UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE-M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

**Domaine :** Mathématiques et Informatique
**Filière :** Mathématiques
**Master :** Analyse Fonctionnelle

# Cours polycopié pour le module

# Analyse Fonctionnelle 2.

**Dahmane Achour**

**E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz**

**Année 2019-2020**

# Table des matières

0.1 Introduction . . . . . . . . . . 2

**1 Espaces de suites classiques et son dual. 3**

1.1 Espaces de suites $\ell^\infty$, $\ell^p$ et $c_0$ . . . . . . . . . . 4

1.2 Séparabilité . . . . . . . . . . 6

1.3 Dualitè . . . . . . . . . . 8

1.4 Dual topologique de $l^q$(Duaux des espaces de suites classiques) . . . . . . . 10

1.5 Bidual d'un espace normè et espaces rèflexifs . . . . . . . . . . 12

1.6 Les énoncés d'exercices . . . . . . . . . . 15

**2 Topologies faibles et faibles* 19**

2.1 Rappel sur la topologie la moins fine . . . . . . . . . . 20

2.2 La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ . . . . . . . . . . 24

2.3 Topologie faible, ensembles convexes et opérateurs linéaires . . . . . . . . . 28

2.4 La topologie faible* $\sigma(E^*, E)$ . . . . . . . . . . 29

2.5 Espaces réflexifs et topologie faible . . . . . . . . . . 31

2.6 Exercices . . . . . . . . . . 33

**3 Quelques classe d'opérateurs 35**

3.1 Compacité dans les espaces de Banach . . . . . . . . . . 36

3.2 Applications linéaires compactes . . . . . . . . . . 39

3.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt . . . . . . . . . . 44

## 0.1 Introduction

**Cours polycopié pour le module Analyse Fonctionnelle II.**

**Dahmane Achour. E-mail : dahmane.achour@univ-msila.dz**

Le présent polycopié reprend un cours de première année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites classiques $\ell^{\infty}$, $\ell^{p}$ et $c_0$, la topologie faible et quelques classes d'opérateurs (compacts, Hilbert Schmidt). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

**Objectifs.** Le but de ce cours est de fournir les outils d'analyse fonctionnelle nécessaires et largement utilisées dans l'analyse mathématique. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

**Connaissances préalables recommandées.** Il est conseillé de connaitre les notions de base de la topologie générale et de l'analyse fonctionnelle.

**Mode d'évaluation :** a) une épreuve écrite. b) Travail continu.

Les livres dont il est largement inspiré sont :

• H. Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London. 2011.

• N. E. Hassan. Topologie générale et espaces normés, Dunod Malakoff, 2011.

• Isabelle Chalendar et Emmanuel Fricain. Compléments en analyse. Cours et exercices. Master- Mathématiques pures. Cours de l'année 2011-2010. http ://math.univ-lille1.fr/~fricain/enseignement.html

• B. Maurey. Analyse fonctionnelle et théorie spéctrale "MT04". Cours de l'année 2001-2002. https ://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/ts012/poly/mths.pdf

# Chapitre 1

# Espaces de suites classiques et son dual.

L'essentiel du cours

## 1.1 Espaces de suites $\ell^\infty$, $\ell^p$ et $c_0$

Nous noterons $\mathcal{S}$ l'espace de toutes les suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles ou complexes.

$$\mathcal{S} = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition (+)

$$x + y = (x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

et le loi (.)

$$\lambda x = \lambda (x_n)_n = (\lambda x_n)_n \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Définitions 1.1.1** *1. Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $\ell^p$ l'espace vectoriel des suites des scalaires $x = (x_n)_n$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|^p$ est convergente.*

$$\ell^p = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < \infty\right\}.$$

*Pour tout $x = (x_n)_n \in \ell^p$, on pose*

$$\|x\|_p = (\sum_{n\geq 1} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

*2. Pour $p = \infty$, on désigne par $\ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites de scalaires bornées.*

$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_n \text{ est bornée}\}$$

*Pour tout $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$, on pose*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

*3. On désigne par $c$ l'espace vectoriel de $\ell^\infty$, formet des suites convergente.*

$$c = \left\{x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \underset{n}{\longrightarrow} \alpha\right\}$$

4. *On désigne par $c_0$ l'espace vectoriel de $\ell^\infty$, formet des suites qui converge vers* $0$

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \underset{n}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

5. *On designe par $c_c$ le sous espace vectoriel de $c_0$, formet des suites dont tous les termes sont nuls souf un nomber finie.*

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $e_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 1} \in c_c$ ou $\delta_{n,k}$ le symbole de kroncker définie par

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & si \quad k = n \\ 0 & si \quad k \neq n \end{cases}$$

Autrment dit, $e_n$ est la suite dont le termes d'indice $n$ vout 1,et tous les termes sont nuls.

On a les propriétés suivantes.

