Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et Informatiques

Master EDP et Application
Première année (Semestre 02)

ARIOUA YACINE

Introduction Aux Calcul Fractionnaire Et Application

Année: **2021/2022**

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions Spéciales

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1 *On appelle fonction Gamma la fonction définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ \left(z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0\right).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1.1 *1.* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$. *(Posant le changement de variable* $t = \tau^2$*).*

Lemme 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *(resp. holomorphe sur le demi plan* $z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0$*) et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* \ (\textit{resp. } z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0); \ \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Lemme 1.1.2 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0, \ n \in \mathbb{N}$, *on a*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$

Preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquons 1 pour $z = n-1$.

3. Nous allons démontrer la formule $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)} = \sqrt{\pi}$.

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n. C-à-d que supposons que $\Gamma\left((n-1)+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} = \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n. ■

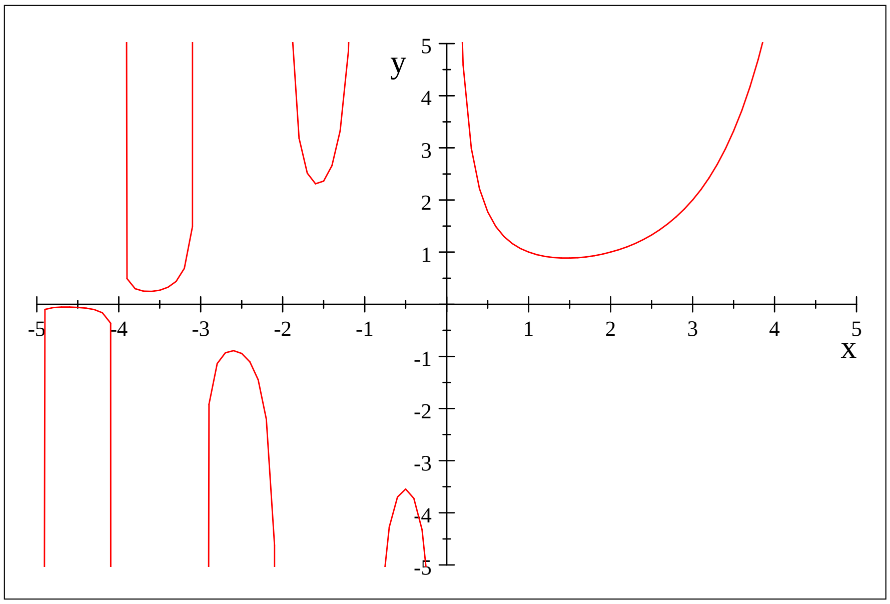
Remarque 1.1.1 *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entièrs par la formule* $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, *et la transition d'un intervalle à un autre* $(-1,0)$, $(-2,-1)$, $(-3,-1)$, ... *etc.*

La fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatifs entiers.

Exemple 1.1.2 1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

- Le graphe de la fonction Γ d'Euler



Le Graphe de la fonction Γ d'Euler

Proposition 1.1.1 *Pour tout $p > 0$, on a*

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)}.$$

Preuve. Considérons la fonction

$$f(n,p) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{p-1}dx,$$

on peut facilement voir que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n,p) = \Gamma(p).$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{p-1}dx = \left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p}\right]_0^n + \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx. \end{aligned}$$

Encore fois, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx = \frac{1}{p}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1}dx \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2p(p+1)}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)\dots[p+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)}dx \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)\dots[p+(n-1)]}\left[\frac{x^{n+p}}{n+p}\right]_0^n \\ &= \frac{n!n^p}{p(p+1)\dots(n+p)}. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\dots\dots(p+n)}.$$

■

1.2 La fonction Beta

Définition 1.2.1 *La fonction de Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,\ \ (p,q\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0).$$

Pour tout $p,q\in\mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0$, on a

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Soit $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right) \\ &= \iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy, \end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

et

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv-u(1-v) = -u.$$

De meme que le domaine $D^{'}$ correspondant à D dans les cordonnées u, v est

$$D^{'} = \{(u,v) \,/\, u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \iint\limits_{D^{'}} (uv)^{p-1}(u(1-v))^{q-1}e^{-u}\left|-u\right|dudv \\
&= \iint\limits_{D^{'}} u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv \\
&= \Gamma(p+q)\,B(p,q),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.3.1 *La fonction de Mittag-Leffter est définie par*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha > 0,$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha,\beta > 0$$

