Chapitre 2

Dérivation et intégration dans un domaine complexe

2.1 Dérivation dans un domaine complexe

★ **Domaine complexe :** Un domaine dans un plan complexe est un ensemble *ouvert* et *connexe*.

★ **Fonction holomorphe (dérivable ou analytique) :** Une fonction complexe (1.1) est dite holomorphe dans un domaine complexe D si

1. Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point $z \in D$.
2. f vérifient les conditions de Cauchy-Riemann[1]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

★ La dérivée d'un fonction complexe : Si f est holomorphe dans D alors

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}, \quad z \in D.$$

[1] Les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrits sous la forme $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

★ La fonction u est dite harmonique si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

2.2 Exercices corrigés

Exercice 01 : Trouver un domaine Ω sur lequel les fonctions suivantes sont holomorphes, et donner l'expression de f' en fonction de z si elle existe.

$$a)\ f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad b)\ f(z) = \frac{1}{z} + z\operatorname{Re} z,$$
$$c)\ f(z) = \operatorname{Re} z, \qquad d)\ f(z) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$e)\ f(z) = -e^x \sin y + ie^x \cos y, \qquad f)\ f(z) = \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + 2i\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$
$$g)\ f(z) = \operatorname{Im} z, \qquad h)\ f(z) = \frac{\cos 2\theta}{r^2} - i\frac{\sin 2\theta}{r^2}.$$

Solution : Vérifions les conditions de Cauchy-Riemann

1. (a) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

   M_1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(y^2-x^2\right)^2} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-y^2+x^2}{\left(y^2-x^2\right)^2}$ alors la fonction f n'est pas holomorphe.

   M_2) $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \neq 0$, alors la fonction f n'est pas holomorphe.

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z} + z\operatorname{Re} z = \dfrac{x-iy}{y^2-x^2} + x^2 + ixy = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z\overline{z}}{2}$,

   M_1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $alorslafonction f n'estpasholomorphe.$

   M_2) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{z}{2} \neq 0$, alors la fonction f n'est pas holomorphe.

   (c) $f(z) = \operatorname{Re} z = x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$,

   M_1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, $alorslafonction f n'estpasholomorphe.$

   M_2) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, alors la fonction f n'est pas holomorphe.

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln|z| + i\theta = Log(z)$

$M_1)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\partial v}{\partial x}$, $alorslafonction$f $estholomorphe.$

$M_2)$ $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, $alorslafonction$f$estholomorphe.$

Alors $\Omega = \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ et $f\prime(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$+i $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$-i$\dfrac{\partial v}{\partial y}= \dfrac{1}{z}$.

(e) $f(z) = -e^x \sin y + ie^x \cos y = ie^z$, f est holomorphe sur

$$\Omega = \mathbb{C} \text{ et } f\prime(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = ie^z.$$

(f) $f(z) = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2i\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-1}{\overline{z}^2}$, f n'est pas holomorphe.

(g) $f(z) = \operatorname{Im} z = y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, f n'est pas holomorphe.

(h) $f(z) = \dfrac{\cos 2\theta}{r^2} - i\dfrac{\sin 2\theta}{r^2} = \dfrac{\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{r^2} = \dfrac{1}{(re^{i\theta})^2} = \dfrac{1}{z^2}$, alors $\Omega = \mathbb{C} - \{(0,0)\}$ et $f\prime(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$+i $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$-i$\dfrac{\partial v}{\partial y}= \dfrac{-2}{z^3}$.

2.3 Intégration le long d'une courbe

♠ **Définitions :**

1. **Arc :** On appelle arc dans un domaine complexe D une application dérivable

$$\begin{aligned} \gamma &: [a,b] \longrightarrow D \\ &: t \longrightarrow \gamma(t) = x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

   $\gamma(a)$: est le point de départ (ou l'origine),

   $\gamma(b)$: est le point d'arrive (ou l'extrémité).

2. **Chemin :** La réunion d'arcs.
3. **Chemin fermé (lacet) :** un chemin est dite fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
4. **Longueur d'un chemin :** Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ et $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe est continue, alors la longueur de γ est définie comme étant

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

♠ **Propriétés :** Soit γ une courbe dans le plan complexe, et $-\gamma$ la courbe γ orientée dans son sens inverse. on suppose $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, alors

1. $\int_\gamma f(z) + g(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz$,
2. $\int_\gamma \alpha f(z)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz,\quad \alpha \in \mathbb{C}$
3. $\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$,
4. $\int_{\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$.

