Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Socle Commun

Analyse 2
Cours et exercices

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\int f(x)dx$$

Présenté par :

Dr. Dahmane BOUAFIA

Année Universitaire :2020-2022

Table des matières

Notation

Nous introduisons les notations et les dfinitions ncessaires qui sont utilises par la suite.

$V(x_0)$: voisinage de x_0.

$f \underset{x_0}{=} o(g)$: f est ngligeable devant g au voisinage de x_0.

$f = o(g)$. : f est ngligeable devant g au voisinage de x_0.

$f \sim_{x_0} g$: f et g sont quivalentes au voisinage de x_0.

$f \in C^n(I, \mathbb{R})$: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.

$f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$: La drive droite et gauche en point x_0 (respectivement).

f^{-1} : La fonction rciproque de f.

$D.L$: Dveloppements limits.

$R_n(x)$: Le reste dans la formule de Taylor d'ordre n.

$P_n(x)$: Fonction polynôme d'ordre n.

$\arcsin$: Fonction arcsinus.

$\arccos$: Fonction arccosinus.

$\arctan$: Fonction arctangente.

sh, ch et th : Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques(respectivement).

$argsh, argch$: Fonctions argument (sinus, cosinus) hyperboliques,(respectivement).

$argth$: Fonctions argument tangente hyperboliques.

$deg(P)$: dgr d'un polynme P.

$\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.

$\xi([a, b], \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ valeurs relles.

$f \in B[a, b]$: Les fonctions f est borne sur $[a, b]$.

$f \in R[a, b]$: Les fonctions f est Riemann-intgrable sur $[a, b]$.

$s_\sigma(f)$ $:= \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x$ la somme de Darboux infrieure de f o $m_k = \displaystyle\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

$s_\sigma(f)$ $:= \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x$ la somme de Darboux suprieure de f o $M_k = \displaystyle\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

$R_{\sigma,t}(f)$ $:= \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$ La somme de Riemann de f associe σ o $t = (t_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ $:= [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ l'intervalle limite de f o F une primitive de f sur $[a, b]$.

$\displaystyle\int f(x)dx$ $:= F(x) + c$ l'intervalle illimite de f $[a, b]$ o F une primitive de f et c est une constante quelconque.

(EDL) : Equation diffrentielle linaire.
(EH) : Equation diffrentielle homogne.
(EBr) : Equation diffrentielle de Bernoulli.
(ER) : Equation diffrentielle de Riccati .
(ELg) : Equation diffrentielle de Lagrange.
$PPCM(.,.)$: Le plus petit commun multiple.

Introduction

L'ouvrage suivant est une présentation du cours d'analyse 2 pour le deuxième semestre, pour les étudiants de première année une licence en mathématiques et en informatique.
J'espère aussi que c'est une référence pour les étudiants des classes préparatoires des écoles supérieures et des ingénieurs comme un rappel au moins des concepts de base et des outils d'analyse 2.
Dans le premier chapitre, nous présenterons le concept d'équivalence des fonctions, ainsi que le développements limités des fonctions numériques d'une variable réelle aux voisinage de zéro, d'un point différent de zéro et au voisinage de l'infini, et nous donner aussi le reste de le développements limités aux sense de (Lagrange, Cauchy ...) Nous essayons également de fournir quelques des applications pour le développements limités. Dans le deuxième chapitre, nous expliquerons le concept d'intégrale définie de Riemann et démontrerons les propriétés de base de l'intégration des fonctions bornées aussi bien que continues, sur un intervalle borné et fermé.
Ensuite, nous introduisons le concept des fonctions primitives, nous calculons les fonctions primitives de certaines fonctions usuelles et nous donnons des méthodes pour calculer certaines intégrales.
Dans le chapitre trois, nous étudierons les équations différentielles ordinaires et expliquerons les méthodes de résolution de certaines équations équations différentielles linéaires du premier et du deuxième ordre. Notez également que nous fournirons quelques illustrations, ainsi que de nombreux exemples qui ont été résolus. Nous fournirons également à la fin de chaque chapitre une série d'exercices et de problèmes non résolus, aidant peut-être les élèves à comprendre l'unité.

CHAPITRE 1

FORMULES DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Sommaire

1.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Dans ce section, on considère les voisinages $V_{x_0} \subseteq \mathbb{R}$ de x_0, suivants (selon le cas étudie) $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[- \{x_0\}$, $]x_0, x_0 + \alpha[$, $]x_0 - \alpha, x_0[$ $] - \infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$, tel que $\alpha > 0$.

1.1.1 L'infiniment petit et l'infiniment grand

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur V_{x_0} un voisinage de x_0. Alors, on dit que :

1. La fonctions f est un infiniment petit au voisinage de x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
2. La fonctions f est un infiniment grand au voisinage de x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Exemple 1.1.
1. La fonctions f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$ est un infiniment petit au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. La fonctions f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f = \dfrac{1}{x^2}$ est un infiniment grand au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

1.1.2 Fonctions négligeables

Définition 1.2. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou plus simplement $f = o(g)$.

Remarque 1.1. o est dit aussi le symbole de Landau.

Exemples 1.1. au voisinage de 0, on a

1. $x^3 = o(x^2)$
2. $x^n = o(x^m),\ n > m$
3. $e^{-\frac{1}{|x|}} = o(x^n),\ n \in \mathbb{Z}$
4. $x \ln x = o(1)$
5. $x(\ln|x|)^n = o(1),\ n \in \mathbb{N}$
6. $x^n(\ln|x|)^n = o(1),\ m, n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.1. *Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), alors*

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

En particulier

$$f \underset{x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

1.1.3 Fonctions équivalentes

Définition 1.3. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1.$$

On écrira dans ce cas $f \sim_{x_0} g$.

Remarque 1.2. Si $g \neq 0$ dans un voisinage de x_0, alors

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 1.2. Au voisinage de 0 on a $1 - \cos x \sim_0 \frac{1}{2}x^2$. Car

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}\right)^2 = 1.$$

Exemple 1.3. Soit f une fonction dérivable au point x_0. La fonction f s'écrit au voisinage de x_0 sous la forme

$$f(x) - f(x_0) \sim (x - x_0)f'(x_0) \quad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Si on applique ça au voisinage de 0 aux fonctions usuelles, on obtient :

1. $\sin x \sim_0 x$
2. $\cos x \sim_0 1$
3. $e^x - 1 \sim_0 x$
4. $\tan x \sim_0 x$
5. $\ln(1 + x) \sim_0 x$

Exemple 1.4. Soit f un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad \text{tel que } a_n \neq 0.$$

Alors, $f(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$. En effet, on a

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = a_n x^n h(x) \quad \text{et } \lim_{x \to +\infty} h(x) = 1.$$

Proposition 1.2. *Si $f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2$ alors $f_1 g_1 \sim_{x_0} f_2 g_2$. En particulier $f_1^n \sim_{x_0} f_2^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Si de plus $f_2 \neq 0$ et $g_2 \neq 0$ au voisinage de x_0, alors $\frac{f_1}{f_2} \sim_{x_0} \frac{g_1}{g_2}$.*

Remarque 1.3. La relation $\sim$ est incompatible avec l'addition, c'est-à-dire, si $f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2$ on n'a pas en généralement $f_1 + g_1 \sim_{x_0} f_2 + g_2$, ni $f_1 - g_1 \sim_{x_0} f_2 - g_2$.

Exemple 1.5.

1. $x + 2x^2 \sim_0 x + x^4$ et $x \sim_0 x$ mais $(x + 2x^2) - x$ n'est pas équivalente à $(x + x^4) - x$ au voisinage de 0.
2. Si $f(x) = 2x^3 - x + 4$ et $g(x) = -x^3 + x^2 - 1$, Alors, on a $f(x) \sim_{+\infty} f_1(x) = 2x^3$ et $g(x) \sim_{+\infty} g_1(x) = -x^3$. Mais $f(x) + g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ et $f_1(x) + g_1(x) = 0$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 1.3. *Si f tend vers une limite l en x_0, (l finie ou non) et si $f \sim_{x_0} g$ alors g tend vers l en x_0.*

Démonstration - Supposons $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $f \sim_{x_0} g$, alors il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et } \lim_{x \to x_0} h(x) = 1.$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{l}{1} = l.$$

■

Exemple 1.6. Soient les fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{\tan x}{x}$. On a $f \sim_0 g$, car $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc on obtient $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Théorème 1.1. *On a l'équivalence suivante* $f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow f - g \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow f \underset{x_0}{=} g + o(g)$.

Propriétés 1.1. La relation $\sim$ au voisinage de x_0 est une relation d'équivalence entre les fonctions : elle est symétrique, réflexive et transitive i.e, pour toutes les fonctions f, g, h, on a.

1. $f \sim f$
2. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$
3. $f \sim g$ et $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

1.1.4 Limites et équivalents des fonctions $\sim$

Il est possible d'appliquer la relation d'équivalence des fonctions $\sim$ afin de calculer des limites, notamment pour lever les cas d'indéterminations.

Exemples 1.2.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x(2-x)\tan 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x.2.2x} = \dfrac{1}{8}$. (Ici, $1-\cos x \sim_0 \dfrac{1}{2}x^2$).
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-x).x}{x^2} = -1$.

1.2 Formule de Taylor et développements limités.

La formule de Taylor et ses variables, est une écriture approximative d'une fonction qui est généralement du type C^n (au moins), sous forme de polynômes plus un reste, cependant localement au voisinage d'un point, ce dernier dont on sait mesurer avec précision son erreur.

1.2.1 La formule de Taylor avec reste intégral

Motivation 1.1. Une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0 \in]a,b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0 : $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Celà revient à dire que f est approximée par un polynôme P de degré 1 tel que.

$$P(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0),$$

avec un reste $R(x) = (x-x_0)\varepsilon(x)$ et qui'est tend vers 0 quand x tend vers x_0. La formule de Taylor généralise ce résultat à des fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées (au voisinage de x_0) par des polynômes de degré $n.$

Théorème 1.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $(n \in \mathbb{N})$ sur $[a,b]$ et soit $x, x_0 \in [a,b]$, alors :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \quad (1.1)$$

Remarque 1.4.

1. $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ est la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n, f et x_0
2. Le reste $R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ de Laplace (ou reste inrégral).
3. La formule (1.1), est écrire aussi comme suit
$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$
4. Par le changement de variable $x = x_0 + h$ (et donc $h = x - x_0$) la formule de Taylor (1.1) précédente devient pour tout x_0 et $x_0 + h$ de $[a,b]$:
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \int_{0}^{h} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(h-t)^n dt.$$

Démonstration - Montrons le théorème 1.2, par récurrence sur $k \leq n$:

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1-x_0)^k + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_1-t)^k dt.$$

(Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on remplace x par x_1).

Initialisation : Pour $n = 0$, une primitive de $f'(t)$ est $f(t)$ donc $\int_{x_0}^{x_1} f'(t)dt = f(x_1) - f(x_0)$, et puis $f(x_1) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f'(t)dt$. Sachant que $(x_1 - t)^0 = 1$ et $0! = 1$.

Hérédité : Supposons la formule vraie au rang $k - 1$. Elle s'écrit

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x_1 - x_0)^{k-1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x_1 - t)^{k-1}dt.$$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x_1 - t)^{k-1}dt$. En posant

$$\begin{cases} u(t) = f^{(k)}(t) \\ v'(t) = \dfrac{(x_1 - t)^{k-1}}{(k-1)!} \end{cases} \quad \text{donc, on a,} \begin{cases} u'(t) = f^{(k+1)}(t) \\ v(t) = -\dfrac{(x_1 - t)^k}{k!} \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x_1 - t)^{k-1}dt &= \Big[- f^{(k)}(t)\frac{(x_1 - t)^k}{k!}\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_1 - t)^k dt \\ &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_1 - t)^k dt \end{aligned}$$

Ainsi lorsque l'on remplace cette expression dans la formule au rang $k-1$ on obtient la formule au rang k.
Alors, on conclus, d'aprs le principe de récurrence la formule de Taylor est vraie pour tous les entiers n pour lesquels $f \in C^{n+1}$. ■

Exemple 1.7. Soit $f(x) = e^x$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a f est de classe C^{n+1} et $f^{(n)}(x) = e^x$. Alors, si $x_0 = 1$, nous avons que

$$f(x) = e^x = e\Big[1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!}\Big] + \int_1^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt.$$

Corollaire 1.1. *Si f est une fonction polynôme, de degré inférieur ou égal à n, donc, $f^{(n+1)} = 0$, et nous avons*

$$\forall x \in [a, b] : \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

1.2.2 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 1.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a, b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, $\exists c \in]a, b[$ telle que :*

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (1.2)$$

C'est la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Lagrange $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)$.

Remarque 1.5.

1. $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ est la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n, f et x_0
2. La formule (1.2), est écrire aussi comme suit
$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$
3. Le nombre c est souvent désigné par $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ avec $0 < \theta < 1$.
4. Par le changement de variable $x = x_0 + h$ (et donc $h = x - x_0$) la formule de Taylor (1.2) précédente devient pour tout x_0 et $x_0 + h$ de $[a, b]$:
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Démonstration - La démonstration de théorème 1.3 prcdente consiste à appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction convenablement choisie. (Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on remplace x par $x_1 \in [a, b]$ où $x_1 > x_0$). On pose

$$A = \frac{(n+1)!}{(x_1 - x_0)^{n+1}}\Big(f(x_1) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k\Big),$$

de sorte que

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k + \frac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}A.$$

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.
Pour $x \in]a, b[$, on pose

$$g(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_1 - x)^k + \frac{(x_1 - x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

On remarque que $g(x_0) = f(x_1)$ (grâce au choix de A) et $g(x_1) = f(x_1)$. La fonction g est dérivable sur $]a, b[$ et on a, pour tout $x \in]a, b[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_1 - x)^k + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_1 - x)^k - \frac{(x_1 - x)^n}{n!}A \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n - \frac{(x_1 - x)^n}{n!}A \\ &= \frac{(x_1 - x)^n}{n!}(f^{(n+1)}(x) - A) \end{aligned}$$

Comme La fonction g est satisfait tout les condition de théorème de Rolle. Car g est continue sur $[x_0, x_1]$, dérivable sur $]x_0, x_1[$ et $g(x_0) = g(x_1)$. Alors Il existe donc $c \in]x_0, x_1[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne $A = f^{(n+1)}(c)$. On en déduit bien

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k + \frac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

■

Remarque 1.6. Le théorème reste vraie même si $x_1 < x_0$. En effet, la démonstration précédente ne fait intervenir aucune des conditions $x_1 < x_0$ ou $x_1 > x_0$.

Exemple 1.8. Soit $f(x) = \sin x$, comme $f \in C^{(n)}\Big([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\Big),\ (n \in \mathbb{N})$, et

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \sin\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big).$$

Alors, la formule de Taylor-Lagrange ci-dessus en $x_0 = 0$ à l'ordre 5, pour certain c entre 0 et x devient,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}\sin c.$$

1.2.3 Formule de Taylor-Cauchy

Théorème 1.4. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a, b]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$, alors $\forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, $\exists \theta \in]0, 1[$ telle que :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \tag{1.3}$$

C'est la formule de Taylor-Cauchy d'ordre n avec reste de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

1.2.4 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$. Alors pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$, on a :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x). \quad (1.4)$$

où ε est une fonction définie sur $[a,b]$ telle que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Démonstration - Appliquons la formule de Taylor d'ordre n à la fonction f sur $[x_0, x]$ (on suppose $x_0 < x$). Alors il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^{n+1}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

avec : $c_x = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$.
On a bien $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, car $\lim\limits_{x\to x_0} f^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(x_0)$. ■

Exemple 1.9. Soit $f(x) = \cos x$, comme $f \in C^{(n)}([0,\pi])$, $(n \in \mathbb{N})$, et

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Alors, la formule de Taylor-Lagrange ci-dessus en $x_0 = 0$ à l'ordre 4, et devient,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

Remarque 1.7. La différence essentielle entre les formules est que la formule de Taylor-Young est utilisé localement (c'est à dire sur des intevalles $[x_0, x_0+h]$ et h petit), alors que la formule de Taylor-Lagrange est utilisable sur le segment $[x_0, x_0+h]$ même si h n'est pas petit.

1.2.5 Formule de Taylor-Mac-Laurin

Les formules de Mac-Laurin s'obtiennent à partir de celles de Taylor pour le cas particulier $x_0 = 0$.

Théorème 1.6. *Soit f une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur $[0,x]$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0,x[$, alors $\exists \theta \in]0,1[$ telle que :*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (1.5)$$

Démonstration - On applique le théorème 1.3 ci dessus avec $x_0 = 0$. ■

Remarque 1.8. La formule 1.5 est donnée par le reste de Cauchy, en peut changer le reste pour donner les différentes formules suivantes :

1. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$, (avec reste de Cauchy).
2. $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$, (avec reste de Peano-Young).