Exemple 1.3.1 *1.*

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.

$$E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(2k)!} = \cosh\sqrt{x}.$$

3.

$$E_{1,2}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{x}\left(e^x-1\right).$$

4.

$$E_{1,3}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{1}{x^2}\left(e^x-1-x\right).$$

Théorème 1.3.1 *Pour* $\alpha=n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{d}{dx}\right)^n E_n\left(\lambda x^n\right)&=\lambda E_n\left(\lambda x^n\right),\\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1}E_{n,\beta}\left(\lambda x^n\right)&=\lambda x^{\beta-n-1}E_n\left(\lambda x^n\right),\end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 *Pour* $\alpha,\beta>0,\ \lambda\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^\alpha\right)\right](s)=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-\lambda},\ s>0,\ \left|\lambda s^\alpha\right|<1.$$

Preuve. Grâce à la définition de transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^\alpha\right)\right](s)&=\int_0^{+\infty}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^\alpha\right)e^{-st}dt\\&=\int_0^{+\infty}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda t^\alpha\right)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}e^{-st}dt\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha k+\beta-1}e^{-st}dt,\end{aligned}$$

posons le changement de variable $st=\tau$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^\alpha\right)\right](s)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k s^{-\alpha k-\beta}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{+\infty}\tau^{\alpha k+\beta-1}e^{-\tau}dt\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k s^{-\alpha k-\beta}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\Gamma(\alpha k+\beta)\\&=s^{-\beta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k,\end{aligned}$$

et pour $\left|\lambda s^\alpha\right|<1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k=\frac{1}{1-\lambda s^{-\alpha}}$, donc

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^\alpha\right)\right](s)=\frac{s^{-\beta}}{1-\lambda s^{-\alpha}}=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-\lambda}.$$

■

Chapitre 2

Eléments de calcul fractionnaire

2.1 Intégrale de Rimann-Liouville

Fonctions définies sur $[a, b]$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$.

Notons par $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b] ; \; \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau$$

L'itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^2(t) &= \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) \circ \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau)\, d\tau\right) du \\
&= \int_a^t \left(\int_\tau^t du\right) f(\tau)\, d\tau \\
&= \int_a^t (t - \tau) f(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$ la nième itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Si on note $g = \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall\, 0 \leq k \leq n - 1, \; g^{(k)}(a) = 0, \; g^{(n)} = f$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 2.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)$, est définie par*

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.
C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 2.1.1 de la manière suivante :

Définition 2.1.2 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par*

$$\forall t \in [a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f, par

$$\forall t \in [a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 2.1.2 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $\left(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f\right)$ et $\left(\mathcal{I}_{+}^\alpha f\right)$:

$$\begin{aligned}
\forall t &\in \mathbb{R}^+;\ \left(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\
\forall t &\in \mathbb{R};\ \left(\mathcal{I}_{+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $$\left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$
2. $$\left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}d\tau,\ \text{posons } \tau-a=s(t-a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),\ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2. Même idée (le chengement de variable est $b-\tau=s(b-t)$). ■

Théorème 2.1.1 *Si $f\in L^1([a,b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f$ existe pour tout $\alpha>0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\in L^1([a,b])$.*

Proposition 2.1.2 *Soit $\alpha>0,\ \beta>0,$ et $f\in L^1([a,b])$. Alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f=\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}=\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)\,ds\right)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^{\tau}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)\,dsd\tau, \quad \left|\begin{array}{l}\text{changement de l'ordre}\\ \text{d'intégration}\end{array}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau ds, \quad \left|\begin{array}{l}u=\frac{\tau-s}{t-s},\ du=\frac{d\tau}{t-s}\\ \tau=(t-s)u+s,\ u:0\to 1\end{array}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_s^t (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}duds,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\,duds, \quad \left|B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.1 *Soit* $\alpha > 0,\ f \in L^1([0,b]),\ b > 0.$
Alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f$ *est*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) = s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s)$$

Preuve. On écrire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f$ comme convolution de deux fonction $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$, C-à-d

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right) * f(t) \\
&= g(t) * f(t)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) &= \mathcal{L}(g * f)(s) \\
&= \mathcal{L}(g)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
&= s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

■

2.2 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

2.2.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.2.1 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b]\,,\ \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.2.1 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.2.2 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b]\,,\ \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_{+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.2.3 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.2.4 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_{-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Remarque 2.2.1 *1. Pour* $\alpha = 0$, $n = 1$*.on a* $\mathcal{D}_{a^+}^{0} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{1} f\right) = f(t)$.