♠ On définit l'intégrale de f le long de la courbe γ [2] par trois formes :

1. **Méthode directe (la primitive) :** si f et F sont des fonctions *holomorphes* dans un domaine connexe D et telles que $F'(z) = f(z)$ alors
$$F(z) = \int f(z)\, dz,$$
si z_1 et z_2 sont deux points quelconques dans D, alors pour toute courbe γ de point initial z_1 et de point final z_2 on a
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = [F(z)]_{z_1}^{z_2}.$$
2. **Méthode de la décomposition :** soit f une fonction holomorphe sous forme (1.1) et $z = x + iy$, alors
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b (u + iv)(dx + idy).$$
3. **Changement de variable :** Soit f une fonction continue, on pose $z(t) = \gamma(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t)\, dt$ alors
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\, \gamma'(t)\, dt, \quad t \in [a, b]$$

2.4 Exercices corrigés sur l'intégration dans $\mathbb{C}$

Exercice 01 : Calculer $\int\limits_{1-2i}^{3+i} (2z+3)\, dz$ par trois méthodes :

[2] L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un *chemin*, ou intégrale *curviligne complexe*.

1. Méthode directe :

$$\begin{aligned}\int_{1-2i}^{3+i}(2z+3)\,dz &= \left[z^2+3z\right]_{1-2i}^{3+i} \\ &= \left[(3+i)^2+3(3+i)-(1-2i)^2-3(1-2i)\right] \\ &= 17+19i.\end{aligned}$$

2. La décomposition : Le long de la droite joignant $(1-2i)$ et $(3+i)$, il nous faut d'abord trouver l'équation $y=ax+b$ du segment.

$$\begin{cases} z=1-2i \Rightarrow x=1, y=-2 \\ z=3+i \Rightarrow x=3, y=1 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}.$$

On pose $z=x+iy \Rightarrow dz=dx+idy$ et on a $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2} \Rightarrow dy=\frac{3}{2}dx$ alors

$$\begin{aligned}\int_{1-2i}^{3+i}(2z+3)\,dz &= \int_1^3\left[2\left(x+i\left(\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}\right)\right)+3\right]\left[dx+\frac{3}{2}idx\right] \\ &= \left(1+\frac{3}{2}i\right)\int_1^3\left[2x+i(3x-7)+3\right]dx \\ &= 17+19i.\end{aligned}$$

3. Changement de variable : Soit γ le segment d'extrémités $z_1=1-2i$ et $z_2=3+i$ qui définie par

$$\gamma=\left\{z(t)\in\mathbb{C},\ \text{ou } z(t)=z_1+t(z_2-z_1)\ \text{ et } t\in[0,1]\right\},$$

alors

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= z(t)=z_1+t(z_2-z_1)=1-2i+t(2+3i) \\ &\Rightarrow dz=(2+3i)\,dt,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{1-2i}^{3+i}(2z+3)\,dz &= \int_0^1\left[2(1-2i+t(2+3i))+3\right](2+3i)\,dt \\ &= (2+3i)\,d\int_0^1(2-4i+2t(2+3i)+3)\,dt \\ &= 17+19i.\end{aligned}$$

Exercice 02 : Evaluer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2}dz,\ \gamma \text{ un cercle de centre } z_0=1+i \text{ et de rayon } 2.$$

Solution :

Utilisons la forme polaire d'un cercle

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= z(\theta) = z_0 + R \times e^{i\theta} = 1 + i + 2e^{i\theta}, \text{ ou } \theta \in [0, 2\pi] \\ &\Rightarrow dz = 2ie^{i\theta} d\theta,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\theta)}{(1+i-\gamma(\theta))^2} 2ie^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left[(1+i)e^{-i\theta} + 2\right] d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

Exercice 03 :

1. Soit D un domaine borné, dont le bord est γ, γ est un cercle de centre $z_0 = 0$ et de rayon R, calculer :

   $a)$ $\int\limits_\gamma x dz$, $\int\limits_\gamma y dz$, et $\int\limits_\gamma \overline{z} dz$.

   $b)$ Calculer $\int\limits_\gamma z^2 dz$, tel que :

   ♣ γ est l'union de segment horizontal de 0 à 1 et de segment vertical de 1 à $1+2i$.

   ♣ γ étant le segment de droite qui joint les points 0 et $1+2i$.