Exemple 1.10. Soit $f(x) = e^x$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc en peut appliquant la formule de Mac-Laurin au voisinage de 0 pour $n = 3$, il vient que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}e^c$$

telle que $0 < c < x$. Pour approximation de $e^{0,1}$, (c'est dire $x = 0,1$) dans la formule précédante. Le reste étant petit on trouve alors,

$$e^{0,1} \simeq 1 + 0,1 + 0,05 + \frac{(0,001)}{6} \simeq 1.150166666666667.$$

Corollaire 1.2. *Supposons que la fonction $f^{(n+1)}$ est majorée sur $[a,b]$ par un réel M, alors pour tout $x_0, x \in [a,b]$, on a*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

1.3 Développements limités

Définition 1.4. Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in I$ (sauf pout-être au point x_0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) en x_0 s'il existe un polynôme

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n$$

de degré inférieur ou égale n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I : f(x) = P(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \quad \text{et} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit alors que $P(x)$ est la partie régulière du $D.L$ et $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ est le reste du $D.L$. On écrit le reste sous la forme $o\Big((x-x_0)^n\Big)$.

Remarque 1.9. La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Proposition 1.4. *Si f est de classe C^n au voisinage d'un point x_0 alors f admet un $D.L$ au point x_0 à l'ordre n, qui provient de la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x).$$

Remarque 1.10. 1. Si f est de classe C^n au voisinage d'un point 0, un $D.L$ en 0 à l'ordre n est l'expression : $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$.

2. $f \sim_0 P$.

3. Si f est définie au point 0, on a $f(0) = a_0$, et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$. Alors, f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = a_1$.

Remarque 1.11. La formule de Mac-Laurin-Young exige l'existence de $f^{(n)}(0)$, alors que le développement limité peut exister sans que f soit dérivable en 0. En effet, considérons la fonction :

$$f(x) = 1 + 3x - x^2 + x^3 \ln|x|.$$

On voit bien que f n'est pas définie au point 0, donc elle n'est pas dérivable en ce point. Par contre pour même fonction f où $\varepsilon(x) = x\ln|x|$, on a $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 et le polynme rgulir est $P_2(x) = 1 + 3x - x^2$.

Théorème 1.7. *(L'unicit) Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.*

Démonstration - Supposons que, $\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_kx^k + x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} b_kx^k + x^n\varepsilon_2(x). \end{cases}$

En effectuant la différence on obtient :$\sum\limits_{k=0}^{k=n}(a_k - b_k)x^k + x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$. Lorsque l'on fait $x = 0$ dans cette égalité alors on trouve $a_0 - b_0 = 0$, i.e, $a_0 = b_0$. Ensuite on peut diviser cette égalité par x, on trouve $\sum\limits_{k=1}^{k=n}(a_k - b_k)x^{k-1} + x^{n-1}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = 0$, en évaluant en $x = 0$ on obtient $a_1 = b_1, ...,$ etc. Alors, on trouve $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Les parties polynomiales sont égales et donc les restes aussi. ■

Corollaire 1.3. *Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son $D.L$ en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).*

Démonstration - Posons $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_kx^k + x^n\varepsilon(x)$. Si f est paire alors $f(-x) = f(x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + ... + (-1)^nx^n + x^n\varepsilon(x)$. D'après théorème 1.7 (l'unicité du $D.L$ en 0) on obtient $a_1 = -a_1,\ a_3 = -a_3, ...,$ et donc $a_k = 0$ pour tout k impair. ■

1.4 Développements limités usuels

En utilisant la formule de Mac-Laurin-Young, on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x).\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+x^8\varepsilon(x).\\
shx &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
chx &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).\\
thx &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+x^8\varepsilon(x).\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+....+x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+....+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x).\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-...-\frac{1}{n}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1.1.3.5...(2n-3)}{2^nn!}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{3}{8}x^2+...+(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^nn!}x^n+x^n\varepsilon(x).\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+...+\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}-...-\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x).\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

1.5 Opérations sur les développements limités

Soient f et g ayant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0, i.e,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{k=n} b_k x^k + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^m).$$

Théorème 1.8. *(Troncature) Si une fonction f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au point $x_0 = 0$, alors elle admet un développement limité d'ordre $p \leq n$.*

Exemple 1.11. Nous savons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x).$$

Donc, pour tout $p \leq n$, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^p}{p!} + x^p \varepsilon(x).$$

1.5.1 Développement limité d'une somme et dun produit

Proposition 1.5. *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg admettent un développement limité à l'ordre n. Alors,*

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(x) &= \sum_{k=0}^{k=n} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k + o(x^n). \\ (fg)(x) &= \sum_{k=0}^{k=n} c_k x^k + o(x^n), \textit{tel que } c_k = \sum_{i=0}^{i=k} a_i b_{k-i}. \end{aligned}$$

Exemples 1.3. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 et 4 au voisinage de 0 de

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x} \text{ et } k = [\ln(1+x)]^2 \text{ respectivement.}$$

1. Pour h, posons $f(x) = \ln(1+x)$, et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \text{ et } g(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

   Donc, $\dfrac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.
2. Pour k, on a,

$$\begin{aligned} k(x) = f^2(x) &= [x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)]^2 \\ &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

1.5.2 Développement limité d'un quotient

Proposition 1.6. *Si le nombre $g(0) = Q_n(0) \neq 0$ est non nul, le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0 est*

$$\frac{f}{g}(x) = T_n(x) + o(x^n),$$

où T_n est le quotient à l'ordre n de la division de p_n par Q_n selon les puissances croissantes.

Exemple 1.12. Déterminons le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Au voisinage de 0, les développements limités de $\sin x$ et de $\cos x$ à l'ordre 5 s'écrivent comme suit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne.

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
\cline{2-2}
-x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\cline{1-1}
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 & \\
\cline{1-1}
\frac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

D'où, $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$.

Remarque 1.12. On peut utiliser la méthode suinante pour calculer le dévelopement limité d'un quotient $\frac{f}{g}$, où nous utilisons le D.L de $\frac{1}{1+t}$.

1. Si $b_0 = 1$, on pose $t = \sum_{k=1}^{k=n} b_k x^k + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^m)$, et le quotient s'écrit $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{1+t}$.
2. Si $b_0 \neq 1$ est quelconque avec $b_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant
$$\frac{1}{g} = \frac{1}{b_0} \times \frac{1}{1+t}, \text{ où } t = 1 + \frac{b_1}{b_0}x + ... + \frac{b_m}{b_0}x^m + \frac{1}{b_0}ox(^m).$$
3. Si $b_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

1.5.3 Développement limité d'une composée

Proposition 1.7. *Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (c'est-à-dire $b_0 = 0$), alors $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est obtenu en négligeant les termes de degré supérieur à n du polynôme $(Q_n \circ P_n)(x)$, i.e,*

$$(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{k=n} b_k \Big((P_n(x)) \Big)^k + o(x^n)..$$

Exemple 1.13. Déterminons le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction $h(x) = cos(sin(x))$. Posons $f(x) = \cos x$, et $g(x) = \sin x$, comme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} h(x) = (f\circ g)(x) &= 1 - \frac{1}{2!}\Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big)^4 + x^5\varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + x^5\varepsilon(x). \end{aligned}$$

1.5.4 Développement limité d'une primitive

Proposition 1.8. *Soit F une primitive de f. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 qui s'écrit*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= F(0) + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + x^{n+1}\varepsilon_1(x), \end{aligned}$$

telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(t) = 0$

Exemple 1.14. On a : $(arctanx)' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ...(-1)x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$.
Alors, le développement limité au voisinage de 0 d'ordre $2n+1$ de $arctanx$ est

$$\begin{aligned} \arctan x &= \arctan 0 + \int_0^x (1 - t^2 + t^4 + ...(-1)t^{2n} + t^{2n+1}\varepsilon(x))dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on déduit le corollaire suivant.

1.5.5 Développement limité d'une dérivée

Corollaire 1.4. *Si f est dérivable en 0. Alors f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0, et nous avons*

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(t) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} ka_kx^{k-1} + x^{n-1}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.15. Le développement limité au voisinage de 0 d'ordre 5 de $\sin$ est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x).$$

Alors, le développement limité au voisinage de 0 d'ordre 4 de $\cos$ est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x).$$

1.5.6 Développement limité en point quelconque $x_0 \neq 0$ et à l'infini ∞

Définition 1.5. Soient f une fonction définie sur un voisinage d'un point x_0, sauf peut-être en x_0 et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

où $a_i,\ 0 \leq 1 \leq n$, sont des nombres réels et ε une fonction tendant vers 0 quand x tend vers x_0.

Remarque 1.13. Pour développer une fonction f au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$ on peut toujours se ramener à le cas si $x_0 = 0$ en faisant le changement de variable $t = x - x_0$. Dans ce cas là, on a

$$f(x) = f(t + x_0) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n + t^n\varepsilon(x)$$

Définition 1.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (ou bien de la forme $]-\infty, a]$). On dit que f admet un D.L en $+\infty$ à l'ordre n si la fonction $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Dans ce cas le développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ est donné par

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \text{ telle que } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exemple 1.16.

1. Déterminons le développement limité d'ordre 3 en 2 de la fonction $f(x) = e^x$. Posons, $\begin{cases} t = x - 2 \\ g(t) = f(t+2), \end{cases}$ alors $t \to 0$ si $x \to 2$, donc au point 0 on a

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} g(t) = e^{t+2} &= e^2\left[1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right] \\ \Rightarrow e^x &= e^2\left[1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + o((x-2)^3)\right]. \end{aligned}$$

2. Déterminons le développement limité d'ordre 3 en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Posons, $\begin{cases} t = \dfrac{1}{x} \\ g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right), \end{cases}$ dans ce cas là $t \to 0$ si $x \to +\infty$, donc au point 0 on a

$$g(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3).$$

Par suite donc le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

1.6 Applications des développements limités

1.6.1 Calcule des limites

Les développements limités sont trés utiles dans la recherche des limites de fonctions et l'étude des formes indéterminées.

Exemples 1.4. 1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{tanx - \sin(x)}{x^3}$.
Au voisinage de 0, on a :

$$tanx = x + \frac{1}{3}x^3 + x^4\varepsilon(x) \;\text{ et }\; \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x).$$

Donc

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{x^3}{3!}) + x^4\varepsilon(x)}{x^3} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x^4\varepsilon(x)}{x^3}.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x-2}$.
On pose pour $x > 0$, $t = \dfrac{1}{x}$ avec $t > 0$. On a

$$f\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{t}(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{t}(1+t^2-2t^3)^{\frac{1}{3}}$$

Or au voisinage de 0,

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u), \quad (1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u + o(u), \text{telle que } u = t+t^2, \text{ou } u = t^2 - 2t^3.$$

Donc

$$(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t), \quad (1+t^2-2t^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + o(t).$$

Ainsi $f\Big(\dfrac{1}{t}\Big) = \dfrac{1}{t}\Big(\dfrac{1}{2}t + o(t)\Big) = \dfrac{1}{2} + o(1)$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

1.6.2 Détermination des branches infinies

Définition 1.7. Rappel Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ (ou bien de la forme $]-\infty, x_0[$) et (C) la courbe représentative de f (dans un repère du plan).

1. Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = +\infty$, (respctivement $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) = +\infty$), alors la droite $(\Delta) : x = x_0$ est asymptote verticale à (C) en x_0 (et idem à gauche ou à droite en x_0).

2. Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}.$, alors la droite $(\Delta) : y = l$ est asymptote horizontale en $\pm\infty$.
3. S'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}, \ (a \neq 0)$ telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite $(\Delta) : y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

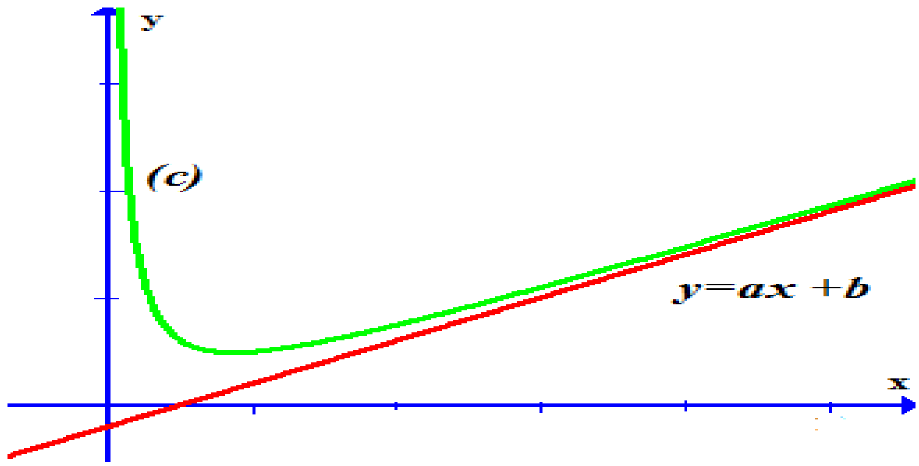


FIGURE 1.1 – Courbe représentative de (C) et son asymptote en $+\infty$.

Proposition 1.9. *On suppose que la fonction* $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ *admet un D.L en* $+\infty$ *(où* $-\infty$*) telle que*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + o\Big(\frac{1}{x^k}\Big)$$

où k *est le plus petit entier supérieur ou égal* 2 *tel que le coefficient de* $\dfrac{1}{x^k}$ *soit non nul. Alors* $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} [f(x) - (a_0x + a_1)] = 0$ *(resp en* $-\infty$ *). Donc la droite* $(\Delta) : y = a_0x + a_1$ *est asymptote oblique à la courbe de* f *en* $+\infty$ *(resp en* $-\infty$*).*

Remarque 1.14. La position de (C) par rapport à (Δ) est donné par le signe de $f(x) - y$ au voisinage $\pm\infty$.

Démonstration - On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (a_0x + a_1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \Big[\dfrac{a_k}{x^{k-1}} + o\Big(\dfrac{1}{x^{k-1}}\Big)\Big] = 0.$
Donc $y = a_0x + a_1$ est une asymptote à la courbe de f. ■

Exemple 1.17. Déterminer les asymptotes obliques (s'il existent) de la fonction f définie par $f(x) = xe^{\dfrac{2x}{x^2 - 1}}$.
Au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$), on a :

$$f(x) = x + 2 + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Donc $(\Delta) : y = x + 2$ est asymptote à C en $\pm\infty$.

1.7 Exercices et problèmes

Exercice 1.1. La fonction f définie par $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ possèdent-elle des développements limités au voisinage de 0 à l'ordre $3, 4, 5$?.

Exercice 1.2. Soit La fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \;\; x \neq 0 \\ f(x) = 1 & si \;\; x = 0, \end{cases}$

1. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

Exercice 1.3. Donner un développement limité des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^x, \quad n = 3.$
2. $f(x) = \cos x, \quad n = 4.$
3. $f(x) = \sin x, \quad n = 5.$
4. $f(x) = shx, \quad n = 3.$

Exercice 1.4.

1. Soit $\alpha > 0$. Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$.
2. En déduire le D.L à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

   (a) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   (f) $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}$

Exercice 1.5. Donner la formule de Taylor-Mac-Laurent des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^{2x}, \quad n = 3.$
2. $f(x) = \cos(4x), \quad n = 4.$
3. $f(x) = ch4x, \quad n = 3.$
4. $f(x) = sh3x, \quad n = 5.$
5. $f(x) = \ln(2 - x^3), \quad n = 4.$
6. $f(x) = \sin(2 + x^2), \quad n = 3.$

Exercice 1.6. On définit f sur $]-\infty, 1[$ par : $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en point $x_0 = 0$.

Exercice 1.7.

1. Montrer que $(1 + x + x^2) \sim x^2$ en $+\infty$.
2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $((1+x)^\alpha - 1) \sim x$ en point 0.

Exercice 1.8. Donner le D.L d'ordre 3 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

1. $f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}$.
2. $f(x) = e^{\cos x}$.
3. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
5. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$.
6. $f(x) = \dfrac{2\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)}$.

Exercice 1.9. Donner le D.L à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

1. $f(x) = e^x \ln(1+x)$.
2. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.
4. $f(x) = tanx$.

