Chapitre 3

Points singuliers et série de Laurent

3.1 Points singuliers

Soit f une fonction uniforme. Une point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f.

1. **Singularités apparentes :** Le point singulier z_0 est appelé apparente de f si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.
2. **Pôles :** Si l'on trouver un entier positif n tel que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, et $a \in \mathbb{C}$, alors z_0 est appelé *une pôle d'ordre* n, si n=1 alors z_0 est appelé *un pôle simple.*
3. **Singularités essentielles :** Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

3.2 Séries entières

Une série de la forme

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \cdots \\ = & \sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

est appelée *série entière* en $(z - z_0)$. Nous pouvons obtenir le rayon de convergence R de la série entière par :

1. Critère de d'Alembert : $R = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ et $\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est convergente si $R < 1$, et diverge si $R > 1$.

2. Critère de d'Alembert : $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}}$ et $\sum_{n=0}^{n=+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est convergente si $R < 1$, et diverge si $R > 1$.

Exemple :

1. $\sum_{n=0}^{n=+\infty} z^n \Rightarrow a_n = 1$, alors $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = 1$, Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$.
2. $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{z^n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$, alors $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = 1$, Cette série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

3.3 Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple D et sur D. Alors

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées séries de Taylor ou développement de Taylor de $f(z)$. et le domaine de convergence de la dernière série est défini par $|z - z_0| < R$.

Quelques séries particulières : La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$, (valide pour $|z| < \infty$)
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$, (valide pour $|z| < \infty$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$, (valide pour $|z| < \infty$)
4. $\log z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots$, (valide pour $|z| < 1$)
5. $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^{n-1} z^n + \cdots$, (valide pour $|z| < 1$)

3.4 Série de Laurent

On suppose que f est uniforme et holomorphe dans un domaine D sauf au pôle z_0, alors la série de Laurent en z_0 de la fonction f est

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ avec } a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

γ un contour fermé autour de z_0.

Remarques :

– La partie

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

est appelée *la partie analytique* de la série de Laurent.

– La partie

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

est appelée *la partie principale* de la série de Laurent.

– Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

– Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z) \Rightarrow$ la partie principale du développement de Laurent possède une infinité de terme.

– Si $z = z_0$ est un pôle de $f(z) \Rightarrow$ la partie principale du développement de Laurent possède un nombre fini de termes.

– Pour développer rapidement une fonction en série de Laurent sans calculer les coefficients a_n, il est utile de connaître quelques développements de Taylor.

3.5 Exercice corrigés

Exercice 01 :

1. Donner le développement de Laurent de

   a) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z+4)}$ dans le demain $2 < |z| < 4$

   b) $f(z) = \dfrac{1}{(2z+1)(3z+1)}$ dans $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$,

   *c)** $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ dans $1 < |z| < 3$,

2. Trouver les singularité de f et indiquer leurs type :

$$a)\ f(z) = \frac{z}{z+i} \qquad b)\ f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(2z-3)^2}$$
$$c)\ f(z) = \frac{1}{\sin z} \qquad d)\ f(z) = \cos\frac{1}{z}$$
$$e)\ f(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad f)^*\ f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3+1},$$
$$g)^*\ f(z) = \frac{\cos z}{(z^2+1)^3}, \qquad h)^*\ f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Solution :

1. (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z+4)}$ dans le demain $2 < |z| < 4$, Séparons d'abord la fraction

$$\frac{1}{(z+2)(z+4)}$$

en fractions simples

$$\frac{1}{(z+2)(z+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+4}\right)$$

et utilisons le développement de Taylor. de

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^{n-1} z^n + \cdots, \text{(valide pour } |z| < 1).$$

Ecrivons maintenant la série de Laurent de chaque fraction :

Puisque

$$\begin{aligned} 2 &< |z| \Rightarrow \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 - \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \cdots\right), \end{aligned}$$

(valide pour $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$)

Puisque

$$\begin{aligned} |z| &< 4 \Rightarrow \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4\left(\frac{z}{4}+1\right)} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z}{4}} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{4} + \left(\frac{z}{4}\right)^2 - \left(\frac{z}{4}\right)^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

(valide pour $\left|\frac{z}{4}\right| < 1$)

alors la série de Laurent de f est

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{(z+2)(z+4)} &= \frac{z+1}{2}\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+4}\right)\\ &= \frac{z+1}{2}\left(\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots\right)\right)\\ &\quad -\frac{z+1}{2Z}\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{4}+\left(\frac{z}{4}\right)^2-\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots\right)\\ &= \left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\frac{8}{z^4}+\cdots\right)\\ &\quad -\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{z}{16}+\frac{z^2}{64}+\cdots\right)\\ &= \frac{3}{8}-\frac{3z}{32}+\frac{3z^2}{128}-\cdots-\frac{1}{2z}+\frac{1}{z^2}\\ &\quad -\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\cdots\end{aligned}$$