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) = \mathcal{D}_{+}^{n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) = \mathcal{D}_{-}^{n} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}.$$

Proposition 2.2.1 *Pour* $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} 1.\ \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \\ 2.\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition 2.2.1 et proposition 2.1.1 on a

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)..(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)..(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre coté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 2.2.2 *Pour $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$ on a*

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\alpha)\, t^{\lambda-\alpha} \\
&= \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\ldots(1-(\alpha-\lambda))\, t^{\lambda-\alpha} \\
&= \begin{cases} \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,...,n\} \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,...,n\} \end{cases},\ \lambda > -1.
\end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m,\ m \in \{1,2,...,n\}$ C-à-d

$$\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m}\right)(t) = 0,\ m \in \{1,2,...,n\}$$

2.2.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 2.1.1 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.2.5 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.6 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

Remarque 2.2.3 *Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) = (-1)^n \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)\right) \end{cases}.$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 2.2.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+} - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^{n}([a,b])$, alors presque partout*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{\alpha \to n^{-}} {}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} f(t) & = & f^{(n)}(t) \\ \lim\limits_{\alpha \to n^{-}} {}^{C}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha} f(t) & = & (-1)^{n} f^{(n)}(t) \end{array}$$

Proposition 2.2.2 *Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a*

$$\begin{array}{lrcl} 1. & \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) & = & \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \ \beta > n. \\ 2. & \left({}^{C}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) & = & \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \ \beta > n. \end{array}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition et proposition on a

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1}\, d\tau, \text{ posons } \tau - a = s(t-a) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_{0}^{1} (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\ & \left| B(n-\alpha,\beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right| \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \text{ puisque } (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)\Gamma(\beta-n) = \Gamma(\beta). \end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 2.2.4 *Pour* $\lambda = \beta - 1, \ a = 0$ *on a*

$$\begin{aligned} \left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \tfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \lambda \notin \{0,1,2,...,n-1\} \\ 0, & si \quad \lambda \in \{0,1,2,...,n-1\} \end{cases} \quad , \ \lambda > -1. \end{aligned}$$

C-à-d

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{m}\right)(t) = 0, \ m \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

Théorème 2.2.1 *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *si* f *possède* $(n-1)$ *dérivées en* a *et* $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)$ *existe. Alors*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],$$

presque pour tout $t \in [a,b]$.

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] d\tau \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{array}{ccc} g(\tau) = f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k & \to & \frac{d}{d\tau}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] \\ \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} & \to & -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] d\tau \\ &= \left[\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g(\tau)\right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} g(t)$$

De même façon pour n-fois,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[g\left(t\right)\right] &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+n}\frac{d^n}{dt^n}g\left(t\right)\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}g\left(t\right)\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right),\ \ \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]=0,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\\
&= \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.1 *Soientt* $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha]+1$ *et* $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)$, $\left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)$ *sont existent, on suppose que* $f^{(k)}\left(a\right)=0$ *pour* $k=0,1,...,n-1$.*Alors*

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right)=\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right).$$

2.2.3 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pour $h>0$ on a :

$$f^{'}\left(t\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f\left(t\right)-f\left(t-h\right)\right]$$

et la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
f^{''}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f^{'}(t)-f^{'}(t-h)\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\left(f(t)-f(t-h)\right)-\frac{1}{h}\left(f(t-h)-f(t-2h)\right)\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)\right].
\end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f et donnée par :

$$f^{(n)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(t-kh), \tag{1.1}$$

où

$$C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}.$$

Il est possible d'étendre C_k^n à $k>n$, en posant $C_k^n=0$.

La formule (1.1) devient alors

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha\in\mathbb{R}^+-\mathbb{N}$, et $k\in\mathbb{N}$,

$$C_k^\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Notons cette fois que $C_k^\alpha\neq 0$ même si $k>n$,

Définition 2.2.7 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ {}^{GL}\mathcal{D}_{+}^{\alpha}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.8 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ {}^{GL}\mathcal{D}_{-}^{\alpha}f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t+kh).$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire (de Liouville) sur $\mathbb{R}$.

2.2.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre donne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace. Cette dernière propriété est omniprésente dans de nombreux domaines d'applications présents dans la section précédente.

Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$\mathcal{D}^{\alpha}\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right)=\lambda\mathcal{D}^{\alpha}f(t)+\mu\mathcal{D}^{\alpha}g(t),$$

pour n'importe quelle approche de dérivation.

Compositions entre opérateurs

Proposition 2.2.3 *Soit* $\alpha>0,\ \beta>0,\ n=[\alpha]+1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. Si $f(t)\in L_p([a,b])\,,\ (1\leq p\leq\infty)\,,$ *, alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=f(t)\,,\ \text{ et }\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=f(t)\,,$$

2. Si $\alpha>\beta,$ *et* $f(t)\in L_p([a,b])\,,\ (1\leq p\leq\infty)\,,$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta}f\right)(t)\,,\ \text{ et }\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta}f\right)(t)\,,$$

3. Si $f(t)\in C^q([a,b])\,,\ q=[\alpha+\beta]+1,$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t)\,,\ \text{ et }\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t)\,,$$

4. Si $f(t)\in L_1([a,b])\,,\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}f\right)\in AC^n([a,b]),$ *alors*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}f\right)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},\\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha}f\right)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(b-t)^{\alpha-k},\end{aligned}$$

En particulier si $0<\alpha\leq1$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t)\,,\\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t)\,,\end{aligned}$$

Proposition 2.2.4 *Soit* $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha] + 1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. Si $f(t) \in C^q([a,b]),\ q = [\alpha+\beta]+1,$ *alors*

$$\left({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ {}^C\mathcal{D}^{\beta}_{a^+}\ f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{a^+} f\right)(t),\ \ et\ \left({}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ {}^C\mathcal{D}^{\beta}_{b^-}\ f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{b^-} f\right)(t),$$

2. Si $f(t) \in C^n([a,b]),$ *ou* $f(t) \in AC^n([a,b]),$ *alors*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f)^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,\\ \left(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}(f)^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k,\end{aligned}$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\ f\right)(t) &= f(t) - f(a),\\ \left(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\ {}^C\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\ f\right)(t) &= f(t) - f(b),\end{aligned}$$

Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [8] apparait une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvé dans [35].

Corollaire 2.2.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $n - 1 < \alpha \leq n.$ *Soit* $f(t) \in C^n([a,b]),$ *et* $g(t) \in C^n([a,b]),$ *et Alors*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} g(t)\,dt &= \int_a^b \mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f(t)\,g(t)\,dt\\ \int_a^b f(t)\,\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} g(t)\,dt &= \int_a^b \mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(t)\,g(t)\,dt\end{aligned}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-it\xi}dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2.2.2 *Soit* $0 < \alpha \leq 1,\ f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{D}_{\pm}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R}),\ 1 \leq k \leq n$. *Alors*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{\pm}^{\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{-\alpha} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Corollaire 2.2.3 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1,$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Preuve. D'aprés le lemme 2.2.2,

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{\pm}^{n-\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Comme pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f = \mathcal{D}_{+}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f\right](\xi) &= \mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f\right] = (i\xi)^n \mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f\right](\xi) \\ &= (i\xi)^n (+i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\ &= (+i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi). \end{aligned}$$

De même pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f = (-1)^k \mathcal{D}_{-}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f\right](\xi) &= \mathcal{F}\left[(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f\right] = (-1)^n (i\xi)^n \mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f\right](\xi) \\ &= (-i\xi)^n (-i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\ &= (-i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi). \end{aligned}$$

■

Transformée de Laplace

On dit qu'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à croissance sous-exponentielle si

$$\exists A > 0,\ \exists s_0 \in \mathbb{R},\ \exists t_0 > 0,\ \forall t > t_0\ ;\ |f(t)| \leq e^{s_0 t}.$$

Si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, rappelons que sa transformée de Laplace est définie par

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, alors

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \tag{2.1}$$

L'extension au cas fractionnaire s'effectue cette fois avec les opérateurs fractionnaires à supports minorés par 0.

Lemme 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[\mathcal{I}_0^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s).$$

Proposition 2.2.5 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, et $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors*

1.

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0).$$

2.

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}\left[{}^C\mathcal{D}_0^\alpha f\right](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (f)^{(k)}(0).$$

Preuve.