Exercice 1.10. Donner le D.L d'ordre 4 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

1. $f(x) = (1+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}$.
2. $f(x) = e^{\cos x}$.
3. $f(x) = \sin(e^x)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
5. $f(x) = \ln(4+e^{3x})$.
6. $f(x) = \ln(1+shx)$.
7. $f(x) = \arcsin(chx)$.
8. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.
9. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

Exercice 1.11. Donner un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 3,\ x_0 = 1$.
2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad n = 3,\ x_0 = 1$.
3. $f(x) = \sin x, \quad n = 5,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.
4. $f(x) = \tan x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 1.12. Calculer les limites suivantes en utilisant soit les fonctions équivalente ou le D.L

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)e^{\frac{1}{x^2}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\sin s}{1-\cos x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Exercice 1.13. Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies par :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\Big(\dfrac{1}{1+x^2} - \cos x\Big)$.
2. $g(x) = \dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.
3. $h(x) = \dfrac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2}$.
4. $k(x) = \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Exercice 1.14. Soit la fonction f définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

1. Donner le D.L à l'ordre 4 au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) de f.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique quand x trnd vers $\pm\infty$.
3. Préciser sa position relative par rapport à cette asymptote.

Exercice 1.15. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$ de deux façons :

1. (a) Par composition de développements limités.
   (b) En commençant par calculer le développement limité de f'.
2. En déduire $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Exercice 1.16. Soit f la fonction définie sur $]-4,-2[$, par $f(x) = (x^2+3x+6x-10)\ln\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)$

1. Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la forme
$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x},$$
où α, β et γ sont des réels non nuls.
2. En déduire le comportement de la courbe représentative de f à $+\infty$ et à $-\infty$. (Asymptote, position par rapport à l'asymptote et dessin).

Exercice 1.17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Exercice 1.18. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \ln x$.
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln n$, montrer que
$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\Big(\frac{\ln n}{n}\Big)$$

CHAPITRE 2

INTÉGRALE DE RIEMANN ET CALCUL DE PRIMITIVES

Sommaire

2.1 Intégrale de Riemann

Motivation 2.1. Dans ce chapitre nous présenterons le concept d'intégration de Riemann pour des fonctions finies ainsi que continues sur un intervalle compact (borné et fermé $[a, b]$), mais avant cela Nous essaierons de expliquer le debut de l'idée de ce concept mathématique important.

1. On divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalle égaux, et pour chaque sous-intervalle, nous construisons un rectangle s'étendant de l'axe xx' à tout point de la courbe $y = f(x)$ au-dessus du sous-intervalle. Peu importe un point particulier (voir figure 2.1).
2. Pour chaque n, l'aire totale des rectangles peut être présentée comme une approximation de l'aire exacte sous la courbe à travers l'intervalla $[a, b]$. De plus, il est intuitivement évident qu'avec une augmentation de n, ces approximations s'amélioreront mieux et l'aire exacte se rapprochera d'un maximum (voir figure 2.2).

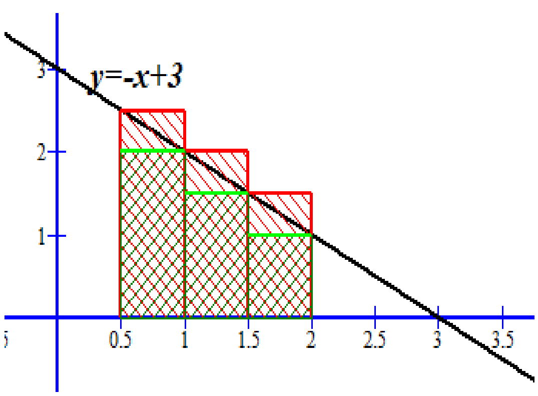


FIGURE 2.1 – Une subdivision moins fine

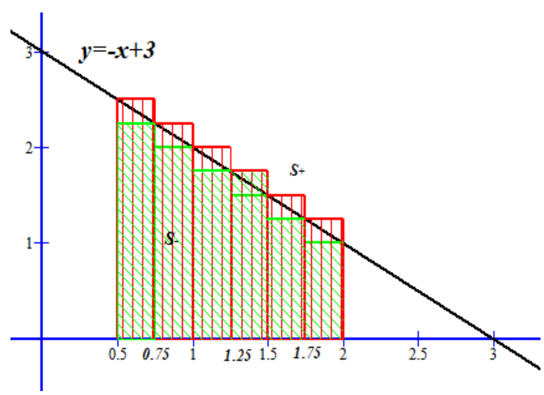


FIGURE 2.2 – Une subdivision plus fine

Pour illustrer davantage cette idée, nous donnons une approximation de l'aire sous la courbe $y = -x + 3$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Nous allons commencer par diviser l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ et prendre ces deux subdivision $\sigma_+ = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ et $\sigma_- = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$, alors, on a $S_+ = \frac{1}{2}\left\{\frac{5}{2} + 2 + \frac{3}{2}\right\} = 3$, et $S_- = \frac{1}{4}\left\{\frac{9}{4} + 2 + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1\right\} = \frac{39}{16}$.

Comme $S = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{21}{8}$, donc, on obtient

$$S_- = \frac{39}{16} \simeq 2.44 < S = \frac{21}{8} \simeq 2.63 < S_+ = 3.$$

2.2 Intégrales de fonctions en escalier.

Nous allons tout d'abord donner la définition d'une subdivision associée à un intervalle fermé borné $[a, b]$.

2.3 Subdivision d'un segment

Définition 2.1. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ toute suite $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ finie strictement croissante tels que

$$a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

On appelle le pas de la subdivision σ la quantité donné par $\delta(I) = \sup\limits_{0\leq k\leq n-1}\{x_{k+1} - x_k\}$.

Remarque 2.1. Une subdivision de $[a, b]$ est régulière si tous les $x_{k+1} - x_k$ sont égaux, et dons ce cas là, on a $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n},\ k \in \{0, 1, ..., n\}$. Le nombre $\delta = \dfrac{b-a}{n}$ est le pas uniforme de cette subdivision.

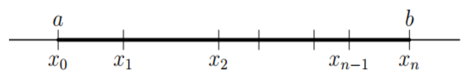


FIGURE 2.3 – Subdivision de $[a, b]$.

Exemple 2.1. Soit l'intervalle $I = [0, 1]$, alors

1. $\sigma_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $\sigma_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ et $\sigma_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}1\right\}$ sont des subdivisions de I et il est claire que elle sont uniformes de pas respectivement $\delta_1 = \dfrac{1}{2},\ \delta_2 = \dfrac{1}{3}$ et $\delta_3 = \dfrac{1}{4}$
2. $\sigma_2 = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, (où $n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2$) est une autre subdivision, mais cette fois le pas est égale a $\delta = \dfrac{1}{n}$.

2.4 Subdivision plus fine qu'une autre

Définition 2.2. Soit σ_1 et σ_2 deux subdivisions d'un segment $[a, b]$. On dit que σ_1 est plus fine que σ_2 si et seulement si tout élément de la famille σ_2 est élément de la famille σ_1, c'est-à-dire $\sigma_2 \subset \sigma_1$.

Exemple 2.2. Dans l'exemple 2.1, on a σ_3 est plus fine que σ_1.

Proposition 2.1. *Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions d'un segment $[a, b]$. Il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ_1 et σ_2.*

Démonstration - Il suffit de considérer la famille $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq N}$ dont les éléments sont ceux de σ_1 et ceux de σ_2 ordonnés dans l'ordre croissant et où N est le cardinal de la famille ainsi construite. σ est plus fine que σ_1 et σ_2. ■

2.4.1 Fonction en escalier

Définition 2.3. Soit f est une fonction définie sur l'intervalla $I = [a, b]$. On dit f en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. du $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, i.e.,

$$\forall k \in \{0, 1, .., n\},\ \exists c_k \in \mathbb{R},\ x \in]x_k, x_{k+1}[: \quad f(x) = c_k.$$

On dit alors que la subdivision σ est associée à f.
On notera $\xi([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles

Exemple 2.3. La fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 3]$ par $f(x) = [x]$, (partie entière de x), est une fonction en escalier.

Proposition 2.2. *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\mid f \mid$, $f + g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$.*

Remarque 2.2.
1. Si σ est une subdivision associée à f alors toute subdivision plus fine est encore associée à f.
2. Une fonction constante est une fonction en escalier.

Proposition 2.3. *Toute fonction $\varphi \in \xi[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.*

Démonstration - Soient φ une fonction en escalier et $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. une subdivision qui lui est associée. On a donc

$$\forall k \in \{0, 1, .., n\},\ \exists c_k \in \mathbb{R},\ x \in]x_k, x_{k+1}[: \quad \varphi(x) = c_k.$$

En posant $M_1 = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \{\mid c_k \mid\}$, et $M = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \{M_1, \mid \varphi(x_0) \mid, ..., \mid \varphi(x_n) \mid\}$, alors, nous avons que $\forall x \in [a, b] : \quad \varphi(x) \leq M$. ■

2.5 Intégrale de Riemann d'une fonction en escaliers

Définition 2.4. Soit une fonction en escalier $\varphi \in \xi[a, b]$ et $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. une subdivision associée à φ. Soient $c_k \in \mathbb{R},\ (k \in \{1, ..., n-1\})$ tels que :
$\forall x \in]x_k, x_{k+1}[: \quad \varphi(x) = c_k$. On définit l'intégrale de la fonction φ entre a et b comme étant le nombre réel

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k(x_{k+1} - x_k).$$

Exemple 2.4. Pour $\varphi(x) = [x]$. Alors $\displaystyle\int_{-1}^{3} \varphi(x)dx = -1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 2.$

Théorème 2.1. *Soient φ une fonction en escalier sur $[a; b]$ et et $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. une subdivision associée à φ, et que sur $]x_k; x_{k+1}[$, φ prenne la valeur c_k, $(k \in \{1, ..., n-1\})$. Le réel $I_\sigma = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} c_k(x_{k+1} - x_k)$ est indépendant du choix de la subdivision σ associée à φ.*

Démonstration - Soit σ et σ' deux subdivisions associées à φ. On suppose pour commencer que σ' est plus fine que σ Soit $\sigma : a = x_0, < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, l'on pouvait écrire σ' sous la forme $\sigma : a = x_{0,0} < x_{0,1} < ...x_{0,k_0} < x_{1,1} < ....x_{n-1,1} < ... < x_{n-1,k_{n-1}} < x_n = b$ avec $x_{k,i_k} = x_{k+1}$ Maintenant, puisque φ prend la valeur c_k sur l'intervalle $]x_k; x_{k+1}[$, φ prend aussi la valeur c_k sur les intervalles $]x_{k-1,i_{k-1}}, x_{k,1}[,]x_{k,1}, x_{1,2}[, ...,]x_{k,i_k-1}, x_{k,i_k}[$. En posant $x_{k,0} = x_{k-1,i_{k-1}}$, on a donc

$$I_{\sigma'} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{j=1}^{i_k} c_k(x_{k,j} - x_{k,j-1}) = \sum_{k=0}^{k=n-1} c_k \sum_{j=1}^{i_k} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) = \sum_{j=1}^{i_k} c_k(x_{k+1} - x_k) = I_\sigma.$$

Soient maintenant σ et σ' deux subdivisions associées à φ quelconques. On sait que $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ'. D'après ce qui précède, on a donc $I_\sigma = I_{\sigma\cup\sigma'} = I_{\sigma'}$. ∎

Remarque 2.3.

1. Si φ est la fonction constante égale à 1 (sauf en un nombre fini de points), alors $I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx = b - a$.
2. Si φ est la fonction identiquement nulle sauf en un nombre fini de points, alors $I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)dx = 0$.

Propriétés 2.1. Soient $f, g \in \xi[a, b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

1. Si f est positive, alors $I(f) = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. (Linéarité) $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration -

1. Ceci résulte directement de la définition, car tous les termes de la somme sont positifs.
2. Si σ_f une subdivision adaptée à f et σ_g une subdivision adaptée à g, il e clair que $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$ adaptée à $\lambda f + \mu g$. La calcul de $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx$ à partir de σ, donne immédiatement le résultat.

∎

On générale, on a les propriétés suivantes,

Propriétés 2.2. Soient $f, g \in R[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $\lambda f \in \mathbb{R}$.
2. $f + g \in \mathbb{R}$.

3. Si $f \geq 0$, alors $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

4. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

   En particulier, on a

$$|\int_a^b f(x)dx |\leq \int_a^b | f(x) | dx.$$

Démonstration - On montre 4. Comme $g - f$ est positive, alors, par linéarité, on a

$$\int_a^b (g-f)(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{ d'où le résultat.}$$

D'après l'inégalité $- | f(x) |\leq f(x) \leq| f(x) |$ pour tout $x \in [a, b]$. On en déduit

$$-\int_a^b | f(x) | xd \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b | f(x) | dx.$$

On a donc,

$$|\int_a^b f(x)dx |\leq \int_a^b | f(x) | dx.$$

■

Proposition 2.4. *(Relation de Chasles) Soit f une fonction en escalier sur le segment $[a; b]$ et $c \in]a, b[$. Alors,*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Démonstration - Soit σ une subdivision associée à f. On prend σ_c la subdivision définie par $\sigma_c = \sigma \cup \{c\}$. Par le théorème 2.1, et avec cette subdivision le résultat est immédiat. ■

2.6 Intégrale d'une fonction bornée sur segment $[a, b]$

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ et à valeurs réelles. On note les fonctions bornée sur $[a, b]$ par $B[a, b]$.
Soit $f \in B[a, b]$, on pose :

$$\xi_-[a, b] = \{\psi \in \xi[a, b] : \ \forall x \in [a, b], \ \psi(x) \leq f(x)\},$$

$$\xi_+[a, b] = \{\varphi \in \xi[a, b] : \ \forall x \in [a, b], \ f(x) \leq \varphi(x)\}.$$

Les deux ensembles $\xi_+[a, b]$ et $\xi_-[a, b]$ ne sont pas vides. En effet, puisque f est bornée sur $[a, b]$, donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ vérifiant,

$$\forall x \in [a, b] : \ m \leq f(x) \leq M.$$

Alors, on peut choisir les fonctions en escalier φ et ψ comme suit

$$\forall x \in [a, b] : \ \varphi(x) = M \text{ et } \psi(x) = m.$$

Donc ce cas là, on a $\varphi(x) \in \xi_+[a, b]$ et $\psi \in \xi_-[a, b]$.
On pose aussi :

$$I_1 = \{I(\psi) : \ \psi \in \xi_-[a, b]\} \text{ et } I_2 = \{I(\varphi) : \ \varphi \in \xi_+[a, b]\}.$$

D'autre part, pour toute $\psi \in \xi_-[a, b]$ et $\varphi \in \xi_+[a, b]$, on a

$$\forall x \in [a, b] : \psi(x) \leq \varphi(x) \Rightarrow I(\psi) \leq I(\varphi)$$

c'est-à-dire la partie I_1 n'est pas vide et est majorée, elle admet, donc une borne supérieure, et également en cequi concerne la partie I_2, elle n'est pas vide et minorée, don elle accepte une borne inférieure. Par conséquent, nous posons :

$$I_- = \sup I_1 \text{ et } I_+ = \inf I_2.$$

Définition 2.5. Soit $f \in B[a, b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si $I_- = I_+$. On note

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = I_- = I_+.$$

On note l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann par $deCauchy.$

Remarque 2.4. Il est utile de noter que si f est une fonction intégrable sur I alors f est bornée.

2.6.1 Critère d'intégrabilité de Cauchy

Théorème 2.2. *Soit $f \in B[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \leq f \leq \varphi_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)(x)dx = 0.$$

Démonstration -

1. Si f est intégrable alors $I_- = I_+ = I(f)$. Par la caractérisation du borne supérieure, il existe une suite $\psi \in \xi_-[a, b]$ et $\varphi \in \xi_+[a, b]$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

D'où le résultat dans un sens.

2. Inversement, si il existe des suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \leq f \leq \varphi_n \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)(x)dx = 0.$$

Alors comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_a^b \psi_n(x)dx \leq I_- \leq I_{+\leq} \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$

on en déduit que

$$I_+ - I_- \leq \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)(x)dx,$$

Ce qui prouve que $I_+ = I_-$. De plus on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_- - \int_a^b \psi_n(x)dx \leq \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]dx,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_a^b \varphi_n(x)dx - I_+ \leq \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]dx,$$

On conclut facilement maintenant.

■

Remarque 2.5. le théorème 2.2 est équivalente à la condition suivante

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi_\varepsilon,\ \psi_\varepsilon \in \xi[a,b], \quad \forall x \in [a,b] : \quad \varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \\ \text{et} \quad \displaystyle\int_a^b (\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)dx \leq \varepsilon \end{cases}$$

Propriétès 2.3. Soient $f, g \in R[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $\lambda f \in R[a,b]$.
2. $f + g \in R[a,b]$.
3. Si $f \geq 0$, alors $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. $fg \in R[a,b]$.

