Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Socle Commun

Analyse 2
Développements limités

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\int f(x)dx$$

Présenté par :

Dr. Dahmane BOUAFIA

Année Universitaire :2020-2022

Table des matières

CHAPITRE 1

FORMULES DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Dans ce section, on considère les voisinages $V_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ de x_0, suivants (selon le cas étudie) $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[- \{x_0\}$, $]x_0, x_0 + \alpha[$, $]x_0 - \alpha, x_0[$ $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$, tel que $\alpha > 0$.

1.1.1 L'infiniment petit et l'infiniment grand

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur V_{x_0} un voisinage de x_0. Alors, on dit que :

1. La fonctions f est un infiniment petit au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.
2. La fonctions f est un infiniment grand au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Exemple 1.1. 1. La fonctions f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$ est un infiniment petit au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2. La fonctions f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f = \dfrac{1}{x^2}$ est un infiniment grand au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

1.1.2 Fonctions négligeables

Définition 1.2. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou plus simplement $f = o(g)$.

Remarque 1.1. o est dit aussi le symbole de Landau.

Exemples 1.1. au voisinage de 0, on a

1. $x^3 = o(x^2)$
2. $x^n = o(x^m), \ n > m$
3. $e^{-\frac{1}{|x|}} = o(x^n), \ n \in \mathbb{Z}$
4. $x \ln x = o(1)$
5. $x(\ln|x|)^n = o(1), \ n \in \mathbb{N}$
6. $x^n(\ln|x|)^n = o(1), \ m, n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.1. *Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), alors*

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En particulier

$$f \underset{x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

1.1.3 Fonctions équivalentes

Définition 1.3. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \lim_{x\to x_0} h(x) = 1.$$

On écrira dans ce cas $f \sim_{x_0} g$.

Remarque 1.2. Si $g \neq 0$ dans un voisinage de x_0, alors

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 1.2. Au voisinage de 0 on a $1 - \cos x \sim_0 \frac{1}{2}x^2$. Car

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}\right)^2 = 1.$$

Exemple 1.3. Soit f une fonction dérivable au point x_0. La fonction f s'écrit au voisinage de x_0 sous la forme

$$f(x) - f(x_0) \sim (x - x_0)f'(x_0) \quad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Si on applique ça au voisinage de 0 aux fonctions usuelles, on obtient :

1. $\sin x \sim_0 x$
2. $\cos x \sim_0 1$
3. $e^x - 1 \sim_0 x$
4. $\tan x \sim_0 x$
5. $\ln(1+x) \sim_0 x$

Exemple 1.4. Soit f un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad \text{tel que } a_n \neq 0.$$

Alors, $f(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$. En effet, on a

$$f(x) = a_n x^n \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_0}{a_n x^n}\Big) = a_n x^n h(x) \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1.$$

Proposition 1.2. *Si $f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2$ alors $f_1g_1 \sim_{x_0} f_2g_2$. En particulier $f_1^n \sim_{x_0} f_2^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Si de plus $f_2 \neq 0$ et $g_2 \neq 0$ au voisinage de x_0, alors $\frac{f_1}{f_2} \sim_{x_0} \frac{g_1}{g_2}$.*

Remarque 1.3. La relation $\sim$ est incompatible avec l'addition, c'est-à-dire, si $f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2$ on n'a pas en généralement $f_1 + g_1 \sim_{x_0} f_2 + g_2$, ni $f_1 - g_1 \sim_{x_0} f_2 - g_2$.

Exemple 1.5.