**Proposition 1.1.2** *1) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $l^p$ est un espace vectoriel et l'application*

$$x \longrightarrow \|x\|_p$$

*est une norme sur $l^p$.*

*2) $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$ est un espace de Banach.*

*3) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

*4) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a*

$$c_c \subset l^p \subset c_0 \subset l^\infty.$$

*5) Pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, on a*

$$l^p \subset l^q \Longleftrightarrow p \leq q$$

*6) Pour tout $1 \leq p \leq q < \infty$, alors pour tout $x = (x_n)_n \in l^p$, on a*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p .$$

**Proposition 1.1.3** *Soit $1 \leq p \leq \infty$, et $p^*$ l'exposant conjugue de $p$ $(1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*})$, pour tout $x \in \ell^p, y \in \ell^{p^*}$, la serie (note $x.y$) de terme génerale $(x_n y_n)_n$, est absolument convergente (i.e $xy \in \ell^1$), et on a l''inégalité de Hölder*

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \, . \, \|y\|_{p^*}$$

*i.e.* $\sum_{n \geq 1} |x_n y_n| \leq (\sum_{n\geq 1} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n \geq 1} |y_n|^{p*})^{\frac{1}{p*}}$, *en particuler l' application bilinèaire*

$$\begin{array}{ccc} l^p \times l^{p*} & \longrightarrow & l^1 \\ (x,y) & \mapsto & xy = (x_n y_n)_n \end{array}$$

est continue et de norme 1.

**Corollaire 1.1.4** *Soit $0 \leq p, q, s \leq \infty$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $x \in l^p$ et $y \in l^q$, alors on a $x.y \in l^s$, et $\|x.y\|_s \leq \|x\|_p \|y\|_q$.*

**Théorème 1.1.5** ***(Inegalité de Hölder géneralisé)*** *soit $0 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $x \in l^p, y \in l^q$, alors on a $xy \in l^r$,et*

$$\|x.y\|_r \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

## 1.2 Séparabilité

**Définition 1.2.1** *On dit qu'un espace topologique $E$ est séparable s'il existe une partie dénombrable $D \subset E$ qui soit dense dans $E$.*

***Exemple 1.2.2*** *1. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple,$\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$). Plus généralement, tout fermé de $\mathbb{C}$ est séparable (exercice)*

2. *Tout espace normé de dimension finie est séparable : si $F$ est un espace vectorielde dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $(x_1, ..., x_n)$ est une base de $F$, l'ensemble dénombrable $D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{Q} \right\}$ est dense dans $F$.*

**Définition 1.2.3** *Soient $E$ un espace normé et $A$ une partie de $E$. On dit que $A$ est totale dans $E$ si le sous-espace vectoriel (algébrique) engendré par $A$ est dense dans $E$. Une famille libre et totale d'un espace normé $E$ est appelée base topologique de $E$.*

***Exemple 1.2.4*** *La suite canonique $(e_n)_{n\geq 0}$ est totale dans $l^p$ pour tout $1 \leq p < \infty$. Elle n'est pas totale dans $l^\infty$, mais elle est totale dans $c_0$.*

Notons qu'une partie génératrice est totale ; la réciproque est en général fausse : un sousespace vectoriel dense d'un espace normé $E$ distinct de $E$ est total et non générateur.

**Proposition 1.2.5** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*(i) $E$ est séparable.*

*(ii) $E$ possède une partie totale et au plus dénombrable.*

*(iii) Il existe une suite croissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$ telle que $\cup_{n\geq 0} F_n$ soit dense dans $E$.*

**Exemple 1.2.6** *Les espaces $l^p$ sont séparables pour $1 \leq p < \infty$.*

**Preuve.** Pour tout $n \geq 0$, désignons par $e_n$ le nième vecteur de la suite canonique. Le sous-espace $F_n = Vect(e_0, ..., e_{n-1})$ est formé des vecteurs $y$ de $l^p$ dont les coordonnées $y_j, j \geq n$ sont nulles. Il est facile de voir que tout $x \in l^p$est limite d'une suite de tels vecteurs $y$. ■

## 1.3 Dualitè

On notera $X$ et $Y$ deux espaces de Banach. La norme sur $X$ est usuellement notée $\|\cdot\|_X$ ou simplement $\|\cdot\|$. La boule unité fermée de $X$ sera notée $B_X$. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $X$ dans $Y$.

On dira que deux espaces de Banach $X, Y$ sont isomorphes ($X \sim Y$) s'il existe un opérateur invertible $I$ (dit isomorphisme) de $X$ dans $Y$. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach $X, Y$ sont isométriques ($X \simeq Y$) s'il existe une isométrie entre $X$ et $Y$.

