 4. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.(★) | 6. $f(x) = \tan x$.(★) |
| | | 7. $f(x) = (1+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}$.(★) |

Exercice 05

Donner un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$, $x_0 = 1$.
2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $n = 4$, $x_0 = 1$.(★)
3. $f(x) = \sin x$, $n = 5$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
4. $f(x) = thx$, $n = 3$, $x_0 = 0$.(★)

Exercice 06

Calculer les limites suivantes en utilisant soit les fonctions équivalente ou le D.L

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{\frac{1}{x^2}}$.(★)

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x}{1 - \cos x}$.(★)

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Exercice 07

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de $f(x) = \frac{\cos x}{1 + x + x^2}$.
2. Dédire les dérivées successives, $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Exercice 08

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^3 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}$.

1. Donner le D.L à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$.(★)) de f .
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique quand x tend vers $\pm\infty$.
3. Préciser sa position relative par rapport à cette asymptote.(★)

Exercice supplémentaire 1

Soit la fonction f définie par, $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{7}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en point 0.(★)
2. Étudier l'existence de développement limité de f au voisinage de 0.

Exercice supplémentaire 2

1. Donner le D.L de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. Puis déduire le D.L de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 4.
2. D'après question 1, déduire le D.L de la fonction $f(x) = \arctan(x)$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 5.

Exercice supplémentaire 3

Étudier au voisinage de x_0 , les fonctions f définies ci-dessous (tangente, position par rapport à la tangente)

1. $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$, $x_0 = 0$,

2. $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$, $x_0 = 1$.

3. $f(x) = \frac{1}{x} \left(e^x - \frac{6}{6-x^3} \right)$, $x_0 = 0$, (★)

Bonne chance 