1. On applique (2.1) à $\left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)$, puis on utilise le lemme 2.2.3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right](s) = s^n \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0) \\
&= s^n s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0) \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

2. De même on applique le lemme 2.2.3 à $f^{(n)}$, puis on utilise (2.1) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[{}^{C}\mathcal{D}_0^{\alpha} f\right](s) &= \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_0^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n} f\right](s) = s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) \\
&= s^{\alpha-n}\left[s^n \mathcal{L}\left[f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)\right] \\
&= s^{\alpha}\mathcal{L}\left[f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.5 *On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^{\alpha}(fg) \neq (\mathcal{D}^{\alpha} f)\, g + f\,(\mathcal{D}^{\alpha} g) \\
&\mathcal{D}^{\alpha}(fg) \neq \tfrac{(\mathcal{D}^{\alpha} f)g - f(\mathcal{D}^{\alpha} g)}{g^2} \\
&\mathcal{D}^{\alpha}(f \circ g) \neq (\mathcal{D}^{\alpha} f)(g) . g'.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Equations Différentielles Fractionnaires

Dans cette chapitra on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 3.0.9 *Soit* $\alpha > 0,\ \alpha \notin \mathbb{N},\ n = [\alpha] + 1$ *et* $f : A \sqsubset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$ *alors :*

$$\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{3.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville.
De la même manière

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \tag{3.3}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

3.1 Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 3.1.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'quation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville:*

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.5}$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}.$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve.
Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 2.2.2, on a:

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m} = 0, \qquad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.5), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^{\alpha-m}, \qquad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.
Donc la solution générale de (3.5), donné comme une somme des solutions particulières (3.6), C.-à-d.

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$. ■

Lemme 3.1.2 *Supposons que*

$$u \in C(0,1) \cap L(0,1), \ \ et \quad \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u \in C(0,1) \cap L(0,1).$$

Alors:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}. \tag{3.7}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ (Proposition 2.2.3) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) &= u(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-k)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)} t^{\alpha-k} \\
&= u(t) - \left[\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-1)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-2)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\alpha-2} + .. + \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u\right)(0)}{\Gamma(\alpha-n+1)} t^{\alpha-n} \right]
\end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-m)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 1, 2, \ldots, n$, on trouve l'égalité (3.7).

■

Lemme 3.1.3 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $y \in C([0,1])$.
Alors l'unique solution de preblème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \tag{3.8}$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds,$$

tel que:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1. \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$, sur l'équation (3.8) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t)\right] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) = 0.$$

D'après le Lemme 3.1.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ $(n = [\alpha] + 1 = 2)$, on a:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) = 0,$$

ce qui imlique

$$u(t) = -\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2},$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.8) , donne par:

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2}. \tag{3.10}$$

Les condition aux limites implique que:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \Rightarrow \quad 0 = -0 - 0 - \lim\limits_{t\to 0} C_2 t^{\alpha-2} & \Rightarrow \quad C_2 = 0, \\ u(1) = 0 & \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_1 & \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (3.10) , équivalente à:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right] y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= \int_0^t \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)\, ds + \int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)\, ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■

3.2 Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 3.2.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo:*

$$^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\, u(t) = 0, \tag{3.11}$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Preuve.
Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 2.2.4, on a:

$$^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\, t^m = 0, \qquad \text{pour} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.11), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^m, \qquad \text{pour} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.12}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.
Donc la solution générale de (3.11), donné comme une somme des solutions particulières (3.12), C.-à-d.

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

■

Lemme 3.2.2 *Supposons que $u \in C^n([0,1])$. Alors:*

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\, u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}. \tag{3.13}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in C^n([0,1])$ (Proposition 2.2.4) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ u(t) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k \\
&= u(t) - \left[u(0) + u'(0)\, t + \frac{u''(0)}{2} t^2 + \cdots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{u^{(m)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, on trouve facilement l'égalité (3.13). ∎

Lemme 3.2.3 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $y \in C([0,1])$.
Alors l'unique solution de preblème aux limites

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = y(t), & 0 < t < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0, \ u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}, \tag{3.14}$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds,$$

tel que:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$, sur l'équation (3.14) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} \left[{}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) - y(t) \right] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ u(t) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y(t) = 0.$$

D'après le Lemme 3.2.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ $(n = [\alpha] + 1 = 2)$, on a:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}\ u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t, \ C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) + C_0 + C_1 t - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y(t) = 0,$$

ce qui imlique

$$u(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y(t) - C_0 - C_1 t,$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.14), donne par:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_0 - C_1 t. \tag{3.16}$$

Les condition aux limites implique que:

$$\begin{cases} u(0) + u'(0) = 0 & \Rightarrow \quad C_0 + C_1 = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 & \Rightarrow \quad C_0 + 2C_1 = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)'(1) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} C_0 = -\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)(1) - \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)'(1) \\ \qquad = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ C_1 = \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)(1) + \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} y\right)'(1) \\ \qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (3.14), équivalente à:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad - \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \\ &= \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] y(s)\, ds \\ &\quad + \int_t^1 \left[\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] y(s)\, ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■

3.3 Existence et uniquence de la solution

Ce section constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle (principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...). On abordera ensuite, la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites d'équation différentielle d'ordre fractionnaire.