Démonstration - Comme $f,\ g \in \mathbb{R}$. Alors, il existe des suites $(\psi_n),\ (\varphi_n),\ (\theta_n)$ et (ϑ_n) de fonctions en escalier telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n \leq f \leq \varphi_n \text{ et } \theta_n \leq g \leq \vartheta_n, \tag{2.1}$$

d'après (2.1), on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \vartheta_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

1. (a) Si $\lambda > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda\psi_n \leq \lambda f \leq \lambda\varphi_n$, on passe à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\psi_n(x)dx = \int_a^b \lambda f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(x)dx.$$

   Donc, $\lambda f \in R[a, b]$.

   Mais, d'après propriéte 2.1, on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\psi_n(x)dx = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx$ et $\lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(x)dx$, on obtient donc, $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

   (b) Si $\lambda > 0$, on inverse les inégalités, mais les arguments sont les mêmes.

   (c) Pour $\lambda = 0$ est évident.

2. On utilisant (2.1), nous avons que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \psi_n + \theta_n \leq f + g \leq \varphi_n + \vartheta_n. \tag{2.2}$$

   Si on passe à la limite dans (2.2), on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_a^b [\psi_n + \theta_n](x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \theta_n(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_a^b [\varphi_n + \vartheta_n](x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \vartheta_n(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

   On conclut facilement maintenant.

3. Soit la fonction en escalier φ défine par $\forall x \in [a, b] : \ \varphi(x) = 0$. Alors, on obtient $0 \leq I_- = I_+$.

4. Montrons 5. Supposons que f et g sont positives. D'après (2.1), et comme $f, \ g$ sont bornées, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \psi_n \leq f \leq \varphi_n \leq M \ \text{ et } \ 0 \leq \theta_n \leq g \leq \vartheta_n \leq M. \tag{2.3}$$

$$\int_a^b (\varphi_n - \psi_n)dx < \frac{\varepsilon}{2M} \ \text{ et } \ \int_a^b (\vartheta_n - \theta_n)dx < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.4}$$

   Comme tous les mombres des inégalités (2.3) sont positives, alors, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq \psi_n\theta_n \leq fg \leq \varphi_n\vartheta_n,$$

et

$$\begin{aligned} 0 \le \varphi_n \vartheta_n - \psi_n \theta_n &= \varphi_n(\vartheta_n - \theta_n) + \theta_n(\varphi_n - \psi_n) \\ &\le M(\vartheta_n - \theta_n) + M(\varphi_n - \psi_n). \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_a^b (\varphi_n \vartheta_n - \psi_n \theta_n)dx \le M \int_a^b (\vartheta_n - \theta_n)dx + M \int_a^b (\varphi_n - \psi_n)dx < \varepsilon.$$

Ceci montre que fg est intégrable.
Dans le cas général, comme $f,\ g$ sont bornées il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que les fonctions $A + f$ et $A + g$ soient positives. Alors, selon ce qui précède le produit $(A + f)(A + g) \in R[a, b]$. Comme on a $fg = (A + f)(A + g) = fg + A(f + g) + A^2$ et $A(f + g),\ A^2 \in R[a, b]$. Alors, par conséquant, fg l'est aussi.

■

Exemple 2.5. Soit la fonction f défine par $f(x) = 2x$ sur $[0, 1]$. On considère la subdivision uniformme $\sigma : \left(\frac{k}{n}\right),\ k \in \{0, 1, ..., n,\}$ et on définit les fonctions en escalier $\psi_n,\ \varphi_n$ sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[,\ (k = 0, 1, ..., n - 1)$ par $\varphi_n(x) = \frac{2k}{n},\ \psi_n(x) = \frac{2(k+1)}{n}$, et on a donc $\varphi_n \le f \le \psi_n$. Calculons les intégrales maintenant

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2k}{n}\frac{1}{n} = \frac{2(n-1)}{2n}.$$

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2k}{n}\frac{1}{n} = \frac{2(n+1)}{2n}.$$

Donc on a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{2(n-1)}{2n} \le I_- \le I_+ \le \frac{2(n+1)}{2n}. \tag{2.5}$$

On passe à la limite dans (2.5), on obtient

$$I_- = I_+ = 1 = I(f)$$

Exemple 2.6. (Une fonction bornée, non intégrable) Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & si\ x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Il est clair que f est bornée, car $\forall x \in [0, 1] : 0 \le f \le 1$. Posons

$$I_1 = \{I(\varphi) : \varphi \in \xi_-[0, 1]\} \text{ et } I_2 = \{I(\psi) : \psi \in \xi_+[0, 1]\}.$$

Alors, on a $\varphi \in \xi_-[0, 1] \Rightarrow \varphi \le 0$ et $\psi \in \xi_+[0, 1] \Rightarrow \psi \ge 1$. Si on choisir les fonctions en escalier $\varphi_0 = 0$ et $\psi = 1$, on a donc

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \le \int_0^1 \varphi_0(x)dx = 0 \text{ et } \int_0^1 \psi(x)dx \ge \int_0^1 \psi_0(x)dx \ge 1.$$

Donc $I_- = \sup I_1 = 0$ et $I_+ = \inf I_2 = 1$. Comme $I_- \ne I_+$ alors f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

2.7 Sommes de Darboux.

Soit f une fonction dans $B[a,b]$. Pour définir son intégrale, on va approcher f par des fonctions en escalier. Donc, on a posin a une subdivision $\sigma\,:\,a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$. Puis, on pose

$$\forall k \in 1,\ldots,n :\ m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k} f(x) \text{ et } M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k} f(x).$$

On définit les fonctions en escalier pour tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$ et $\forall k \in 1,\ldots,n$ par,

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \tag{2.6}$$

et

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x). \tag{2.7}$$

Alors, nous avons donc, les définitions suivantes

Définition 2.6. (Sommes de Darboux) On appelle somme de Darboux inférieure de f associée à σ l'intégrale de la fonction en escalier (2.6) tel que

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})M_k$$

et somme de Darboux supérieure de f associée à σ l'intégrale de la fonction en escalier (2.7) tel que

$$s_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})m_k.$$

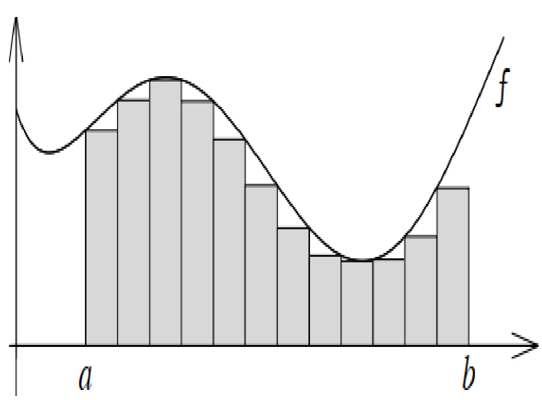


FIGURE 2.4 – Approximation de l'intégrale de f par une somme de Darboux inférieure

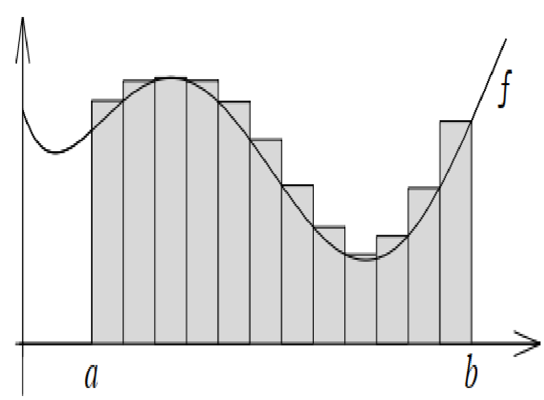


FIGURE 2.5 – Approximation de l'intégrale de f par une somme de Darboux supérieure

Proposition 2.5. *Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$ telle que σ' soit plus fine que σ, alors, on a*

$$s_\sigma(f) \le s_{\sigma'}(f) \le S_\sigma(f) \le S_{\sigma'}(f).$$

Proposition 2.6. *la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intérvalle $[a, b]$ si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivisions σ de $[a, b]$ tel que*

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) < \varepsilon.$$

Exemple 2.7. Soit la fonction $f(x) = x^2$, et $[a, b] = [0, 1]$, on calcule $\int_0^1 f(x)dx$.
Posons $\sigma : (x_k) = (\frac{k}{n})$, $\Delta x = (x_{k-1} - x_k) = \frac{1}{n}$ et $k \in \{1, ..., n\}$, alors, on a

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} x^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}, \text{ et } M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} x^2 = \frac{k^2}{n^2}.$$

Les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f associée à σ sont

$$s_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n} m_k\Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n}(k-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k\Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Donc, on a

$$\lim_{n\to+\infty}(S_\sigma - s_\sigma) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Par conséquence f est intégrable sur $[0, 1]$, et on a

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to+\infty} S_\sigma = \lim_{n\to+\infty} s_\sigma = \frac{1}{3}.$$

2.8 Quelques fonctions Riemann-intégrables

2.8.1 Les fonctions monotones

Théorème 2.3. *Chaque fonction monotone sur l'intervalle $[a, b]$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration -

1. Si $f \equiv 0$ sur $[a, b]$, donc f est en escalier, c'est-à-dire $f \in R[a, b]$.
2. Si $f \in R[a, b]$ alors on a aussi $-f \in R[a, b]$. Donc, il suffit de prouver le théorie pour les fonctions croissante et bornée sur $[a, b]$.
3. Posons $f \in B[a, b]$, et croissante. Soit la subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$, on a don

$$\forall k \in \{1, ..., n\} : \; f(x_{k-1}) \le m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} \le M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} \le f(x_k).$$

Alors on a

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})(M_k - m_k) \leq \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant la subdivision uniforme $\sigma = \left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$. Alors, on peut choisir n à la forme qui vérifie l'inégalité suivante $\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a)}{n} < \varepsilon$. Par conséquent, d'après l'inégalité précédente, on a

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) \leq \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a)}{n} < \varepsilon.$$

■

Exemple 2.8. Voir l'exemple 2.7.

2.8.2 Les fonctions continues

Théorème 2.4. *Chaque fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration - Comme $f \in B[a, b]$ est continue, alors elle est uniformément continue sur $[a, b]$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in [a, b] : \; |x - x'| > \alpha \Rightarrow | f(x) - f(x') | < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant la subdivision uniforme $\sigma = \left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$. On définit les fonctions en escalier ψ et φ par

$$\forall x \in]x_{k-1}, x_k[: \; \psi(x) = f(x_k) - \varepsilon, \; \psi(x_k) = f(x_k),$$

$$\forall x \in]x_{k-1}, x_k[: \; \varphi(x) = f(x_k) + \varepsilon, \; \varphi(x_k) = f(x_k).$$

Cela donne $\forall x \in [a, b] : \; \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Dutre part on a

$$\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx = 2\varepsilon \int_a^b dx = 2\varepsilon(b-a).$$

Ce qui signifie que f est intégrable. ■

Exemple 2.9. Soit $f(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, \dfrac{\pi}{2}]$ et $\sigma : \left(\dfrac{k\pi}{2n}\right), \; (k \in \{1, ..., n\})$. Alors, on a

$$S_\sigma(f) - s_\sigma(f) = \frac{\pi}{2n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_\sigma(f) = 1$

2.9 Sommes de Riemann

Soit f une fonction dans $B[a, b]$. Pour définir son intégrale, on va approcher f par des fonctions en escalier. Donc, on a posin a une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$ et la famaille $t = (t_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Définition 2.7. On appelle somme de Riemann de f associée à σ le réel

$$R_{\sigma,t}(f) = \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k).$$

Remarque 2.6. Si on pose $\phi(x) = f(t_k), \ \forall x \in [x_{k-1}, x_k]$. Alors la somme de Riemann $R_{\sigma,t}(f)$ devient l'intégrale de la fonction en escalier ϕ.

De la propriété 2.2 pour les fonctions en escalier, on déduit que ces sommes vérifient la propsition suivantes

Proposition 2.7.

$$s_\sigma(f) \leq R_{\sigma,t}(f) \leq S_\sigma(f).$$

Démonstration - Ceci résulte du fait que si $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a, b]$, alors pour tout $k = 1, ..., n$, on a

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \leq f(t_k) \leq \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

■

Théorème 2.5. *Soit $f \in B[a, b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur l'intérvalle $[a, b]$ si et seulement s'il existe un réel l vérifié*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta, \ \forall \sigma \text{ de } [a, b] : \ \delta(\sigma) < \eta \Rightarrow \mid R(f) - l \mid < \varepsilon.$$

Dans ce cas là $l = \int_a^b f(x)dx$.

Corollaire 2.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors les deux suites suivantes :*

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\big(a + k\frac{(b-a)}{n}\big) \text{ et } v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\big(a + k\frac{(b-a)}{n}\big)$$

sont convérgentes vers la même limite, et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \int_a^b f(x)dx.$$

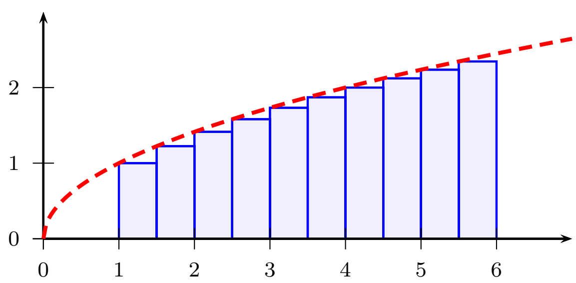


FIGURE 2.6 – Approximation de l'intégrale de f par u_n

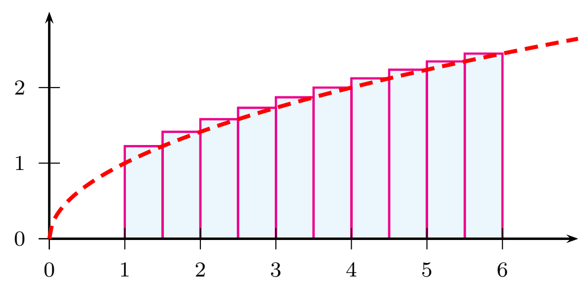


FIGURE 2.7 – Approximation de l'intégrale de f par v_n

Remarque 2.7. (Cas particulier) Si $[a, b] = [0, 1]$, alors, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\big(\frac{1}{n}\big) \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\big(\frac{1}{n}\big).$$

Exemples 2.1. 1. On calcule la limite de la suite suivante : $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

On peut écrire u_n comme suit $u_n = \dfrac{1}{n}\Big(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + ... + \sqrt{\dfrac{n}{n}}\Big)$. Alors u_n est une suite de Riemann associée la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur et $[0, 1]$, donc, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2. La somme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{n}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 xdx$

2.9.1 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Propriétés des fonctions intégrables au sens de Riemann est dérivée des propriétés des fonctions en escalier intégrables.

Propriétés 2.4. Soient $f, g \in R[a, b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

1. $\lambda f \in R[a, b]$.
2. $f + g \in R[a, b]$, et $fg \in R[a, b]$.
3. Si $f \geq 0$, alors $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
4. Si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. $|\displaystyle\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b | f(x) | dx$.

6. Pour tout $c \in]a, b[$ on a $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasle).

7. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

8. Si f continue et positive, alors $\int\limits_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$

9. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

Nous allons démontrer certaines de ces propriétés et laisser le reste au lecteur

Démonstration -

1. $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})(\lambda f)(t_k) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k) = \lambda \int_a^b f(x)dx$

2.

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1})(f+g)(t_k) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) g(t_k) \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

4. Si $f \geq 0$, alors $g - f \geq 0$, donc $\int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0$, par conséquent, d'après la propriété 3, on obtient $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

8. (a) Si $f \equiv 0$, alors $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$ (évident).

   (b) (Inversement) Si $f \equiv 0$, $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$ dans ce cas là, on a $f(x_0) > 0$ et comme f est continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cela donne $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, on choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0)$ donc, on obtient $\forall x \in [a,b] : |x - x_0| < 0 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$. Par conséquant

$$\int_a^b f(x)dx > \int_{x_0}^{x_0+\alpha} f(x)dx > \frac{\alpha}{2}f(x_0) > 0.$$

Ce qui est une contradiction.