2. Soit γ le cercle dont l'équation $|z| = 1$, calculer : $\int\limits_\gamma \frac{\log z}{z^2} dz$, $\int\limits_\gamma \frac{1}{z^2} dz$, $\int\limits_\gamma \frac{dz}{|z|^2}$.

3. γ étant le segment de droite qui joint les points $1+i$ et $3+2i$, calculer

$$\int\limits_\gamma \left(x^2 - y^2\right) dx - 2xy dy.$$

Solution :

1. Utilisons la forme polaire d'un cercle

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= z(\theta) = z_0 + R \times e^{i\theta} = R \times e^{i\theta}, \text{ ou } \theta \in [0, 2\pi] \\ &\Rightarrow dz = Rie^{i\theta} d\theta,\end{aligned}$$

(a) On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ et $x = R\cos\theta = R\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma x dz &= \int_0^{2\pi} \left(R\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \right) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= R^2 \pi i.\end{aligned}$$

(ou on pose $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$).

(b) On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ et $y = R\sin\theta = R\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma y dz &= \int_0^{2\pi} \left(R\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \right) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= -R^2 \pi.\end{aligned}$$

(ou on pose $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$).

(c) On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z} dz &= \int_0^{2\pi} \left(Re^{-i\theta} \right) Rie^{i\theta} d\theta \\ &= 2R^2 \pi.\end{aligned}$$

2. Il ya trois méthodes pour calculer l'intégrale $\int_\gamma z^2 dz$:

♣ Changement de variable : Soit γ_1 le segment d'extrémités $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$ qui définie par

$$\gamma_1 = \{z(t) \in \mathbb{C},\ \text{ou } z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = t \text{ et } t \in [0,1]\},$$

et γ_2 le segment d'extrémités $z_3 = 1$ et $z_4 = 1 + 2i$ qui définie par

$$\gamma_2 = \{z(t) \in \mathbb{C},\ \text{ou } z(t) = z_3 + t(z_4 - z_3) = 1 + 2it \text{ et } t \in [0,1]\},$$

et on pose $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2 dz &= \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz \\ &= \int_0^1 t^2 dt + 2i \int_0^1 (1+2it)^2 dt \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{-2}{3} i - 4 \right) \\ &= \frac{-1}{3}(2i + 11).\end{aligned}$$

♣ Soit γ_3 le segment d'extrémités $z_1 = 0$ et $z_4 = 1 + 2i$ qui définie par

$$\gamma_1 = \{z(t) \in \mathbb{C},\ \text{ou } z(t) = (1+2i)\,t \text{ et } t \in [0,1]\},$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} z^2 dz &= \int_0^{1+2i} z^2 dz \\
&= (1+2i)\int_0^1 (1+2i)^2 t^2 dt \\
&= \frac{-1}{3}(2i+11).
\end{aligned}$$

3. On le cercle dont l'équation $|z| = 1 \Rightarrow z_0 = 0$ et $R = 1$, utilisons la forme polaire d'un cercle

$$\begin{aligned}
\gamma(\theta) &= z(\theta) = z_0 + R \times e^{i\theta} = e^{i\theta},\ \text{ou } \theta \in [0, 2\pi] \\
&\Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta,
\end{aligned}$$

On pose $z(\theta) = \gamma(\theta)$ alors

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\log(z)}{z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{i\theta}{e^{2i\theta}}\right) ie^{i\theta} d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \theta e^{-i\theta} d\theta, \text{(l'intégration par partie)} \\
&= -2\pi i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^{2i\theta}}\right) ie^{i\theta} d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{dz}{|z|^2} &= \int_\gamma \frac{dz}{z\overline{z}} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}\right) ie^{i\theta} d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = 0.
\end{aligned}$$

4. Le long de la droite joignant $1+i$ et $3+2i$, il nous faut d'abord trover l'équation $y = ax + b$ du segment.

$$\begin{cases} z = 1+i \Rightarrow x = 1, y = 1 \\ z = 3+2i \Rightarrow x = 3, y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

On pose $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy$ et on a $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}dx$ alors

$$\begin{aligned} \int_{1+i}^{3+2i} \left(x^2 - y^2\right) dx - 2xydy &= \int_1^3 \left[x^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2\right] dx - 2x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}idx \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 \left[4x^2 - (x+1)^2\right] dx - 2\left(x^2 + x\right) idx \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 \left[3x^2 - 2x - 1\right] - 2i\left(x^2 + x\right) dx \end{aligned}$$