3.3.1 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 3.3.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $F : E \to E$ *une application continue.*

i) *On dit que* $x \in E$ *est un point fixe de* F *si* $f(u) = u$.

ii) *On dit que* F *est contractante si elle est lipschitzienne de rapport* $0 < L < 1$, *c'est-à-dire s'il existe* $0 < L < 1$, *tel que*

$$\forall u, v \in E,\ d\left(F(u), F(v)\right) \leq Ld\left(u, v\right),\ 0 < L < 1.$$

Définition 3.3.2 ***(Complètement continue)***

Soient X *et* Y *deux espaces de Banach et* $F : X \to Y$ *une application définie de* X *à valeurs dans* F. *On dit que* F *est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de* X *en un ensemble relativement compact dans* Y. F *est dite compacte si* $F(X)$ *est relativement compacte dans* Y.

Théorème 3.3.1 ***(Ascoli-Arzelà)***

Soit A un sous ensemble de $C(J; E)$; A est relativement compact dans $C(J; E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble$A$ est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et } f \in A.$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et } f \in A.$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 3.3.2 ***(Banach)***
Soient X un espace de Banach, et un opérateur contractant $F : X \to X$.Alors F admet un point fixe unique.
i.e $\exists! u \in X$ tel que $Fu = u$.

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énnoncer est celui de Schauder.

Théorème 3.3.3 ***(Schauder)***
Soit $(E; d)$ un espace metrique complet, et X une partie convexe et fermée de E, et soit $F : X \to X$ une application telle que l'ensemble $\{Fu : u \in X\}$ est relativement compacte dans E. Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 3.3.4 ***(Leray-SchauderAlternative)*** *Soit X un espace de Banach, C une sous-ensmble convexe et fermée dans X, U est un sous-ensmble ouvert de C et $0 \in U$. Supposons que $F : \bar{U} \longrightarrow C$ un opérateur continu et compact ($F(\bar{U})$ est ralativement compact de C). Alors*
(i) F admet un point fixe de $\bar{U}$, ou
(ii) Il existe un $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ avec $u = \lambda F(u)$.

Théorème 3.3.5 ***(Schaefer)***
Soient X un espace de Banach et $F : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda Fu = u,\ \lambda \in]0, 1[\},$$

est borné, alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 3.3.6 ***(Krasnoselskii)***
Soit M un sous ensmble fermé et borné, convexe et non vide d'un espace de Banach X. Soient A, B deux opérateures tels que
(a) $Ax + By \in M,\ \forall x, y \in M$.
(b) A est compact et continu.
(c) B est un opérateur contractante.
Alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

3.3.2 Problème de Cauchy d'equation différentielle d'ordre fractionnaire

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour des equation différentielles d'ordre fractionnaire (on utilise la dérivée au sens de Caputo) et on a le problème sous la forme suivant :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{3.17}$$

tell que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme 3.3.1 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.18}$$

si et seulement si elle est la solution de l'equation intégrale:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) dx. \tag{3.19}$$

Preuve. On applique l'operateur $\mathcal{I}^\alpha$ à l'équation (3.18) on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\alpha \, {}^C\mathcal{D}^\alpha y &= \mathcal{I}^\alpha f(t) \Rightarrow y(t) + c_0 = \mathcal{I}^\alpha h(t) \\ &\Rightarrow y(t) = \mathcal{I}^\alpha h(t) - c_0. \end{aligned}$$

La conditions initial donne

$$y(0) = (\mathcal{I}^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0 \Rightarrow c_0 = -y_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{I}^\alpha h(t) - (-y_0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) dx + y_0. \end{aligned}$$

Inversment on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) dx \\ &= \mathcal{I}^\alpha h(t) + y_0, \end{aligned}$$

on applique ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}$ à l'equation intégrale (3.19),

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) &= {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{I}^{\alpha}h)(t) + {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}\left(y_0\right) \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il rest vérifier que $y(0) = y_0$,

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathcal{I}^{\alpha}h(0) + y_0 = 0 + y_0 \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème (3.18). ■

Théorème 3.3.7 *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et vérifie la condition de Lipschitz suivant :*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq k\,|y - z|\,, \quad \forall t \in [0, T], \ \text{ et } y, z \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1,$$

alors il existe une solution unique de problème de Cauchy (3.17).