1. $x+2x^2 \sim_0 x+x^4$ et $x \sim_0 x$ mais $(x+2x^2)-x$ n'est pas équivalente à $(x+x^4)-x$ au voisinage de 0.
2. Si $f(x) = 2x^3 - x + 4$ et $g(x) = -x^3 + x^2 - 1$, Alors, on a $f(x) \sim_{+\infty} f_1(x) = 2x^3$ et $g(x) \sim_{+\infty} g_1(x) = -x^3$. Mais $f(x) + g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ et $f_1(x) + g_1(x) = 0$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 1.3. *Si f tend vers une limite l en x_0, (l finie ou non) et si $f \sim_{x_0} g$ alors g tend vers l en x_0.*

Démonstration - Supposons $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $f \sim_{x_0} g$, alors il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \lim_{x\to x_0} h(x) = 1.$$

Donc

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{l}{1} = l.$$

■

Exemple 1.6. Soient les fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \frac{\tan x}{x}$. On a $f \sim_0 g$, car $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x) = \frac{1}{\cos x}$ et $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, donc on obtient $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.

Théorème 1.1. *On a l'équivalence suivante $f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow f - g \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow f \underset{x_0}{=} g + o(g)$.*

Propriétès 1.1. La relation $\sim$ au voisinage de x_0 est une relation d'équivalence entre les fonctions : elle est symétrique, réflexive et transitive i.e, pour toutes les fonctions f, g, h, on a.

1. $f \sim f$
2. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$
3. $f \sim g$ et $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

1.1.4 Limites et équivalents des fonctions $\sim$

Il est possible d'appliquer la relation d'équivalence des fonctions $\sim$ afin de calculer des limites, notamment pour lever les cas d'indéterminations.

Exemples 1.2. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x(2-x)\tan 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x.2.2x} = \dfrac{1}{8}$. (Ici, $1-\cos x \sim_0 \dfrac{1}{2}x^2$).

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-x).x}{x^2} = -1$.

1.2 Formule de Taylor et développements limités.

La formule de Taylor et ses variables, est une écriture approximative d'une fonction qui est généralement du type C^n (au moins), sous forme de polynômes plus un reste, cependant localement au voisinage d'un point, ce dernier dont on sait mesurer avec précision son erreur.

1.2.1 La formule de Taylor avec reste intégral

Motivation 1.1. Une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0 \in]a,b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0 : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Celà revient à dire que f est approximée par un polynôme P de degré 1 tel que.

$$P(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0),$$

avec un reste $R(x) = (x-x_0)\varepsilon(x)$ et qui'est tend vers 0 quand x tend vers x_0. La formule de Taylor généralise ce résultat à des fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées (au voisinage de x_0) par des polynômes de degré n.

Théorème 1.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $(n \in \mathbb{N})$ sur $[a,b]$ et soit $x, x_0 \in [a,b]$, alors :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \tag{1.1}$$

Remarque 1.4. 1. $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dfrac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ est la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n, f et x_0

2. Le reste $R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ de Laplace (ou reste inrégral).

3. La formule (1.1), est écrire aussi comme suit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

4. Par le changement de variable $x = x_0 + h$ (et donc $h = x - x_0$) la formule de Taylor (1.1) précédente devient pour tout x_0 et $x_0 + h$ de $[a,b]$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}h + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \int_{0}^{h} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(h-t)^n dt.$$

Démonstration - Montrons le théorème 1.2, par récurrence sur $k \leq n$:

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_1 - t)^k dt.$$

(Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on remplace x par x_1).

Initialisation : Pour $n = 0$, une primitive de $f'(t)$ est $f(t)$ donc $\int_{x_0}^{x_1} f'(t)dt = f(x_1) - f(x_0)$, et puis $f(x_1) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f'(t)dt$. Sachant que $(x_1 - t)^0 = 1$ et $0! = 1$.

Hérédité : Supposons la formule vraie au rang $k - 1$. Elle s'écrit

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x_1 - x_0)^{k-1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x_1 - t)^{k-1} dt.$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x_1 - t)^{k-1} dt$. En posant

$$\begin{cases} u(t) = f^{(k)}(t) \\ v'(t) = \dfrac{(x_1 - t)^{k-1}}{(k-1)!} \end{cases} \quad \text{donc, on a,} \begin{cases} u'(t) = f^{(k+1)}(t) \\ v(t) = -\dfrac{(x_1 - t)^k}{k!} \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x_1 - t)^{k-1} dt &= \Big[- f^{(k)}(t) \frac{(x_1 - t)^k}{k!} \Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_1 - t)^k dt \\ &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_1 - t)^k dt \end{aligned}$$