On remarque que la partie analytique est $\frac{3}{8}-\frac{3z}{32}+\frac{3z^2}{128}-\cdots$, et la partie principale est $\frac{1}{2z}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}+\frac{4}{z^4}+\cdots$

(b) $f(z)=\dfrac{1}{(2z+1)(3z+1)}$ dans $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$, Séparons d'abord la fraction

$$\frac{1}{(2z+1)(3z+1)}$$

en fractions simples

$$\frac{1}{(2z+1)(3z+1)}=\frac{3}{3z+1}-\frac{2}{2z+1},$$

et utilisons le développement de Taylor. de

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^{n-1}z^n+\cdots,$$

(valide pour $|z|<1$).

Ecrivons maintenant la série de Laurent de chaque fraction :

Puisque

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &< |z| \Rightarrow \frac{1}{3z+1}=\frac{1}{3z\left(1+\frac{1}{3z}\right)}\\ &= \frac{1}{3z}\frac{1}{1+\frac{1}{3z}}\\ &= \frac{1}{3z}\left(1-\frac{1}{3z}+\left(\frac{1}{3z}\right)^2-\left(\frac{1}{3z}\right)^3+\cdots\right),\end{aligned}$$

(valide pour $\left|\frac{1}{3z}\right|<1$).

Puisque $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2z+1} = 1 - 2z + (2z)^2 - (2z)^3 + \cdots$,(valide pour $|2z| < 1$) alors la série de Laurent de f est

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2z+1)(3z+1)} &= \frac{3}{3z+1} - \frac{2}{2z+1} \\
&= \frac{3}{3z}\left(1 - \frac{1}{3z} + \left(\frac{1}{3z}\right)^2 - \left(\frac{1}{3z}\right)^3 + \cdots\right) \\
&\quad -2\left(1 - 2z + (2z)^2 - (2z)^3 + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z^3} - \cdots\right) - \left(1 - 4z + 8z^2 - 16z^3 + \cdots\right) \\
&= -1 + 4z - 8z^2 + 16z^3 + \cdots + \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z^3} - \cdots
\end{aligned}$$

On remarque que la partie analytique est

$$-1 + 4z - 8z^2 + 16z^3 + \cdots,$$

et la partie principale est $\dfrac{1}{z} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z^3} - \cdots$

(a) Le point singulier de $f(z) = \dfrac{z}{z+i}$ est $z = -i$, ce point est un pôle simple car :

$$\lim_{z \to -z_0} (z - z_0)^1 f(z) = \lim_{z \to z_0} (z+i)^1 f(z) = -i \neq 0.$$

(b) Les points singuliers de $f(z) = \dfrac{e^z}{4(z+1)\left(z - \frac{3}{2}\right)^2}$ sont $z_0 = -1$ et $z_1 = \frac{3}{2}$, ces points sont des pôles car :

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to -z_0} (z - z_0)^1 f(z) &= \lim_{z \to -1} (z+1)^1 f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{e^z}{(2z-3)^2} = \frac{1}{25e} \neq 0. \\
\lim_{z \to -z_1} (z - z_1)^2 f(z) &= \lim_{z \to \frac{3}{2}} \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 f(z) = \lim_{z \to \frac{3}{2}} \frac{e^z}{4(z+1)} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{10} \neq 0.
\end{aligned}$$

(c) Les points singuliers de $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ sont $z_k = k\pi$, ces points sont des pôles simples car :

$$\lim_{z \to -z_0} (z - z_0)^1 f(z) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) f(z) = \lim_{z \to k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin z} = \lim_{z \to k\pi} \frac{1}{\cos z} = finie \neq 0.$$

on utilise la règle de L'Hôpital.

(d) Le point singulier de $f(z) = \cos \frac{1}{z}$ est $z = 0$, ce point est la singularité essentielle car :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \Rightarrow \cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \cdots$$

alors la partie principale du développement de Laurent possède une *infinité* de terme.

(e) Le point singulier de $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ est $z = 0$, ce point est la singularité apparente car :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1, \text{ (on utilise la règle de LHôpital).}$$

Bibliographie

[[1]] K. Atkinson, W. Han. *Theoretical Numerical Analysis.* Springer-Verlag New York, 2001.

[[2]] F. Bertrande, D. Fredon, M. Maumy-Bertrande. *Mathématiques analyse en 30 fiches,* Dound, Paris, 2009.

[[3]] N. Amroun. *Cours de Fonctions de variables complexes.* Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbes Algérie, 2009.