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Banach 3.3.2.
On transforme le problème (3.17) en un problème au point fixe (Lemme 3.3.1), en considérant l'opérateur :

$$\begin{array}{llll} F: & C\left([0, T], \mathbb{R}\right) & \to & C\left([0, T], \mathbb{R}\right) \\ & y & \to & F\left(y\right)\left(t\right) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s, y(s)) dx. \end{array}$$

où $C\left([0, T], \mathbb{R}\right)$ l'espace de Banach des fonctions continues y définies de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$; muni de la norme

$$\|y\| = \sup_{t \in [0, T]} |y(t)|\,.$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.17).
F est bien défini, en effet : si $y(t) \in C\left([0, T], \mathbb{R}\right)$, alors $Fy(t) \in C\left([0, T], \mathbb{R}\right)$.
Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en

effet si $y_1, y_2 \in C([0,T],\mathbb{R})$, $t \in [0,T]$, en utilisant la condition de Lipschitiz on obtient::

$$\begin{aligned}
|Fy_1 - Fy_2| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s)))(t-s)^{\alpha-1}ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (|f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))|(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\|y_1 - y_2\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

En vertu de $\frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.17). ■

3.3.3 Problème aux Limites d'equation différentielle d'ordre fractionnaire

Dans cette partie on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites d'equation différentielle d'ordre fractionnaire sous formes :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t,y(t)), \quad t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \tag{3.20}$$

tell que $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et a, b des constant réelles $(a + b \neq 0)$.

Définition 3.3.3 *On dit que une fonction $y \in C^1([0,T], \mathbb{R})$, est solution du problème $(3,20)$ si y vérifier l'équation ${}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t,y(t))$, sur A et avec la condition $ay(0)+by(T) = c$.*

Lemme 3.3.2 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \tag{3.21}$$

si et seulement si elle est la solution de l'equation intégrale:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right]. \tag{3.22}$$

Preuve. On applique l'opéateur $\mathcal{I}^\alpha$, à l'équation (3.21),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\alpha\, {}^C\mathcal{D}^\alpha y &= \mathcal{I}^\alpha f(t) \Rightarrow y(t) + c_0 = I^\alpha h(t) \\ &\Rightarrow y(t) = \mathcal{I}^\alpha h(t) - c_0. \end{aligned}$$

D'aprés les cnditions aux limites on a :

$$\begin{aligned} y(0) &= (\mathcal{I}^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0. \\ y(T) &= (\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c_0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= -ac_0 + b[\mathcal{I}^\alpha h(T) - c_0] = c \\ &\Rightarrow (a+b)c_0 = b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c \\ &\Rightarrow c_0 = \frac{1}{a+b}[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c], \quad a+b \neq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{I}^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b}[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right]. \end{aligned}$$

Inversment on a :

$$y(t) = (\mathcal{I}^\alpha h)(t) - \frac{1}{a+b}[b\,(\mathcal{I}^\alpha h)\,(T) - c],$$

on applique ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ à l'equation intégrale (3.22),

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) &= {}^C\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{I}^\alpha h)(t) - {}^C D^\alpha[\frac{1}{a+b}(b\,(\mathcal{I}^\alpha h)\,(T) - c] \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Il rest que de vérifier $ay(0) + by(T) = c$.

$$\begin{cases} y(0) = (\mathcal{I}^\alpha h)\,(0) - \frac{1}{a+b}\,[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \\ y(T) = (\mathcal{I}^\alpha h)\,(T) - \frac{1}{a+b}\,[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned} ay(0)+by(T) &= \frac{-a}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c\right]+b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-\frac{b}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c\right] \\ &= -\frac{a+b}{a+b}\left[b(\mathcal{I}^\alpha h)(T)-c\right]+b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) \\ &= -b(\mathcal{I}^\alpha h)(t)+c+b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) \\ &= c. \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème (3.21).