Ainsi lorsque l'on remplace cette expression dans la formule au rang $k - 1$ on obtient la formule au rang k.
Alors, on conclus, d'après le principe de récurrence la formule de Taylor est vraie pour tous les entiers n pour lesquels $f \in C^{n+1}$. ∎

Exemple 1.7. Soit $f(x) = e^x$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a f est de classe C^{n+1} et $f^{(n)}(x) = e^x$. Alors, si $x_0 = 1$, nous avons que

$$f(x) = e^x = e\Big[1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!}\Big] + \int_1^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Corollaire 1.1. *Si f est une fonction polynôme, de degré inférieur ou égal à n, donc, $f^{(n+1)} = 0$, et nous avons*

$$\forall x \in [a, b] : \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1.2.2 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 1.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a, b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, $\exists c \in]a, b[$ telle que :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (1.2)$$

C'est la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Lagrange $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)$.

Remarque 1.5. 1. $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ est la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n, f et x_0

2. La formule (1.2), est écrire aussi comme suit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

3. Le nombre c est souvent désigné par $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ avec $0 < \theta < 1$.
4. Par le changement de variable $x = x_0 + h$ (et donc $h = x - x_0$) la formule de Taylor (1.2) précédente devient pour tout x_0 et $x_0 + h$ de $[a, b]$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}h + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Démonstration - La démonstration de théorème 1.3 précédente consiste à appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction convenablement choisie. (Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on remplace x par $x_1 \in [a, b]$ où $x_1 > x_0$). On pose

$$A = \frac{(n+1)!}{(x_1-x_0)^{n+1}}\Big(f(x_1) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k\Big),$$

de sorte que

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k + \frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}A.$$

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.
Pour $x \in]a, b[$, on pose

$$g(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_1-x)^k + \frac{(x_1-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

On remarque que $g(x_0) = f(x_1)$ (grâce au choix de A) et $g(x_1) = f(x_1)$. La fonction g est dérivable sur $]a, b[$ et on a, pour tout $x \in]a, b[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_1-x)^k + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_1-x)^k - \frac{(x_1-x)^n}{n!}A \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1-x)^n - \frac{(x_1-x)^n}{n!}A \\ &= \frac{(x_1-x)^n}{n!}(f^{(n+1)}(x) - A) \end{aligned}$$

Comme La fonction g est satisfait tout les condition de théorème de Rolle. Car g est continue sur $[x_0, x_1]$, dérivable sur $]x_0, x_1[$ et $g(x_0) = g(x_1)$. Alors Il existe donc $c \in]x_0, x_1[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne $A = f^{(n+1)}(c)$. On en déduit bien

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k + \frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

■

Remarque 1.6. Le théorème reste vraie même si $x_1 < x_0$. En effet, la démonstration précédente ne fait intervenir aucune des conditions $x_1 < x_0$ ou $x_1 > x_0$.

Exemple 1.8. Soit $f(x) = \sin x$, comme $f \in C^{(n)}\Big([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\Big)$, $(n \in \mathbb{N})$, et

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \sin\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big).$$

Alors, la formule de Taylor-Lagrange ci-dessus en $x_0 = 0$ à l'ordre 5, pour certain c entre 0 et x devient,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}\sin c.$$

1.2.3 Formule de Taylor-Cauchy

Théorème 1.4. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a, b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, $\exists \theta \in]0, 1[$ telle que :*

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)). \tag{1.3}$$

C'est la formule de Taylor-Cauchy d'ordre n avec reste de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

1.2.4 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$. Alors pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$, on a :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x). \tag{1.4}$$

où ε est une fonction définie sur $[a, b]$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration - Appliquons la formule de Taylor d'ordre n à la fonction f sur $[x_0, x]$ (on suppose $x_0 < x$). Alors il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^{n+1}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

avec : $c_x = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$.