■

Proposition 2.8. *Soient f une fonction continue et itégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$, Alors, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Démonstration - Si on pose $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors, d'après la propriété 4, on a $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx$, c'est-à-dire $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. ■

2.9.2 Première formule de la moyenne

Théorème 2.6. *Soient f une fonction continue sur $[a,b]$, la fonction $g \in R[a,b]$ et positive. On désigne par m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur $[a,b]$. Alors il existe $k \in [m,M]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k\int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration - Par l'hypothèse $g \geq 0$, on a $mg \leq fg \leq Mg$ et donc

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{2.8}$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors l'encadrement précédent assure que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, et k arbitraire, donc on peut prendre $k = \frac{m+M}{2}$.
Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, alors on divise (2.8) par $\int_a^b g(x)dx$, on obtient

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b f(x)g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M,$$

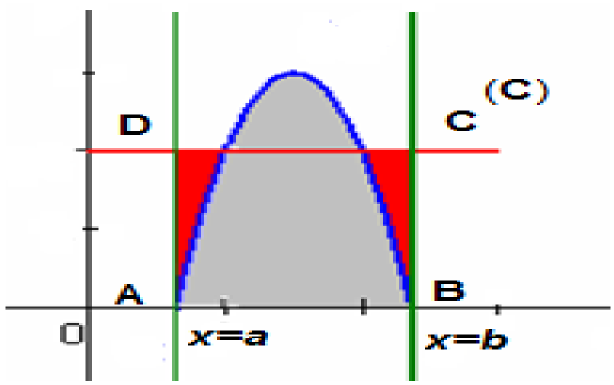
est un élément de $[m,M]$. Comme f est continue, on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver c. ■

Corollaire 2.2. *Si pour tout $x \in [a,b]$ on a $g(x) = 1$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ vérifiant*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est dit valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$.

Remarque 2.8. (Illustration graphique) Dans le cas où est positive sur $[a,b]$, la valeur moyenne $f(c)$ de la fonction est la hauteur du rectangle $ABCD$ de base $(b-a)$ ayant la même aire que l'aire sous la courbe représentative de f entre a et b (voir le figure au-dessus)



Exemple 2.10. Soit $f(x) = 3x^2$ sur $[0,1]$. Alors, la valeur moyenne de f est $\frac{1}{1-0}\int_0^1 3x^2 = [x^3]_0^1 = 1$.

2.9.3 Deuxième formule de la moyenne

Théorème 2.7. *Soit f une fonction positive décroissante de $[a,b]$ et $g \in R[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^c g(x)dx.$$

Démonstration - On distingue deux cas

1. Si la fonction f en escalier, il existe donc une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$ et des constantes $c_1, ..., c_n$, telles que

$$\forall x \in]x_{k-1}, x_k[,\ (k \in \{1,...,n\}) : f(x) = c_k.$$

Posons $G(t) = \int_a^t g(x)dx$. Maintenant, on montre que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonction $H(t) = f(a)G(t)$. Alors, on

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{k=1}^{k=n}(G(x_k) - G(x_{k-1}))c_k \\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1}(c_k - c_{k-1})G(x_k) = G(x_n)c_n - G(x_0)c_1 = G(x_n)c_n\end{aligned}$$

Si on note m et M respectivement l'inf et le sup de la fonction G sur $[a,b]$, alors

$$mc_1 \leq \sum_{k=1}^{k=n} (G(x_k) - G(x_{k-1}))c_k \leq Mc_1.$$

Commme $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = c_1$, Nous avons donc bien prouvé que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire de la fonction H. La conclusion découle aisément.

2. Si f n'est pas en escalier, on considère la subdivision uniforme $\sigma : a + k\dfrac{b-a}{n}, \; (k \in \{0,...,n\})$ de $[a,b]$ et les deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n définies par

$$\forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \; (k \in \{0,...,n-1\}) : \varphi_n(x) = f(x_k), \; \psi_n(x) = f(c_{k+1}).$$

Nous allons établir que $\int_a^b \varphi_n(x)g(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)g(x)dx$, et le fait que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ soit une valeur intermédiaire résultera de la même propriété pour φ_n qui est cette fois-ci en escalier. Plus précisément, on a : $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, par conséquant

$$\int_a^b (f(x) - \psi_n(x))dx \leq \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$

Si on note M' un majorant de $|g|$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b |f(x)g(x) - \varphi_n(x)g(x)|dx \leq M' \int_a^b (f(x) - \varphi_n(x))dx \leq M'\frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$

La limite à droite de a pour la fonction φ_n étant égale à la limite à droite de a pour la fonction f, par passage à la limite, on aura bien

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a).$$

■

Théorème 2.8. *Toute fonction bornée continue par morceaux sur un intervalle borné $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

2.9.4 Inégalité de Cauchy Schwartz

Théorème 2.9. *Soit $f, g \in R[a,b]$. Alors*

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big).$$

Démonstration - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et comme $f, g \in R[a,b]$. Alors, d'après la positivité dde l'intégrale, on a

$$\Big(\int_a^b (\lambda f(x) + g(x)\Big)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \geq 0.$$

Ce trinôme en λ étant toujours positif, son discriminant Δ est donc négatif. C'est-à-dire

$$\Delta = 4\Big[\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 - \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)dx\Big)\Big] \leq 0.$$

D'où le résultat. ■

2.10 Calcul de primitives et d'intégrales

Définition 2.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant

$$\forall x \in I : \ F'(x) = f(x).$$

Exemple 2.11. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$. Car F est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R} : \ F'(x) = f(x)$.

Théorème 2.10. *Si F_1, F_2 sont deux primitives de f sur un intervalle I., alors*

$$\forall x \in I : \ F_1'(x) - F_2'(x) = 0.$$

Démonstration - On $\forall x \in I : \ F_1'(x) = f(x)$ et $F_2 = f(x)$. Alors, $\forall x \in I : \ F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. ■

Théorème 2.11. *Toute fonction continue sur un intervalle I. Alors, elle admettant une infinité de primitives sur I.*

Remarque 2.9. Si on connait une primitive F de f sur un intervalle I. Alors, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c, est une constante quelconque.

Exemple 2.12. La fonction $x \mapsto x^3 + x$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors, toutes les primitives sont $x \mapsto x^3 + x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.3. *Les fonctions dérivable sur un intervalle I et admet une primitive nulle sont les fonctions constantes.*

Démonstration - Soient $x, y \in I, \ (x < y)$, supposons que une fonction F dérivable sur $[x, y] \subseteq I$. Donc elle est continue $[x, y]$. D'après le théorème d'accroissement finis, il existe $\theta \in]x, y[$ tel que

$$F(y) = F(x) + (y - x)F'(y + \theta(y - x)) = F(x).$$

■

Définition 2.9. On appelle intégrale indéfinie de f et on note $\int f(x)dx$, toute expression de la forme $F(x) + c$ où F est la primitive de f.

Exemple 2.13. $\int (\cos x + x - 1)dx = \sin x + \frac{1}{2}x^2 - x + c$, telle que $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.12. *Soit $f \in R[a, b]$, alors l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, est continue.*

Démonstration - f intégrable sur $[a, b]$, alors elle est bornée sur $[a, b]$, donc, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que

$$\forall x \in [a, b] : \mid f(x) \mid \leq M.$$

Donc,

$$F(x) - F(x_0) = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

C'ést-à-dire F est $M-$lipschitzienne sur $[a, b]$, par concéquant, elle est continue sur $[a, b]$. ■

Théorème 2.13. *Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction F définie sur I par :*

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt,$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration - Supposons que f soit continue en un point $x_0 \in [a,b]$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$ c'est à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall x \in [a,b], \ | \ x - x_0 \ | \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : \forall \in [a,b], \ | \ x - x_0 \ | \Rightarrow | \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors pour tout $x \in [a,b] - \{x_0\}$ vérifiant $|x - x_0| < \alpha$, on a

$$\forall t \in [x_0, x] : | \ t - x_0 \ | \leq | \ x - x_0 \ | < \alpha.$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,b] :| \ x - x_0 \ | < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \forall t \in [x_0, x] :| \ t - x_0 \ | < \alpha \\ &\Rightarrow \quad \forall t \in [x_0, x] :| \ f(t) - f(x_0) \ | < \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt \quad &< \quad | \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \\ &< \quad \frac{1}{|x - x_0|} \varepsilon |x - x_0| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.14. Le primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ qui s'annule en 0 est

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}[\sin(2t + \frac{\pi}{3})]_0^x = \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.10.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2.14. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration -

1. Soit $\sigma : x_0 < x_1 < ... < x_n$ une subdivision de $[a, b]$. Sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}],\ (k \in \{0, ...n-1\}$, la fonction F est continuement dérivable. En vertu du théorème des accroissement finis, il existe $t_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k)F'(t_k) = (x_{k+1} - x_k)f(t_k).$$

Donc, d'après la proposition 2.7, nous avons $s_\sigma(f) \leq R_{\sigma,t}(f) \leq S_\sigma(f)$, c'est-à-dire

$$s_\sigma(f) \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \Big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\Big) \leq S_\sigma(f)$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \Big(F(x_{k+1}) - F(x_k) = F(b) - F(a)$, alors

$$s_\sigma(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_\sigma(f)$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision σ, et la fonction f étant, par hypothèse, intégrable, on déduit de la proposition 2.6 que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2. Soient $x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 + h$, supposone que f soit continue en x_0. Alors, on a

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = f(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))dx.$$

Tenez compte que f est continue en x_0, donc on a pour $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))dx\Big| &\leq \frac{1}{|h|}\sup|x - x_0| \leq h|(f(x) - f(x_0))||h| \\ &= \sup|x - x_0| \leq h|(f(x) - f(x_0)) \to 0, \end{aligned}$$

lorsque $h \mapsto 0$. Par conséquant,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))dx = f(x_0),$$

d'où $F'(x_0) = f(x_0)$. ∎

Exemple 2.15.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Corollaire 2.4. *Si f une fonction dans $C^1[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration - Si f est dans $C^1[a, b]$ alors sa dérivée f' est continue et f est une primitive de f'. On applique alors le théorème 2.14, ci-dessus. ∎

2.10.2 Fonctions paire et périodique

Théorème 2.15. *1. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$ avec $a > 0$. Alors*

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$*, si f est impaire.*

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$*, si f est paire.*

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T Alors

$$\forall c \in \mathbb{R} : \int_{c}^{c+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

2.10.3 Intégration par parties

Théorème 2.16. *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration - Nous avons que $\Big(f(x)g(x)\Big)' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$, donc

$$\int_a^b \Big(f(x)g(x)\Big)'dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

∎

Remarque 2.10. Application au calcul de primitive. Dans un calcul de primitive, la formule d'intégration par parties s'écrit

$$\int \Big(f(x)g(x)\Big)'dx = f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Exemple 2.16. On calule $\displaystyle\int_1^x te^t dt$. $x \in \mathbb{R}$ posons : $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = e^t \end{cases}$ $alors$ $\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = e^t. \end{cases}$
Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_1^x te^t dt &= [te^t]_1^x - \int_1^x e^t dt \\ &= xe^x - e^1 - e^x + e^1 = (x-1)e^x. \end{aligned}$$

D'autre part le primitive de $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Calcul intégral du type $\displaystyle\int P_n(x)e^{kx}dx$

Soit $P_n(x)$ un polynôme de dégré n, et $k \in \mathbb{R}$. Alors on peut calculer l'intégrale $\displaystyle\int P_n(x)e^{kx}dx$, où on utilisat l'intégrale par parties n fois. Mais comme on a vu que les primitives de $x \mapsto P_n(x)e^{kx}$ sont les fonctions $F : x \mapsto Q_n(x)e^{kx} + c$, tel que $Q_n(x)$ est un polynôme de dégré n. Donc on peut calculer-le rapidement par comparaison F' avec $P_n(x)e^{kx}$.

Exemple 2.17. Calculer $I = \displaystyle\int (x^2-5x+7)e^{-x}dx$. Alors, les primitives sont $F : x \mapsto (a_2x^2+a_1x+a_0)e^{-x} + c$, tels que $a_0,\ a_1$ et a_2 dans $\mathbb{R}$ où $a_2 \neq 0$. $F'(x) = \Big(-a_2x^2 + (2a_2 - a_1)x + (a_1 - a_0)\Big)e^{-x}$. Par comparaison $F'(x)$ avec $(x^2 - 5x + 7)e^{-x}$, on obtient

$$\begin{cases} -a_2 = 1 \\ 2a_2 - a_1 = -5 \\ a_1 - a_0 = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = 3 \\ a_0 = -4. \end{cases} \Rightarrow$$

Par conséquant $I = \displaystyle\int (x^2 - 5x + 7)e^{-x}dx = (-x^2 + 3x - 4)e^{-x} + c.$

Calcul intégral du type $\displaystyle\int e^{kx}\cos(px)dx, \quad \int e^{kx}\sin(px)dx,\ k, p \in \mathbb{R}.$

On intègre par parties deux foins, nous trouvons donc que les primitives sont $F : x \mapsto e^{kx}(\lambda\cos(px) + \mu\sin(px)) + c$ où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On peut calculer λ et μ par comparaison F' avec $e^{kx}\cos(px)$ ou $e^{kx}\sin(px)$.

Exemple 2.18. Calculer $I = \displaystyle\int e^{-2x}\sin x dx$. Alors, les primitives sont $F : x \mapsto e^{-2x}(\lambda\cos(px) + \mu\sin(px)) + c$. Comme $F'(x) = e^{-2x}\Big((\mu - 2\lambda)\cos(px) - (\lambda + 2\mu)\sin(px)\Big)$. Par comparaison $F'(x)$ avec $e^{-2x}\sin x$, on trouve

$$\begin{cases} \mu - 2\lambda = 0 \\ -\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1}{5} \\ \mu = \dfrac{-2}{5}. \end{cases}$$

Par conséquant $I = \displaystyle\int (x^2 - 5x + 7)e^{-x}dx = (-x^2 + 3x - 4)e^{-x} + c.$

2.10.4 Intégration par changement de variables

Théorème 2.17. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$: Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

La transformation $x = \varphi'(t)$ s'appelle changement de variable.

Démonstration - Si F est une primitive de f alors

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t)dt = [(F \circ \varphi)(t)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

■

Exemple 2.19. Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ en utilisant le changement de variable $x = \sin t$, donc on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2.10.5 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	L'intervalle
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$e^{ax} \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$\sin ax \quad (a \neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	$\mathbb{R}$
$\cos ax \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$1 + cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-cotan x$	$]0, \pi[$

Fonction	Primitive	L'intervalle
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right),\ a>0$	$]-a,a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$-\arccos\left(\dfrac{x}{a}\right),\ a>0$	$]-a,a[$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$sh(ax),(a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}ch(ax)$	$\mathbb{R}$
$ch(ax),(a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}sh(ax)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$argshx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$argchx=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2.10.6 Aire d'un fonction positive

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ et (C) sa courbe représentative dans (P).

Définition 2.10. Soit On appelle intégrale de a à b de la fonction f la mesure de l'aire en unité d'aire de la partie $A=\{M(x,y)\in(P):a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$ du plan (P). On note $S(A)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

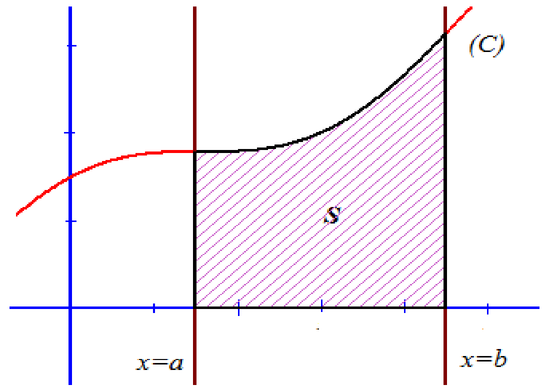


FIGURE 2.8 – L'aire $S(A)$ sous la courbe (C) et entre les droites $y = 0,\ x = a$ et $x = b$.

Remarque 2.11. Si f change la signe sur $[a, b]$, alors $S(A) = \int_a^b |f(x)|dx$.

Exemple 2.20. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer l'aire de domaine

$$A = \{M(x, y) \in (P) : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

On a f change la signe dans $[0, 3]$ (voir le figure 2.9), donc

$$\begin{aligned} S(A) = \int_0^3 |f(x)|dx &= \int_0^2 \Big(-f(x)\Big)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \Big[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\Big]_0^2 + \Big[\frac{1}{3}x^3 - x^2\Big]_2^3 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

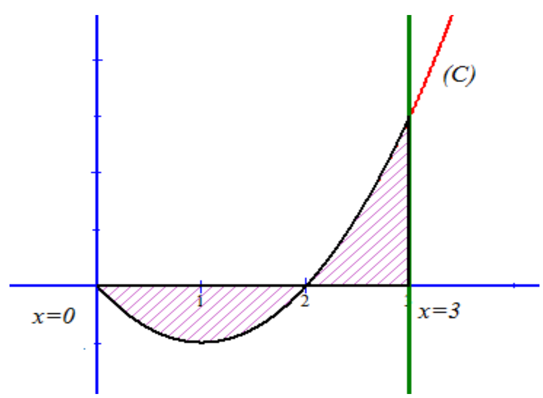


FIGURE 2.9 – L'aire $S(A)$ sous la courbe $(C_{|f|})$ et entre les droites $y = 0,\ x = 0$ et $x = 3$.