■

Théorème 3.3.8 *Soit* $0<\alpha<1$ *et* $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *et vérifie la condition de Lipschitz suivant :*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq k(x-y), \quad \forall t\in[0,T], \text{ et } x,y\in\mathbb{R}$$

si

$$\frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}<1, \tag{3.23}$$

Alors le problème $(2,12)$ *admet une solution unique sur* $[0,T]$*,*

Preuve. On transformer le problème $(3,20)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F:C([0,T],\mathbb{R})\to C([0,T],\mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-c\right]. \tag{3.24}$$

Donc les points fixes de F sont les solution du problème (3.20) on a :
F est bien défini, en effet : si $y\in C([0,T],\mathbb{R})$ alors $(Fy)\in C([0,T],\mathbb{R})$,
donc si montrer F est contraction alors F admet un point fixe en effet si $x,y\in C([0,T],\mathbb{R})$

alors $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,ds \\
&\quad +\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\
&\leq \frac{k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|b|k\,\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,\|x-y\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,\|x-y\|_\infty\,.$$

En vertu de (3.23), on déduire que F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe et cette point est la solution du problème $(3,20)$. ■

On utilisant le théorème du point fixe de Schaefer pour deuxième résultat de la solution du $(3,20)$.

Théorème 3.3.9 *Soit les deux condition suivant:*
(H1) La fonction $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est continue.*
(H2) Il existe une constant $M>0$ *tell que :*

$$|f(t,x)|\leq M,\quad \forall t\in[0,T],\ \textit{et}\ x\in\mathbb{R}.$$

Alors, le problème $(3,20)$ *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.24) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. F est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergent pour $\|.\|_\infty$ vers y. C-à-d

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|_\infty=0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0, \quad \forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{x\in[0,T]} |f(s, y_n(s) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{x\in[0,T]} |f(s, y_n(s) - f(s, y(s))| \, ds \\
&\leq \frac{\|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
&\leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty .
\end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty \to 0 \text{ quand n} \to \infty.$$

d'où la continuité de F.

Etape 2. L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$, en effet suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une constante $L > 0$: pour tout $y \in B_r$,

$$B_r = \{y \in C([0,T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq r\}$$

on a $\|F(y)\|_\infty \leq L$.

Par $(H2)$ on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = L.$$

par suite $F(B_r)$ est borné.

Etape 3. L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$.

Soit $t_1,t_2 \in (0,T],\ t_1 < t_2,\ B_r$ un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ et soit $y \in B_r$,

Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2 - F(y)(t_1)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\right]ds \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^\alpha - t_2^\alpha),
\end{aligned}$$

qunand $t_1 \to t_2$, momber droit de l'inégalité précédent tend vers 0, d'où la continuité de F d'après l'étape 2, et 3, et le théorème d'Ascoli-Arzélà, $F(B_r)$ est relativement compact pour tuot borné B_r. **C-à-d** F est complètement continu et par l'étape 1, F est continu par conséquent, $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4.

Donc il reste à montrer que $\mathcal{E} = \{y \in C(A,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y)\}$ tell que $0 < \lambda < 1$, est borné.

Soit $y \in \mathcal{E} \Rightarrow y = \lambda F(y)$, donc $\forall t \in [0,T]$, on a :

$$y(t) = \lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c\right]\right],$$

et d'après $(H2)$, et $\forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s))\right|ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s))\right|ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R.$$

Cela $\mathcal{E}$ montre que est borné. alors d'après le théorème de Schaefer 3.3.5 on déduit que F admet au moins un point fixe que est une solution du problème (3.20). ■

Bibliographie

[1] A.A. KILBAS, H.H. SRIVASTAVA, J.J. TRUJILLO, *Theory and Applications of Fractional Dierential Equations,* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006..

[2] A.A. KILBAS, J.J. TRUJILLO, *Differential equations of fractional order: methods, results and problems II*, Appl. Anal. 81 (2002) , 435-493.

[3] A.M. NAKHUSHEV, *The Sturm–Liouville problem for a second order ordinary differential equation with fractional derivatives in the lower terms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 234 (1977) , 308-311.

[4] T. HOUMOR, *Analyse du Chaos dans un Système d'équations Différentielles Fractionnaires,* Thèse Doctorat en sciences, Univ de Constantine, 2014.

[5] I. PODLUBNY, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1999.

[6] K.S. MILLER, B. ROSS, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.

[7] S. ZHANG, *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations*, Electron. J. Diff. Equat. 36 (2006) , 1–12.