On a bien $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, car $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(x_0)$. ∎

Exemple 1.9. Soit $f(x) = \cos x$, comme $f \in C^{(n)}([0, \pi])$, $(n \in \mathbb{N})$, et

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Alors, la formule de Taylor-Lagrange ci-dessus en $x_0 = 0$ à l'ordre 4, et devient,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

Remarque 1.7. La différence essentielle entre les formules est que la formule de Taylor-Young est utilisé localement (c'est à dire sur des intevalles $[x_0, x_0 + h]$ et h petit), alors que la formule de Taylor-Lagrange est utilisable sur le segment $[x_0, x_0 + h]$ même si h n'est pas petit.

1.2.5 Formule de Taylor-Mac-Laurin

Les formules de Mac-Laurin s'obtiennent à partir de celles de Taylor pour le cas particulier $x_0 = 0$.

Théorème 1.6. *Soit f une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[0, x]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0, x[$, alors $\exists \theta \in]0, 1[$ telle que :*

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{1.5}$$

Démonstration - On applique le théorème 1.3 ci dessus avec $x_0 = 0$. ■

Remarque 1.8. La formule 1.5 est donnée par le reste de Cauchy, en peut changer le reste pour donner les différentes formules suivantes :

1. $f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$, (avec reste de Cauchy).
2. $f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$, (avec reste de Peano-Young).

Exemple 1.10. Soit $f(x) = e^x$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc en peut appliquant la formule de Mac-Laurin au voisinage de 0 pour $n = 3$, il vient que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}e^c$$

telle que $0 < c < x$. Pour approximation de $e^{0,1}$, (c'est à dire $x = 0,1$) dans la formule précédante. Le reste étant petit on trouve alors,

$$e^{0,1} \simeq 1 + 0,1 + 0,05 + \frac{(0,001)}{6} \simeq 1.150166666666667.$$

Corollaire 1.2. *Supposons que la fonction $f^{(n+1)}$ est majorée sur $[a,b]$ par un réel M, alors pour tout $x_0, x \in [a,b]$, on a*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1.3 Développements limités

Définition 1.4. Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in I$ (sauf pout-être au point x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) en x_0 s'il existe un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n$$

de degré inférieur ou égale n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I : f(x) = P(x) + (x-x_0)^n\varepsilon(x), \quad \text{et} \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit alors que $P(x)$ est la partie régulière du $D.L$ et $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ est le reste du $D.L$. On écrit le reste sous la forme $o\Big((x-x_0)^n\Big)$.

Remarque 1.9. La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Proposition 1.4. *Si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0 alors f admet un $D.L$ au point x_0 à l'ordre n, qui provient de la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

Remarque 1.10.
1. Si f est de classe C^n au voisinage d'un point 0, un $D.L$ en 0 à l'ordre n est l'expression : $f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$.
2. $f \sim_0 P$.
3. Si f est définie au point 0, on a $f(0) = a_0$, et $\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$. Alors, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = a_1$.

Remarque 1.11. La formule de Mac-Laurin-Young exige l'existence de $f^{(n)}(0)$, alors que le développement limité peut exister sans que f soit dérivable en 0. En effet, considérons la fonction :

$$f(x) = 1 + 3x - x^2 + x^3 \ln|x|.$$

On voit bien que f n'est pas définie au point 0, donc elle n'est pas dérivable en ce point. Par contre pour même fonction f où $\varepsilon(x) = x \ln|x|$, on a $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 et le polynôme régulièr est $P_2(x) = 1 + 3x - x^2$.