2.11 Téchniques de calcule d'intégrale

dans la suite on va donner quelques de méthodes pour calculer une intégrale ou primitive concérnant certaines classe de fonctions.

2.11.1 Intégrale de fractions rationnelles

Définition 2.11. On appelle fraction rationnelle réelle toute fonction f de la forme : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

Définition 2.12. Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes réels. On appelle division euclidienne (ou division selon les puissances décroissantes) de $A(x)$ par $B(x)$ l'unique couple (Q, R) tel que : $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ avec $R = 0$ ou bien $deg(R) < deg(B)$. Les polynômes Q et R sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne.

Exemple 2.21. Soient $A(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$. Pour effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ pratiquement on peut utilisant la division selon les puissances croissantes comme suit

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^4 & +x^3 & -3x^2 & +x-1 & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^4 & -2x^3 & -2x^2 & & 2x^2-x-4 \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & -5x^2 & +x & \\
 & x^3 & +x^2 & +x & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^2 & +2x-1 & \\
 & & 4x^2 & +4x+4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 6x+3 &
\end{array}
$$

Propriétès 2.5. Tout polynôme non nul $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$P(x) = c(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}...(x - r_p)^{m_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{n_2}...(x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$$

$$P(x) = c\left(\Pi_{k=1}^{p}(x - r_k)^{m_k}\right)\left(\Pi_{k=1}^{q}(x^2 + b_kx + c_k)^{n_k}\right)$$

avec $b_q^2 - 4c_q < 0,\ m_k,\ n_k \ \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $c \neq 0$.

Définition 2.13. Soients $a,\ b,\ c$ et d des nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

1. On dit d'éléments simples de première espèces les fractions rationnelle de type $\dfrac{a}{(x-b)^n}$ tel que $a \neq 0$.
2. On dit d'éléments simples de deuxième espèces les fractions rationnelle de type $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ avec $c^2 - 4d < 0$.

Théorème 2.18. *(Décomposition en éléments simples) Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle telle que $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucune racine commune. Si*

$$Q(x) = c\Pi_{k=1}^{p}(x - r_k)^{m_k}\Pi_{k=1}^{q}(x^2 + b_kx + c_k)^{n_k},$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $c \neq 0$ alors la décomposition en éléments simples de $f(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f(x) = E(x) + \sum_{1\leq i\leq p}\sum_{1\leq j\leq m_i}\frac{A_{i,j}}{(x-r_i)^j} + \sum_{1\leq i\leq q}\sum_{1\leq j\leq n_i}\frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+b_ix+c_i)^j}$$

où $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes réelles, et $E(x)$ est un polynôme appelé partie entière de la fraction rationnelle $f(x)$.

Remarque 2.12. La partie entière $E(x)$ de la fraction rationnelle $f(x)$ n'est autre que le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
On a donc $P(x) = Q(x)E(x) + R(x)$ avec $deg(R(x)) < deg(Q(x))$ ou bien $R(x) = 0$.
On en déduit que :

$$f(x) = E(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Remarque 2.13. Pour calculer une primitive de $f(x)$ il suffit alors de calculer les primitives de

$$E(x), \quad \frac{a}{(x-b)^n}, \ n \geq 1 \ \text{ et } \ \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}, \ n \geq 1, \ c^2 - 4d < 0.$$

Intégrale d'éléments simples

Intégrations fractions simples de 1^{re} espèce :
On Calcule l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^n} dx$. Alors, on a :

$$I = \begin{cases} a \ln|x-b| + c & si \ n = 1 \\ \dfrac{-1}{n-1} \dfrac{a}{(x-b)^{n-1}} + c & si \ n \geq 2. \end{cases}$$

Intégrations fractions simples de 2^{me} espèce :
Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx$. Alors, nous avons que

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n} dx \\ &= \frac{a}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx + (-\frac{a}{2}c + b) \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}. \end{aligned}$$

(a) On calcule l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n} dx$. On a, donc :

$$I = \begin{cases} \ln|x^2+cx+d| + c & si \ n = 1 \\ -\dfrac{1}{(n-1)(x^2+cx+d)^{n-1}} + c & si \ n \geq 2. \end{cases}$$

(b) Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}$. On a :

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{c}{2})^2 + (d - \frac{c^2}{4})\right]^n},$$

posons $u = x + \dfrac{c}{2}$ et $\alpha^2 = (d - \dfrac{c^2}{4}) > 0$, car $\Delta > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{du}{\alpha \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^n} \\ &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{dv}{[t^2+1]^n}, \quad \text{où } t = \frac{u}{\alpha} \end{aligned}$$

(c) Enfin pour calculer I il suffit de calculer $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1. Si $n = 1$ on a : $I_1 = \arctan x + c$.

2. Si $n \geq 2$ nous avons la relation de récurrence suivante :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left[I_n - I_{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Exemple 2.22. Calculons $J(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+\frac{5}{4})^2}$. On pose $u = x + \dfrac{1}{2}$ on obtient : $J(x) = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$. D'après le résultat précedent on a :

$$\begin{aligned}
J(x) = I_2(u) &= \frac{1}{4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4}\arctan u + c \\
&= \frac{1}{4}\frac{x+\frac{1}{2}}{((x+\frac{1}{2})^2+1)^2} + \frac{3}{4}\arctan(x+\frac{1}{2}) + c.
\end{aligned}$$

Exemple 2.23. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int \frac{x^3+4x-1}{x^2-1}dx$. Donc on pose $P(x) = x^3+4x-1$ et $Q(x) = x^2-1$, la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ donne :

$$P(x) = xQ(x) + 5x - 1,$$

alors, d'après le théorème 2.18, on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}. \tag{2.9}$$

Il existe plusieurs methodes pour calculer les constantes a et b. La méthode générale consiste à réduire au même dénominateur les deux membres de l'égalité (2.9), puis identifier les coefficients des numérateurs. Une autre methode simple dans ce cas est la suivante :
Pour calculer a on multiplie les deux membres de l'égalité (2.9) par $x-1$ puis on donne à x la valeur 1 on obtient $a = 2$.
Pour calculer b on multiplie les deux membres de l'égalité (2.9) par $x+1$ puis on donne à x la valeur -1 on obtient $b = 3$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int xdx + \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + c.
\end{aligned}$$

Exemple 2.24. Calculons $I = \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx$. D'après, le théorème 2.18, la fraction rationnelle $F(x)$ s'écrit

$$F(x) = \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1}.$$

Par identification on obtient

$$3x^2-3x-1 = (a_1+b_1)x^2 + (c_1-2b_1)x + (a_1-2c_1),$$

on en déduit que $\begin{cases} a_1+b_1 = 3 \\ c_1-2b_1 = -3 \\ a_1-2c_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 1. \end{cases}$ Donc

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x-2| + \ln(x^2+1) + \arctan x + c. \end{aligned}$$

Intégrale de type $\int f(\sin x, \cos x)dx$

Considèrons $\int f(\sin x, \cos x)dx$ où f est une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. Le changement de variables, $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. En remplaçant dans l'intégrale, on trouve

$$\int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2},$$

ce changement revenir le calcul de cette primitive à celui d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 2.25. Calculons l'intégrale $I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}dx$.

On fait le changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$, alors on trouve

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Par conséquant :

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = \int \frac{2t\, dt}{1+t^2} = \ln(1+t^2) + c = \ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + c.$$

Remarque 2.14. Il existe des méthodes plus efficaces et plus simples pour calculer ces intégrales si la fonction f possède certaines propriétés. Comme des cas particuliers suinantes

1. (a) Si $\int f(-\sin x, \cos x)dx = -\int f(\sin x, \cos x)dx$, on peut poser $t = \cos x$.
   (b) Si $\int f(\sin x, -\cos x)dx = -\int f(\sin x, \cos x)dx$, on peut poser $t = \sin x$.
   (c) Si $\int f(-\sin x, -\cos x)dx = \int f(\sin x, \cos x)dx$, on peut poser $t = \tan x$.
2. Ce dernier cas est valable aussi pour l'intégrale de type $\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$.

Exemple 2.26. Calculons l'intégrale $I = \int \frac{\tan xdx}{2 - \sin^2 x}dx$.
On fait le changement de variables $t = \cos x$, donc $dt = -\sin x$, alors on trouve

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sin xdx}{\cos x(2 - \sin^2 x)}dx &= -\int \frac{dt}{t(1+t^2)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{tdt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln \mid t \mid + c = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \ln \mid \cos x \mid + c \end{aligned}$$

Remarque 2.15. 1. Pour l'intégrale de type $\int f(\sin x)\cos xdx$ on utilisant le changement $t = \sin x$.
2. Pour l'intégrale de type $\int f(\cos x)\sin xdx$ on utilisant le changement $t = \cos x$.
3. Pour l'intégrale de type $\int f(\tan x)dx$ on utilisant le changement $t = \tan x$.

Intégrale de type $\int f(shx, chx)dx$

On utilise le changement de variable $t = th\frac{x}{2}$ on a donc, $x = 2argtht$, $shx = \frac{2t}{1-t^2}$, $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2}{1-t^2}dt$. Alors,

$$\int f(shx, chx)dx = \int f\Big(\frac{1+t^2}{2t}, \frac{1-t^2}{2t}\Big)\frac{2dt}{1-t^2},$$

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Remarque 2.16. 1. On peut utilisant le changement de variable $t = e^x$.
2. Pour l'intégrale de type $\int f(shx)chxdx$ on utilisant le changement $t = shx$.
3. Pour l'intégrale de type $\int f(chx)shxdx$ on utilisant le changement $t = chx$.
4. Pour l'intégrale de type $\int f(thx)dx$ on utilisant le changement $t = thx$.

Exemple 2.27. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \int \frac{shx}{2+chx}dx.$ 2. $I_2 = \int \frac{1}{shx}dx.$ 3. $I_2 = \int sh^3xchxdx.$

- Calculons I_1, posons $t = th\frac{x}{2}$ on a donc, $x = 2argtht$, $shx = \frac{2t}{1-t^2}$, $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2}{1-t^2}dt$. Alors,

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{shx}{2+chx}dx &= \int \frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \ln \mid 1-t \mid - \ln \mid 1+t \mid + 2\arctan(t) + c \\ &= \ln \mid 1 - th\frac{x}{2} \mid - \ln \mid 1 + th\frac{x}{2} \mid + 2\arctan(th\frac{x}{2}) + c. \end{aligned}$$

- Pour I_2, posons $t = e^x$, donc $x = \ln t$ et $dx = \frac{dt}{t}$. alors,

$$\begin{aligned} I_2 = \int \frac{1}{shx}dx &= \int \frac{4t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{2}{e^x - e^{-x}}dx \\ &= \int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \ln \mid t-1 \mid - \ln \mid t+1 \mid + c = \ln \mid e^x - 1 \mid - \ln \mid e^x + 1 \mid + c. \end{aligned}$$

- On faisant le changement $t = shx$, on se trouve le résultat facilement.

Intégrale de type $\int f(e^x)dx$

On peut utilisant le changement de variable $t = e^x$. On trouve

$$\int f(e^x)dx = \int f(t)\frac{dt}{t},$$

qui est l'intégrale d'une fraction rationnelle.

Exemple 2.28. Calculer $I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$

On fait le changement $t = e^x$, donc $dt = e^x dx$, donc $dx = \frac{dt}{t}$. Alors on obtient

$$\begin{aligned} I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx &= \int \frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctan t + c = \arctan(e^x) + c. \end{aligned}$$

2.11.2 Intégrale de type $\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx,\ ad - bc \neq 0.$

La fonction R est irrationnelle en x. le changement $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On trouve, après calcul

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n},\ \text{et } dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt,$$

alors, on obtient

$$\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx = \int R\Big(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\Big)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \int f(t)dt,$$

où f est une fraction rationnelle en t.

Exemple 2.29. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.
En faisant le changement $t^2 = \frac{1-x}{1+x}$, donc, on $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx &= \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt = \int \frac{-2}{1-t^2}dt + \int \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \ln\Big|\frac{1-t}{1+t}\Big| + 2\arctan t + c = \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\arctan\Big(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Big) + c. \end{aligned}$$

Remarque 2.17. La méthode précédente peut se généraliser aux intégrales de type :

$$\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m_1}{n_1}}, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m_k}{n_k}}\Big)dx.$$

en posant, $t^p = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $p = PPCM(n_1, n_2, ..., n_k)$, c'est-à-dire le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, ..., n_k$.

Exemple 2.30. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x}dx$.
Posons $t^2 = x+4$, donc, on a $x = t^2-4$ et $dx = 2tdt$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt &= 2\int \Big(1+\frac{4}{t^2-4}\Big)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} \\ &= 2t + 2\ln\Big|\frac{t-2}{t+2}\Big| + c. \end{aligned}$$

Exemple 2.31. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}}{x}dx$.
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}dx$.

- Calculons I_1, posons $t^2 = x+4$, donc, on a $x = t^2-4$ et $dx = 2tdt$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} I = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt &= 2\int \Big(1+\frac{4}{t^2-4}\Big)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} \\ &= 2t + 2\ln\Big|\frac{t-2}{t+2}\Big| + c. \end{aligned}$$

- Nous laissons I_2 comme exercice au lecteur.

2.11.3 Intégrale de type $\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx,\ a \neq 0.$

Soit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

1. Si $a < 0$, et $\Delta > 0$, on a : $ax^2 + bx + c = -a[\beta^2 - (x-\alpha)^2]$.
   On utilisant le changement de variable $x = \alpha + \beta \cos t$. On obtient
   $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2] = -a\beta^2 \sin^2 t$. Alors
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_1\Big(\sin t, \cos t\Big)dt.$$
2. Si $a > 0$, et $\Delta > 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 - \beta^2]$.
   On utilisant le changement de variable $x = \alpha + \beta cht$. On obtient
   $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2] = a\beta^2 sh^2 t$. Alors
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_2\Big(sht, cht\Big)dt.$$
3. Si $a > 0$, et $\Delta < 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$.
   On utilisant le changement de variable $x = \alpha + \beta sht$. On obtient
   $ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2] = a\beta^2 ch^2 t$. Alors
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_3\Big(sht, cht\Big)dt.$$

Remarque 2.18. (Méthodes de substitution d'Euler) On a une méthode générale d'intégration pour calculer ce type d'intégrale qu'on peut transformer en une intégrale d'une fraction rationnelle par des changements de variable de trois types.

1. Si $a > 0$. On pose alors $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$.
   Dans le cas où $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$, on obtient après calcule
$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}dt.$$
   En remplaçant dans l'intégrale précédant, on trouve, donc
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_1\Big(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2}\Big)2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}dt.$$
2. Si $c > 0$. On pose alors, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.
   Dans le cas où $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, on obtient après calcule
$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a^2 - t^2}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a^2 - t^2)^2}dt.$$
   En remplaçant dans l'intégrale précédant, on trouve, donc
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)dx = \int R_1\Big(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a^2 - t^2}\Big)2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a^2 - t^2)^2}dt.$$

3. Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et on a $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$.
   On pose alors $ax^2 + bx + c = \pm t(x - r_1)$, où $\pm t(x - r_2)$.
   Dans le cas où $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r_1)$, on obtient après calcule
$$x = \frac{-ar_2 + r_1 t^2}{t^2 - a}, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(r_1 - r_2)t}{t^2 - a}, \quad dx = 2\frac{a(r_1 - r_2)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$
   En remplaçant dans l'intégrale précédant, on trouve, donc
$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\Big)dx = \int R_1\Big(\frac{-ar_2 + r_1 t^2}{t^2 - a}, \frac{a(r_1 - r_2)t}{t^2 - a}\Big)2\frac{a(r_1 - r_2)t}{(t^2 - a)^2}dt.$$

Remarque 2.19. On peut utilisant le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{4a^2}{\mid b^2 - 4ac \mid}}\Big(x + \dfrac{b}{2a}\Big)$.

Exemple 2.32. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$.
2. $I_2 = \displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}dx$.
3. $I_3 = \displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}dx$.
4. $I_4 = \displaystyle\int \sqrt{x^2 - 3x + 2}dx$.