Théorème 1.7. *(L'unicité) Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.*

Démonstration - Supposons que, $\begin{cases} f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + x^n \varepsilon_1(x) \\ f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} b_k x^k + x^n \varepsilon_2(x). \end{cases}$

En effectuant la différence on obtient : $\sum_{k=0}^{k=n} (a_k - b_k) x^k + x^n (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$. Lorsque l'on fait $x = 0$ dans cette égalité alors on trouve $a_0 - b_0 = 0$, i.e, $a_0 = b_0$. Ensuite on peut diviser cette égalité par x, on trouve $\sum_{k=1}^{k=n} (a_k - b_k) x^{k-1} + x^{n-1} (\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$, en évaluant en $x = 0$ on obtient $a_1 = b_1, ...,$ etc. Alors, on trouve $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Les parties polynomiales sont égales et donc les restes aussi. ■

Corollaire 1.3. *Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son $D.L$ en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).*

Démonstration - Posons $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$. Si f est paire alors $f(-x) = f(x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$. D'après théorème 1.7 (l'unicité du $D.L$ en 0) on obtient $a_1 = -a_1,\ a_3 = -a_3, ...,$ et donc $a_k = 0$ pour tout k impair. ■

1.4 Développements limités usuels

En utilisant la formule de Mac-Laurin-Young, on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x).\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+x^8\varepsilon(x).\\
shx &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
chx &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).\\
thx &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+x^8\varepsilon(x).\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+....+x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+....+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x).\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-...-\frac{1}{n}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1.1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{3}{8}x^2+...+(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+...+\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-...-\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

1.5 Opérations sur les développements limités

Soient f et g ayant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0, i.e,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{k=n}a_kx^k+o(x^n)=P_n(x)+o(x^n),\quad g(x)=\sum_{k=0}^{k=n}b_kx^k+o(x^n)=Q_n(x)+o(x^n).$$

Théorème 1.8. *(Troncature) Si une fonction f admet un développement limité d'ordre $n\in\mathbb{N}$ au point $x_0=0$, alors elle admet un développement limité d'ordre $p\leq n$.*

Exemple 1.11. Nous savons que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x).$$

Donc, pour tout $p \leq n$, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^p}{p!} + x^p \varepsilon(x).$$

1.5.1 Développement limité d'une somme et dun produit

Proposition 1.5. *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg admettent un développement limité à l'ordre n. Alors,*

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(x) &= \sum_{k=0}^{k=n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + o(x^n). \\
(fg)(x) &= \sum_{k=0}^{k=n} c_k x^k + o(x^n), \textit{tel que } c_k = \sum_{i=0}^{i=k} a_i b_{k-i}.
\end{aligned}$$

Exemples 1.3. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 et 4 au voisinage de 0 de

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x} \text{ et } k = [\ln(1+x)]^2 \text{ respectivement.}$$

1. Pour h, posons $f(x) = \ln(1+x)$, et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \text{ et } g(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

   Donc, $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3).$

2. Pour k, on a,

$$\begin{aligned}
k(x) = f^2(x) &= [x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]^2 \\
&= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

1.5.2 Développement limité d'un quotient

Proposition 1.6. *Si le nombre $g(0) = Q_n(0) \neq 0$ est non nul, le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0 est*

$$\frac{f}{g}(x) = T_n(x) + o(x^n),$$

où T_n est le quotient à l'ordre n de la division de p_n par Q_n selon les puissances croissantes.

Exemple 1.12. Déterminons le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Au voisinage de 0, les développements limités de $\sin x$ et de $\cos x$ à l'ordre 5 s'écrivent comme suit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6 \varepsilon(x) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x).$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne.

$$\begin{array}{r|l}
x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120} & 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
-x+\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{24}x^5 & x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-1}
\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{30}x^5 & \\
-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{6}x^5 & \\ \cline{1-1}
\dfrac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

D'où, $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.

Remarque 1.12. On peut utiliser la méthode suinante pour calculer le dévelopement limité d'un quotient $\frac{f}{g}$, où nous utilisons le D.L de $\frac{1}{1+t}$.