- Comme $a > 0$, alors, on a la première cas d'Euler en posant $t - x = \sqrt{x^2 + x + 1}$, après calcule, on obtient donc
$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}, \quad dx = 2\frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2}dt.$$
  En remplaçant ces expressions dans l'intégrale I_1, nous avons
$$\begin{aligned} I_1 = &= 2\int \frac{1}{t(t+2)}dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+2} \\ &= 2\ln|t| - \ln|t+2| + c. \end{aligned}$$
- Pour I_2, comme $a > 0$, et $\Delta = 16$, on a donc $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 0$, $\beta = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2$. Alors, faisons le changement de variable $x = \alpha + \beta\cos t = 2\cos t$, après calcule, on obtient donc
$$t = \arccos(\frac{x}{2}), \quad \sqrt{4 - x^2} = 2\sin t, \quad dx = -2\sin t dt.$$
  En remplaçant ces expressions dans l'intégrale I_1, nous avons
$$\begin{aligned} I_2 = &= -4\int \sin^2 t dt = \int (2\cos 2t - 2)dt = 2\sin 2t - 2t + c \\ &= \sin\Big(2\arccos(\frac{x}{2})\Big) - 2\arccos(\frac{x}{2}) + c. \end{aligned}$$
- Pour I_3 on pose $x = cht$. On a donc $dx = shtdt$. Alors, on trouve
$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1}dx = &= -4\int sh^2 tdt = \frac{1}{2}\int (ch2t - 1)dt \\ &= \frac{1}{4}sh2t - \frac{1}{4}t^2 + c = \frac{1}{4}sh(2argchx) - \frac{1}{4}argch^2 x + c. \end{aligned}$$
- Nous laissons I_4 comme exercice au lecteur.

2.11.4 Intégrales de types $\int \sin px \cos qx dx$, $\int \sin px \sin qx dx$, $\int \cos px \cos qx dx$.

Dans ce cas, on applique les formules de trigonométrie suivantes

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big] \tag{2.10}$$

$$\sin a \sin b = \frac{-1}{2}\Big[\cos(a+b) - \cos(a-b)\Big] \tag{2.11}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big] \tag{2.12}$$

Exemple 2.33. Calculer $I_1 = \int \sin 3x \sin 2x$. Alors, d'après les formules précédentes, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-1}{2}\int (\cos 5x - \cos x)dx \\ &= \frac{-1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + c. \end{aligned}$$

2.11.5 Intégrale de type $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Où n, m deux nombres entiers naturels.

1. Si m est pair faisons le changement de variable $t = \cos x$.
2. Si n est pair faisons le changement de variable $t = \sin x$.
   Dans le cas par exemple où $m = 2p + 1$, on a

   $$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx.$$

   Posons $t = \cos x$, donc $dt = -\sin x dx$, alors on trouve

   $$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\int (1 - t^2)^p t^n dx.$$

   C'est-à-dire un intégrale rationnel.
3. Si n, m deux nombres enties naturels pairs, avec $n = 2p,\ m = 2q$. On utilisant les formules (2.10),(2.11) et (2.12) avec les formules suinantes

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos 2x\Big), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos 2x\Big). \tag{2.13}$$

Remarque 2.20. Dans le cas 3, on peut utiliser les formules (2.13) avec le changement de variable $t = \tan x$.

Exemple 2.34. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \int \cos^5 x \sin^2 x dx.$
2. $I_2 = \int \cos^5 x dx.$
3. $I_3 = \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

- Pour I_1 on pose $x = \sin t$. On a donc $dx = \cos t dt$. Alors, on trouve

$$\begin{aligned} I_1 = &= \int \cos^4 x \cos x \sin^2 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x \sin^2 x dx \\ &= \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + c \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + c. \end{aligned}$$

- Pour I_2 on pose $x = \sin t$. On a donc $dx = \cos t dt$. Alors, on trouve

$$\begin{aligned} I_2 = &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1-t^2)^2 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + c \\ &= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + c. \end{aligned}$$

- Pour I_3 on utilisant (2.13) et (2.12) respectivement, on obtient, donc

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^4 x &= \sin^2 x \cos^2 x \cos^{42} x = \frac{1}{8}(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)(1+\cos 2x) \\ &= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)(1+\cos 2x) = \frac{1}{8}(1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) \\ &= \frac{1}{8}(1+\frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x). \end{aligned}$$

Par conséquant, $I_3 = \frac{1}{8}(x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x) + c.$

Remarque 2.21. On peut linéariser les fonctions $\sin^m x$ et $\cos^n x$, où on utilisent la formule du binôme de Newton et les formules suivants

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

2.11.6 Intégrale de type $\int sh^m x ch^n x dx.$

Où n, m deux nombres entiers naturels.

1. Si m est pair faisons le changement de variable $t = chx.$

2. Si n est pair faisons le changement de variable $t = shx$.
   Dans le cas par exemple où $m = 2p + 1$, on a

$$\int sh^m xch^n xdx = \int (ch^2 x - 1)^p ch^n xshxdx.$$

   Posons $t = chx$, donc $dt = shxdx$, alors on trouve

$$\int sh^m xch^n xdx = \int (t^2 - 1)^p t^n dt.$$

   C'est-à-dire un intégrale rationnel.
3. Si n, m deux nombres enties naturels pairs, avec $n = 2p,\ m = 2q$. On utilisant les formules suinantes

$$\begin{aligned} sh2x &= 2shxchx && (2.14)\\ ch^2 x &= \frac{1}{2}(ch2x + 1) && (2.15)\\ sh^2 x &= \frac{1}{2}(ch2x - 1) && (2.16)\\ ch^2 x &- sh^2 x = 1. && (2.17) \end{aligned}$$

   Puis, on faisant le changement de variable $t = thx$.

Exemple 2.35. Calculer les intégrales suivnantes

1. $I_1 = \displaystyle\int sh^3 xch^2 xdx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int ch^4 xdx.$

- Pour I_1, on $m = 3$ est impair. Alors on peut utilisant (2.17) et le changement de variable $t = chx$, on obtient, donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int sh^3 xch^2 xdx = \int sh^2 xch^2 xshxdx\\ &= \int sh^2 xch^2 xshxdx = \int (ch^2 x - 1)ch^2 xshxdx\\ &= \int (t^2 - 1)t^2 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + c\\ &= \int (t^2 - 1)t^2 dt = \frac{1}{5}ch^5 x - \frac{1}{3}ch^3 x + c. \end{aligned}$$

- Nous laissons I_2 comme exercice au lecteur.

2.12 Exercices et problèmes

Exercice 2.1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 x dx$ 2. $\int_0^1 x^2 dx$ 3. $\int_0^1 x^3 dx$ 4. $\int_0^1 e^x dx$

On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 2.2. Calculer les limites, lorsque $n \to +\infty$ des suites (définies pour$n \in \mathbb{N}^*$).

1. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$.
2. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.
3. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$
4. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.
5. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k+n} \ln\left(1\frac{k}{n}\right)$.
6. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^2+k^2}}$.
7. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(n+n)}$.

Exercice 2.3. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0
2. Calculer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Application : Calculer $J = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x} dx$.
4. Recalculer cette intégrale en charchant directement une primitive de $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}$ sous la forme $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$, où a, b, c et d sont quatre réels à déterminer.

Exercice 2.4. En utilisant changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

1. $\int \sin^2 x \cos x dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.
3. $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$.
4. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.
5. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$.
6. $\int \frac{dx}{4+3x^2}$.
7. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.
8. $\int x^2 \sqrt{x-1} dx$.
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$.
10. $\int 3x^2(1+x^3)^3 dx$.
11. $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx$.

Exercice 2.5. Calculer les les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} [x]dx.$
2. $\displaystyle\int_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2|dx.$

Exercice 2.6. Calculer les les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int x \arctan x dx.$
2. $\displaystyle\int \arcsin x dx.$
3. $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx.$
4. $\displaystyle\int \cos x \ln(1 + \cos x) dx.$

Exercice 2.7. Calculer les primitives

1. $\displaystyle\int \cos^2 x dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^3} dx.$
3. $\displaystyle\int \arcsin x dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 3} dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x} dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + 1} dx.$
7. $\displaystyle\int sh^2 x dx.$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x} dx.$
9. $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2 - 2x + 1} dx.$
10. $\displaystyle\int \frac{[\ln x]^2}{x} dx.$
11. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2 - x - 2} dx.$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}.$
13. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)(x^2 - 4x)} dx.$
14. $\displaystyle\int \frac{3x+3}{(x^2 - 2x + 1)^2} dx.$
15. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x^2 + 3x + 1)^2} dx.$

Exercice 2.8. Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variables recommandé

1. $\displaystyle I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x},$ poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$
2. $\displaystyle I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx,$ poser $u = \sin x.$
3. $\displaystyle I_3 = \int_0^{1} e^{2x} \ln(1 + e^x) dx,$ poser $u = e^x.$
4. $\displaystyle I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{dx}{\sin x},$ poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$
5. $\displaystyle I_5 = \int_{\sqrt{3}}^{10} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},$ poser $x = \tan t.$
6. $\displaystyle I_6 = \int_0^{1} \sqrt{1 - x^2} dx,$ poser $x = \sin t.$

Exercice 2.9. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,$ (Intégrales de Wallis)

1. Calculer $I_0,\ I_1$ et I_2
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Estéelle convergente ?

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

4. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(p!)^2 2^{2p}}, \quad I_n = \frac{(p!)^2 2^{2p}}{(2p+1)!}.$$

5. Calculer $(n+1)I_n I_{n-1}$, pour $n \geq 1$.
6. Montrer que pour $n \geq 2$, $\dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.

   En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.
7. Trouver un équivalent de (I_n) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2.10. 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, g positive et continue par morceaux sur $]a, b[$.

   Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx.$

2. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\cos x}{x} dx$

CHAPITRE 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sommaire

3.1 Généralités

En raison de l'importance des équations différentielles dans la résolution de nombreux phénomènes en physique, mathématiques, chimie, biologie et dans d'autres domaines, les chercheurs y ont prêté beaucoup d'attention au cours des siècles passés et au présent. Cependant, ils ne sont pas parvenus à la solution de beaucoup d'entre eux en utilisant les méthodes exceplicites. Cela restera un champ ouvert pour la recherche. Nous sommes dans ce chapitre nous présentons des terminologies et des concepts de base concernant les équations différentielles du prémier et du scond orde. Nous discuterons également de l'idée générale de résolutios de ces équations différentielles et ainssi quelques cas particuliers.
D'une manire gnrale, nous prsenterons dans ce chapitre les dfinitions, les thormes, et les proprits les plus importantes, ainsi que quelques mthodes de rsolution des quations diffrentielles ordinaires du premier et du second ordre, ou celles qui peuvent remonter au premier ordre comme des quations du Bernoulli et Riccati.

Définition 3.1. On appelle équation différentielle du premier ordre une relation de la forme

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.1}$$

où y la fonction inconnue et y' est sa dérivée par rapport à x et F une fonction numérique de 3 variables définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Exemple 3.1.

1. $y' = e^x + 2x - 3$,
2. $y' = y + x$

sont des équations différentielles du premier ordre, $D = \mathbb{R}^3$.

Définition 3.2. On appelle équation différentielle du deuxième ordre une relation de la forme

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{3.2}$$

où y' et y'' sont les dérivées du premier et du second ordres respectivement de y par rapport à x et F une fonction numérique de 4 variables définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^4$.

Exemple 3.2. 1. $y'' + (x^2 + 1)y' - y = (x - 3)e^{2x}$,

2. $y'' + y' = 2y = x^2 + x - 2$,

sont des équations différentielles du second ordre sur $D = \mathbb{R}^4$.

Définition 3.3. 1. Une équation différentielle du premier ordre est dite mise sous forme normale lorsqu'elle s'écrit

$$y' = f(x, y)$$

où f représente une foncyion réelle de 2 variables.

2. Une équation différentielle du second ordre est dite mise sous forme normale lorsqu'elle s'écrit

$$y'' = f(x, y, y')$$

où f représente une foncyion réelle de 3 variables.

Définition 3.4. 1. Une solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (3.1) est une fonction numé rique y, définie sur un intervalle réel I, dérivable et telle que, on ait

$$\forall x \in I : \quad F(x, y, y') = 0, \text{ et } (x, y, y') \in D.$$

2. Une solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (3.2) est une fonction numé rique y, définie sur un intervalle réel I, dérivable deux fois et telle que, on ait

$$\forall x \in I : \quad F(x, y, y', y'') = 0, \text{ et } (x, y, y', y'') \in D.$$

Remarque 3.1. Résoudre une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent. Le graphe d'une solution est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle.

Exemple 3.3. 1. Les fonctions $y = c$ (c une constante) sont des solutions de $y' = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

2. Les fonctions $y = \lambda e^{ax}$ sont des solutions de $y' = ay$ définie sur $\mathbb{R}$, tels que $(a,\ \lambda \in \mathbb{R})$.
3. Les fonctions $y = \cos x$ et $y = \sin x$ sont des solutions de $y'' + y = 0$ définie sur $\mathbb{R}$.

3.2 Equation différentielle du premier ordre

3.2.1 Equation différenitelle à variables séparées

Définition 3.5. Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(y).y' = g(x) \quad (vs).$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y' = \dfrac{dy}{dx}$, puis, symboliquement

$$f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

On écrit ici explicitement la constante d'intégration arbitraire $C \in \mathbb{R}$ (qui est déjà implicitement présente dans les intégrales indéfinies) pour ne pas l'oublier. Il s'agit donc de trouver des primitives F et G de f et g, et ensuite d'exprimer y en terme de x et de C :

$$F(y) = G(x) + C \Leftrightarrow y = F^{-1}(G(x) + C).$$

C'est pour cette raison que l'on dit aussi intégrer une équation différentielle.

Exemple 3.4. Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' \ln(x) = (3\ln(x) + 1)y. \ (1)$$

On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx\ln(x)$, ce qui est permis si et seulement si $y \neq 0$ (car $x\ln(x) > 0$) d'après l'énoncé). On a,

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}dx + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Comme $\dfrac{3\ln x + 1}{x\ln x} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x\ln x}$, alors, on a

$$\ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + K = \ln|x^3\ln x| + K.$$

Avec $K \in \mathbb{R}$. En prenant l'exponentielle de cette expression, on a finalement :

$$y = C_2 x^3 \ln x$$

avec $C_2 \in \mathbb{R}$: En effet, le signe de $C_2 (=^+_- e^K)$ tient compte des deux possibilités pour $|y|$, et on vérifie que $C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ est aussi solution (mais pour laquelle le calcul précédent, à partir de la division par y, n'est pas valable.)

Exemple 3.5. Résoudre l'quation

$$2xydy = (x^2 - y^2)dx \qquad (2)$$

Posons : $f(x,y) = 2xy$, $g(x,y) = x^2 - y^2$, on a : $f(2x, 2y) = 4xy = 2^2xy$ et $g(2x, 2y) = 2^2(x^2 - y^2)$ donc f et g sont homogène de degré 2. On pose $y = vx$ pour résoudre (1). $dy = vdx + xdv$ et (1) devient

$$\frac{2v}{1 - 3v^2}dv = \frac{dx}{x}.$$

Après intégration on obtient

$$x^3(1-3v^2) = K, (K \in \mathbb{R}),$$

d'où

$$x(x^2-3y^2) = K.$$

Donc,

$$y^2 = \frac{1}{3}(x^2 - \frac{K}{x}).$$

Détermination de la constante d'intégration

La constante d'intégration C est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donné, on ait une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$. On parle d'un problème avec conditions initiales.

3.2.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 3.6. Une équations différentielles linéaire (EDL) du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans K, K étant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on demandera $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

Définition 3.7. (Équation homogène) On appelle équation homogène ou encore équation sans second membre associée à (E), l'équation :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E_0).$$

On la note aussi (E_h) ou (EH).

Remarque 3.2. Si dans ces définitions, le coefficient de y' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en* y'.

Résolution de l'équation homogène associée

En effet, (EH) est une équation différentielle à variables séparées. En l'écrivant

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)},$$

et en l'intégrant, on obtient :

$$\ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)} dx + C$$

et avec $K \in \{\pm e^C, 0\}$, on a :

$$y = Ke^{F(x)}, K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)} dx.$$

Concernant l'équation (E), on a :

Propriétès 3.1. L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (EH) une solution particulière de (E).

La section suivante est consacrée à la détermination de la solution particulière de l'équation (E) par la méthode de variation de la constante.

Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)e^{F(x)}$, avec Kune fonction à déterminer ("variation de la constante"). On trouve que y est solution si et seulement si

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

(On peut intégrer car c'est la composée de fonctions continues, et on peut oublier la constante car elle correspond à une solution de (EH)). Une solution particulière est donc

$$y(x) = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

et la solution générale est donc :

$$y(x) = e^{F(x)}\big(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx\big), K \in \mathbb{R}, F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

Exemple 3.6. Résoudre sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, l'équation différentielle

$$sin(x)y' - cos(x)y = x$$

Résolvons d'abord sur I l'équation homogène :

$$sin(x)y' - \cos(x)y = 0$$

On obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + k, k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (EH) est donc

$$y = K \sin x, K \in \mathbb{R}.$$

(avec $K = \pm e^k$ pour tenir compte des valeurs absolues, et K=0 étant solution aussi). Cherchons ensuite une solution particulière de (E) sous la forme

$$y = K(x) \sin x, (K \text{ est continment dérivable}).$$

On a alors $y'(x) = K'(x)\ sinx + K(x)\cos(x)$, ce qui donne dans (E) :

$$(\ sinx)[K'(x)\ sinx + K(x)\ cosx] - (\ cosx)K(x)\ sinx = x$$

et comme dans la théorie générale (et c'est toujours ainsi par construction), il ne reste que le terme en $K'(x)$, soit :

$$K'(x)\sin^2 x = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$$

On intègre par parties, en posant

$$u(x) = x, v'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \;\; et \;\; u'(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

ce qui donne :

$$K(x) = -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}dx = -\frac{x}{\tan x}$$

$$= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{cosx}{sinx} = -\frac{x}{\tan x} + \ln|\, sinx|.$$

Sur $I,\; sinx > 0$; une solution particulière est donc obtenue pour $C = 0$.

$$y = -x\; cosx + \; sinx \;\ln\; sinx$$

et la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = -x\; cosx + \big(K + \; sinx \;\ln\; sinx\big), K \in \; R.$$

Exemple 3.7. Si $y_1$et y_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $y_1 - y_2$ est solution de (EH) , et la solution générale de (E) est

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2), c \in \mathbb{R} \;\text{ arbitraire.}$$

3.3 Equation du premier ordre non linéaires se ramenant à des équations linéaires

3.3.1 Équation de Bernouilli

Définition 3.8. Une équation différentielle est dite de Bernouilli si elle est de la forme

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \in \mathbb{R} \qquad\qquad (EBr)$$

Pour résoudre l'équation (EBr) on pose $z = y^{1-n}$. Cette substitution transforme l'équation (EBr) en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable z.

Remarque 3.3. Si $n = 1$, l'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle linéaire.

Exemple 3.8. Rsoudre les quations différentielles de Bernoulli suivantes

1. $(x^2 + 1)y' = 4xy + 4x\sqrt{y}$.
2. $x^2y' + xy = 2(\sqrt{x} + 1)\sqrt{y}$. tel que $x > 0$.

Donc, les solutions d'quations diffrentielles de Bernoulli sont immdiatement.Pour l'quation $(x^2+1)y' = 4xy + 4x\sqrt{y}$. (1) On suppose $y > 0$ et on utilise le changement d'inconnue $z = \sqrt{y}$. On a donc $y = z^2$ et $y' = 2zz'$. En reportant dans lŠquation (1), on obtient

$$(x^2+1)zz' = 2xz^2 + 2xz,$$

qui se simplifie en

$$(x^2+1)z' = 2xz + 2x. \ (2)$$

Cette dernire quation est linaire (coefficients non constants). C'est une quation variables sparables

$$\frac{z'}{z+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

Par consquent

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{z+1} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln|z+1| = \ln(x^2+1) + C, \ C > 0 \\ &\Rightarrow \quad z = K(x^2+1) - 1, \ K = \pm e^C. \end{aligned}$$

Finalement, on fait le changement d'inconnue en sens inverse $y = z^2$ pour trouver les solutions y positives de l'quation (1) Il laisse au lecteur de vrifier que la solution de l'quation $x^2y' + xy = 2(\sqrt{x}+1)\sqrt{y}, \ x > 0$ est

$$y = \frac{1}{x}\Big(\ln x - \frac{2}{\sqrt{x}+K}\Big)^2, \ K \in \mathbb{R}.$$

3.3.2 Équations de Riccati

Définition 3.9. Les équations de Riccati sont des équations différentielles de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (ER)$$

3.3.3 Méthode de résolution

Si y_1 est une solution particulière alors on pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation (ER) en une équation linéaire en z.

Exemple 3.9. Soit l'quation différentielle de Riccati suivante

$$2y'\cos x - 2y\sin x = 2y^2 + 2\cos x - \sin^2 x, \ (ER).$$

1. Vrifier que $y_0 = \sin x$ est une solution particulire de (ER)
2. Rsoudre l'quation (ER), en utilisant le changement de variable $u = y - y_0$.

Les solutions est respectivement au dessous,

1. On remplace dans l'quation (ER) par $y_0 = \sin x$, on aura facilement que y_0 est une solution de (ER). Donc $y_0 = \sin x$ est une solution particulire de (ER).
2. En utilisant le changement de variable $u = y - y_0$ rendre lquation (ER) sous la forme

$$2u' \cos x - 2u \sin x = u^2 \ \ (1).$$

C'est une quation diffrentielle de Bernoulli avec $n = 2$. On remarque que $u = 0$ est une solution de (1) si $u \neq 0$. On divise l'quation (1) par u^2, on obtient $2u'u^2 \cos x - 2u^{-1} \sin x = 1, \ \ (2)$. On pose $z = u^{-1}$, donc, $z' = -u'u^2$. On remplace dans l'quation (2) on trouve

$$-2z' \cos x - 2z \sin x = 1, \ (E).$$

C'est une quation diffrentielle linaire d'ordre 1 et on rsoud facilement cette quation, et on otient

$$z = -\frac{1}{2} \sin x + C \cos x, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

D'o

$$u = \frac{1}{z} = \frac{2}{-\sin x + \alpha \cos x}, \qquad C = 2\alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution gnrale d quation (ER) est donne d'aprs la relation $y = u + y_0$ par

$$y = \frac{2}{-\sin x + \alpha \cos x} + \sin x.$$

3.3.4 Équations de Lagrange

Définition 3.10. Les équations de Lagrange sont des équations différentielles de la forme :

$$y = xf(y') + g(y') \qquad\qquad (ELg)$$

Pour intégrer les équations de Lagrange, on pose $y' = p = \dfrac{dy}{dx}$, (Lag) devient :$y = xf(p) + g(p)$, et on differentie :

$$\begin{aligned} dy &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp \\ pdx &= f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp \\ (p - f(p))dx &= [xf'(p) + g'(p)]\, dp. \end{aligned}$$

On transformé (ELg) en une équation différentielle linéaire en $\dfrac{dx}{dp} = x'$.

3.4 Équations de type $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Pour rsoudre d' quations différentielles variabbles homognes, alors, on pose $y = tx$.

Exemple 3.10. Rsoudre les quations différentielles variabbles homognes suivantes

1. $xy' = x - y$.
2. $xyy' = x^2 + y^2$.
3. $xy' - y = x(x + y)$.

Maintenant on donne les solutions.

1. Pour l'quation $xy' = x - y$. (1) En divisant par x $(x \neq 0)$, puis posons $y = tx$, on obtient $y' = t + xt'$ et
$$(1) \Leftrightarrow y' = 1 - \frac{y}{x} \Leftrightarrow t + xt' = 1 - t \Leftrightarrow \frac{t'}{2t-1} = -\frac{1}{x}.$$
Par intgration des deux membres, on trouve
$$\frac{1}{2}\ln(2t-1) = -\ln x + C \Leftrightarrow \ln(2t-1) = \ln x^{-2} + 2C.$$
On en dduit que $2t - 1 = Kx^{-2}$, d'o $t = \dfrac{Kx^{-2}+1}{2}$ et finalement, puisque $y = tx$, on a
$$y = \frac{x^2 + K}{2x}.$$
2. La solution de l'quation $xyy' = x^2 + y^2$, est donner par
$$y = \pm\sqrt{\ln x^2 + C}.$$
3. L'quation $xy' - y = x(x+y)$, n'est pas homogne proprement dit mais, par chance, se rsout au moyen du mme changement dŠinconnue $y = tx$. Par un calcule, on obtient
$$y = x(Ce^x - 1).$$

3.5 Equation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'interesse maintenant aux équations différentielles du deuxième ordre, mais seulement aux EDL où les coefficients a_0, a_1, a_2 sont des constantes réelles.

Définition 3.11. Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme
$$ay'' + by' + cy = f \qquad \text{(E)}$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur I ouvert de $\mathbb{R}$. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est
$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(EH)}$$

Remarque 3.4. D'après les résultats généraux on sait que l'ensemble des solutions de (EH) est un espace vectoriel et que la solution générale de (E) est la forme $y = y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h est une solution de (EH).

Nous admettons les résultats supplémentaires :

Propriétés 3.2.
1. Pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$.

2. Les solutions de (EH) sur I forment un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, noté $S_2(I)$.

3. Si y_1, y_2 sont deux solutions indépendantes de (EH), alors y_1, y_2 est une base de $S_2(I)$, c'est à dire $S_2(I) = \{\alpha y_1 + \beta y_2\}$.

4. Pour $y_1, y_2 \in S_2(I)$, on définit le wronskien $w : I \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

   Si $w(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in I$, alors $w(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, et c'est une condition nécessaire et suffisante pour que $\{y_1, y_2\}$ soit linéairement indépendant et donc une base de $S_2(I)$.

3.5.1 Résolution de l'équation homogène associée (EH)

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y' = ry$ et $y'' = r^2 y$, donc (E) devient : $y.(ar^2 + br + c) = 0$.

Définition 3.12. L'équation
$$ar^2 + br + c = 0 \quad (E.C)$$
se nomme équation caractéristique de (EH).

Propriétés 3.3. Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :

1. $\Delta > 0$ L'équation caratéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}$$

   est une base de $S_2(I)$.

2. $\Delta = 0$ L'équation caratéristique admet une racine réelle double r, et

$$y_1(x) = e^{rx}, y_2(x) = xe^{rx}$$

   est une base de $S_2(I)$.

3. $\Delta < 0$ L'équation caratéristique admet deux racines complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$), et

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

est une base de $S_2(I)$.
Dans chacun des cas, la solution générale de (EH) est donc

$$y = Ay_1 + By_2,$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Démonstration - Il est claire que dans chaque cas $y_1(x), y_2(x)$ sont solutions de (EH). Pour vérifier qu'ils sont indépendantes il suffit d'après la proposition (1.4.1) de vérifier que leur wronskien est non nul. Par exemple dans le cas où $\Delta > 0$, le wronskien de $y_1(x), y_2(x)$ est

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0.$$

Il est conseillé de trater les deux autres cas à titre d'exercice. ∎

3.5.2 Recherche d'une solution particulière de (E)

On distingue deux cas particuliers et une méthode générale :

Cas particuliers

Premier cas particulier : le second memebre de l'équation (E) est de la forme : $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) \in \mathbb{R}[X]$.
On cherche la solution particulière sous la forme $y(x) = e^{\alpha x}x^s Q(x)$, où Q est un polynôme du même degré que le polynôme P, et l'entier s est choisi de la façon suivante.
$s = 0$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique.
$s = 1$ si α est l'une des racines de l'équation caractéristique.
$s = 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique .
Les coefficients du polynôme Q sont déterminés par identification.

Remarque 3.5. Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$, c'est à dire lorsque $f(x) = P(x)$.

Deuxième cas particulier : le second membre de l'équation (E) est de la forme :$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\omega x$, où $\omega, \alpha \in \mathbb{R}, P$ est un polynôme réel de degré n.
On cherche la solution particulière sous la forme $y(x) = e^{\alpha x}x^s\left\{Q(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x\right\}$, où Q et R sont deux polynômes ayant le même degré que le polynôme P, et l'entier s est choisi de la façon suivante.
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
$s = 1$ si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique. (alors $\alpha - i\beta$ est aussi racine del'équation cartéristique). Les polynômes Q et R sont déterminés par identification.

Remarque 3.6. Toute solution de (EH) nulle en un point de I est identiquement nulle sur I.

Remarque 3.7. Deux solutions de (EH) qui concident en un point de I, sont identiques sur I.

Méthode de variation des constantes.

Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogne , on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions vérifiant

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \dfrac{fx)}{a}. \end{cases}$$

Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$$

avec cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \dfrac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x &= 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x &= \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu' (\sin x)^2 &= 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu' (\cos x)^2 &= 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme} \quad \mu' = 1.$$

Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$. donc les solutions sont de la forme :

$$y_h + y_p = \lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Principe de superposition

Proposition 3.1. *Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y = y_1 + y_2$, où y_i est une solution de $ay'' + by' + cy = f_i(x)$.(pour $i = 1, 2$.)*

Exemple 3.11. Résoudre

$$y'' + y = x + \cos 3x \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

a.) L'équation Homogène : L'équation caractéristique est $r^2 + 1$. La solution générale de (EH) est $y = A \cos x + B \sin x$.
b.) solution particulière associée à $y'' + y = x$, x convient.
c.) solution particulière associée à $y'' + y = \cos 3x$, : En remplaçant $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ dans l'équation, on trouve $(A - 9A) \cos 3x + (B - 9B) \sin 3x = \cos 3x$, donc $A = -\dfrac{1}{8}$ et $B = 0$.
d.) conclusion : La solution générale est $y = x - \dfrac{1}{8} 3x + A \cos x + B \sin x$.

3.6 Exercices et problèmes

Exercice 3.1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + x\ln(x) = 0.$
2. $y' + 2y = x^2.$
3. $y' + y = 2\sin x.$
4. $y' - y = (x+1)e^x.$
5. $y' + y = 3x - e^x, \quad (*).$

Exercice 3.2. Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante

1. $xy' + y = x^2y^2.$
2. $-y' + \dfrac{2}{x}y^2 = e^x y, \quad (*).$

Exercice 3.3. Vrifier que $y1$ est une solution particulire de l'quation de Ricatti indiquer. Puis rsoudre cette quation , dans toutes les cas suivante

1. $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, ($y_1 = x + 1$ est une solution particulière).
2. $x^2y' + xy + x^2y = 1$, ($y_1 = \dfrac{1}{x}$ est une solution particulière), $\quad (*).$

Exercice 3.4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés

1. $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5.$
2. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2.$
3. $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1.$
4. $(x+1)y' + y = \ln x, \quad y(1) = 10.$

Exercice 3.5. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - y' = 0.$
4. $y'' - 2y' + 5y = 0.$
5. $y'' - 6y' + 9y = 0.$
6. $y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (*)$
7. $y'' + 4y' + 13y = 0. \quad (*)$

Exercice 3.6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.
   (a) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2.$
   (b) $y'' + 2y' + y = 4xe^x.$
   (c) $y'' + y' - 2y = \sin x.$
   (d) $y'' = shx.$
   (e) $y'' + y = x + e^{-3x}. \quad (\star)$
   (f) $y'' - 3y' + 2y = shx - 2xchx. \quad (\star)$
   (g) $y'' - 2y = ch2x.$
2. Dans les équations ⓐ et ⓒ, donner la solution qui satisfait les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
   Indication : pour l'équation ⓐ, chercher la solution perticulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$

Exercice 3.7. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes

1. $y' - 4y = 3, \quad (x \in \mathbb{R}).(\star)$
2. $y' - y\tan x = \sin x, \ \left(x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).(\star)$
3. $y' = \frac{y}{x} + x, \quad (x \in \mathbb{R}_+^*).$
4. $(x^2+1)y' + xy = 0, \quad (x \in \mathbb{R}).$

Exercice 3.8. Résoudre les équations différentielles variables spares suivantes

1. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0$
2. $y' = y(y-1)\cos x$
3. $y' - xy^2 = x \ (\star)$
4. $y' = \frac{x+1}{y^2}$
5. $y' = e^{x+y}, \ (\star).$

Bibliographie

[1] BABA-HAMED. C, BENHABIB. K. *Analyse I, Rappels de Cours et Exercices avec Solutions*. Office des Publications Universitaires. Alger. **1988**.

[2] KADA ALLAB. *Élément d'analyse*. Office des Publications Universitaires. Alger. **1984**.

[3] S. BALAC, F. STURM. *Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec axercices corrigés*. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne. **2003**.

[4] JACQUES DIXMIER. *Cours de mathématiques du premier cycle, première année.* Gauthier-Villars. **1986**.

[5] J. M. MONIER. *Analyse PCSI-PTSI*. Dunod, Paris 2003.

[6] N. PISCONOV. *Calcul différentiel et intégral*. Office des Publications Universitaires. Alger. **1984.**

[7] J. QUINET. *Cours élémentaires de mathématiques supérieurs, Tomes 1, 2, 3*. Dunod. Moscou. **1968**.

[8]

د. كوتي، ج. إِزرَا . اَلتحليل الريَاضي، اَلجزء الأَول. ترجمة يوسف عتيق. ديوَان المطبوعَات الجَامعية. اَلجزَائِر. 1987.

[9]

علي حميدة، عبد الوَهَاب بيبي . اَلتحليل الريَاضي، دروس و تمَارين محلولة. اَلجزء الثَاني. ديوَان المطبوعَات اَلجَامعية. اَلجزَائِر. 1988.