1. Si $b_0 = 1$, on pose $t = \sum_{k=1}^{k=n} b_k x^k + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^m)$, et le quotient s'écrit $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{1+t}$.
2. Si $b_0 \neq 1$ est quelconque avec $b_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant
$$\frac{1}{g} = \frac{1}{b_0} \times \frac{1}{1+t}, \text{ où } t = 1 + \frac{b_1}{b_0}x + ... + \frac{b_m}{b_0}x^m + \frac{1}{b_0}ox(^m).$$
3. Si $b_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

1.5.3 Développement limité d'une composée

Proposition 1.7. *Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (c'est-à-dire $b_0 = 0$), alors $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est obtenu en négligeant les termes de degré supérieur à n du polynôme $(Q_n \circ P_n)(x)$, i.e,*

$$(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{k=n} b_k \Big((P_n(x) \Big)^k + o(x^n)..$$

Exemple 1.13. Déterminons le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $h(x) = cos(sin(x))$.
Posons $f(x) = \cos x$, et $g(x) = \sin x$, comme $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} h(x) = (f \circ g)(x) &= 1 - \frac{1}{2!}\Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)^4 + x^5\varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + x^5\varepsilon(x). \end{aligned}$$

1.5.4 Développement limité d'une primitive

Proposition 1.8. *Soit F une primitive de f. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 qui s'écrit*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= F(0) + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + x^{n+1}\varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(t) = 0$

Exemple 1.14. On a : $(arctanx)' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ...(-1)x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$.
Alors, le développement limité au voisinage de 0 d'ordre $2n+1$ de $arctanx$ est

$$\begin{aligned} \arctan x &= \arctan 0 + \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + ...(-1)t^{2n} + t^{2n+1}\varepsilon(x))dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on déduit le corollaire suivant.

1.5.5 Développement limité d'une dérivée

Corollaire 1.4. *Si f est dérivable en 0. Alors f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0, et nous avons*

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(t) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} ka_kx^{k-1} + x^{n-1}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.15. Le développement limité au voisinage de 0 d'ordre 5 de $\sin$ est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x).$$

Alors, le développement limité au voisinage de 0 d'ordre 4 de $\cos$ est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

1.5.6 Développement limité en point quelconque $x_0 \neq 0$ et à l'infini ∞

Définition 1.5. Soient f une fonction définie sur un voisinage d'un point x_0, sauf peut-être en x_0 et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

où $a_i,\ 0 \leq 1 \leq n$, sont des nombres réels et ε une fonction tendant vers 0 quand x tend vers x_0.

Remarque 1.13. Pour développer une fonction f au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$ on peut toujours se ramener à le cas si $x_0 = 0$ en faisant le changement de variable $t = x - x_0$. Dans ce cas là, on a

$$f(x) = f(t + x_0) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n + t^n\varepsilon(x)$$

Définition 1.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (ou bien de la forme $]-\infty, a]$). On dit que f admet un D.L en $+\infty$ à l'ordre n si la fonction $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Dans ce cas le développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ est donné par

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \text{ telle que } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemple 1.16. 1. Déterminons le développement limité d'ordre 3 en 2 de la fonction $f(x) = e^x$. Posons, $\begin{cases} t = x-2 \\ g(t) = f(t+2), \end{cases}$ alors $t \to 0$ si $x \to 2$, donc au point 0 on a

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} g(t) = e^{t+2} &= e^2\Big[1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\Big] \\ \Rightarrow e^x &= e^2\Big[1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + o((x-2)^3)\Big]. \end{aligned}$$

2. Déterminons le développement limité d'ordre 3 en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Posons, $\begin{cases} t = \dfrac{1}{x} \\ g(t) = f\Big(\dfrac{1}{t}\Big), \end{cases}$ dans ce cas là $t \to 0$ si $x \to +\infty$, donc au point 0 on a

$$g(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3).$$

Par suite donc le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

1.6 Applications des développements limités

1.6.1 Calcule des limites

Les développements limités sont trés utiles dans la recherche des limites de fonctions et l'étude des formes indéterminées.

Exemples 1.4. 1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{tanx - \sin(x)}{x^3}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$tanx = x + \frac{1}{3}x^3 + x^4\varepsilon(x) \text{ et } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Donc

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{x^3}{3!}) + x^4\varepsilon(x)}{x^3} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x^4\varepsilon(x)}{x^3}.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x-2}$.

On pose pour $x > 0$, $t = \dfrac{1}{x}$ avec $t > 0$. On a

$$f\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{t}(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{t}(1+t^2-2t^3)^{\frac{1}{3}}$$

Or au voisinage de 0,

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u), \quad (1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + o(u), \text{telle que } u = t+t^2, \text{ou } u = t^2 - 2t^3.$$

Donc

$$(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t), \quad (1+t^2-2t^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + o(t).$$

Ainsi $f\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = \dfrac{1}{t}\Big(\dfrac{1}{2}t + o(t)\Big) = \dfrac{1}{2} + o(1)$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

1.6.2 Détermination des branches infinies

Définition 1.7. Rappel Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ (ou bien de la forme $]-\infty, x_0[$) et (C) la courbe représentative de f (dans un repère du plan).

1. Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = +\infty$, (respctivement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$), alors la droite $(\Delta) : x = x_0$ est asymptote verticale à (C) en x_0 (et idem à gauche ou à droite en x_0).
2. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l, \;\; l \in \mathbb{R}.$, alors la droite $(\Delta) : y = l$ est asymptote horizontale en $\pm\infty$.
3. S'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}, \;(a \neq 0)$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

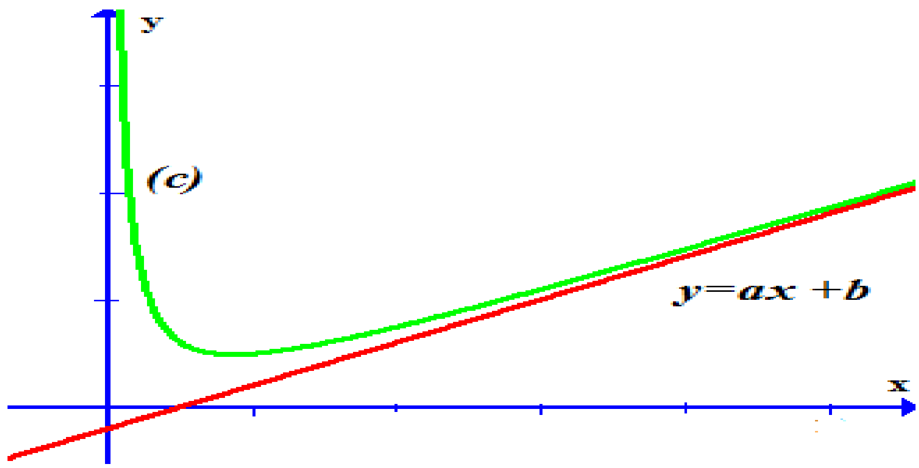

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de (C) et son asymptote en $+\infty$.

Proposition 1.9. *On suppose que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet un D.L en $+\infty$ (où $-\infty$) telle que*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + o\Big(\frac{1}{x^k}\Big)$$

où k est le plus petit entier supérieur ou égal 2 tel que le coefficient de $\dfrac{1}{x^k}$ soit non nul. Alors $\lim\limits_{x \to \pm+\infty} [f(x) - (a_0 x + a_1)] = 0$ (resp en $-\infty$). Donc la droite $(\Delta) : y = a_0 x + a_1$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (resp en $-\infty$).

Remarque 1.14. La position de (C) par rapport à (Δ) est donné par le signe de $f(x) - y$ au voisinage $\pm\infty$.

Démonstration - On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (a_0 x + a_1)] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{a_k}{x^{k-1}} + o\Big(\dfrac{1}{x^{k-1}}\Big)\right] = 0.$
Donc $y = a_0 x + a_1$ est une asymptote à la courbe de f. ■

Exemple 1.17. Déterminer les asymptotes obliques (s'il existent) de la fonction f définie par $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2 - 1}}$.
Au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$), on a :

$$f(x) = x + 2 + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Donc $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote à C en $\pm\infty$.