**Définition 1.3.1** *(dual d'un espace normé) Soit $X$ un espace normè sur $\mathbb{K}$, on appelle dual topologique de $X$ et on note $X^*$ l'espace de Banach $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$. Un element de $X^*$ est dit forme lineaire continue.*

Le dual topologique de $X$ concide avec le dual algèbrique de $X$ ssi $X$ est de dimesion finie. Donc si $X$ est de dimesion infinie alors le dual topologique inclus strictement dans le dual algèbrique.

**Définition 1.3.2** *(application adjoints) soient $X$ ,$Y$ deux espaces normès et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} Y^* & \longrightarrow & X^* \\ y^* & \mapsto & T^*(y^*) = y^* \circ T \end{array}$$

*est appelleè la **transposé** ou **l'adjoint** de $T$ et on la note $T^t$ ou $T^*$. Pour mieux retenir la dèfinition il suffit de memoirse le diagramme communtatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ y^* \circ T & \searrow & \downarrow y^* \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

**Exemple 1.3.3** *Soient $X$ un espace normé, $E$ un sous-espace vectoriel de $X$ et $i : E \hookrightarrow X$ l'injection canoniqure. Alors $i^* : X^* \longrightarrow E^*$ est l'application de restriction. Autrement dit, pour tout $f \in X^*$, on a $i^*(f) = f_{|E}$.*

**Notation 1.3.4** *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tout $x \in X$ et tout $x^* \in X^*$, on note :*

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x).$$

*L'application*

$$\begin{array}{ccc} X \times X^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, x^*) & \longmapsto & \langle x, x^* \rangle. \end{array}$$

*est clairement bilinéaire et continue car on a $|\langle x, x^* \rangle| \leq \|x^*\| \|x\|$.*

**Remarque 1.3.5** *Soient $X, Y$ deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors pour tout $x \in X$ et tout $y^* \in Y^*$, on a*

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle.$$

**Proposition 1.3.6** *1) Pour tout $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, on a $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, et $\|T^*\| = \|T\|$.*

*2) L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X,Y) & \longrightarrow & \mathcal{L}(Y^*, X^*) \\ T & \mapsto & T^* \end{array}$$

*est linéaire*

*3) Pour tout $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, et $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$, alors $T \circ S \in \mathcal{L}(X,Z)$, et $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.*

## 1.4 Dual topologique de $l^q$(Duaux des espaces de suites classiques)

Nous montrons que mentenants les espaces de suites classiques mentionées dans la section précedente ($l^p, c_0$ avec $1 \leq p \leq \infty$) sont effectivement des espaces normés et nous caractériserons leurs espaces duaux topologiques, c'est à dire les espaces de leurs formes linéaires continues. Nous verons que

$$(l^q)^* \simeq l^p \text{ pour } p, q \in ]1, \infty[, \ (l^1)^* \simeq l^\infty \text{ et } (c_0)^* \simeq l^1.$$

**Théorème 1.4.1** *Soint $p, q \in ]1, \infty[$, tel que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$,*

1. Soit $x = (x_n)_n \in l^p$, l'appliction

$$\begin{array}{rcl} T_x : (l^q, \|\cdot\|_q) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y = (y_n)_n & \mapsto & T_x(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n \end{array}$$

   est un forme lineaire continue sur $l^q$,de norme ègale à $\|x\|_p$

2. Soit l'appliction

$$\begin{array}{rcl} T : (l^p, \|\cdot\|_p) & \longrightarrow & (l^q, \|\cdot\|_q)^* \\ x & \mapsto & T_x \end{array}$$

   alors $T$ est un isomorphisme isometrique de $l^p$, sur le dual topologique de $l^q$. Autrment dit si $p, q \in ]1, \infty[$, tel que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $(l^q, \| \cdot \|_q)^*$ est $(l^p, \| \cdot \|_p)$.

**Théorème 1.4.2** *1. Soit $x = (x_n)_n \in l^\infty$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} T_x : (l^1, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y = (y_n)_n & \mapsto & T_x(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n \end{array}$$

*est un forme lineaire continue sur $l^1$,de norme ègale a $\|x\|_\infty$.*

2. *Soit ,l'appliction*

$$\begin{array}{rcl} T:(l^{\infty},\|\cdot\|_{\infty}) & \longrightarrow & (l^{1},\|\cdot\|_{1})^{*} \\ x & \mapsto & T_{x} \end{array}$$

*alors $T$ est un isomorphisme isometrique de $l^{\infty}$, sur le dual topologique de $l^{1}$ (le dual topologique de $l^{1}$ est $l^{\infty}$ ).*

**Théorème 1.4.3** 1. *Soit $x=(x_n)_n \in l_1$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} T_x:(l^{\infty},\|\ .\ \|_{\infty}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y=(y_n)_n & \mapsto & T_x(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n y_n \end{array}$$

*est un forme lineaire continue sur $l^{\infty}$,de norme ègale à $\|x\|_1$ .*

2. *On note aussi $T_x$, la restriction de $T_x$, a $c_0$, on considèrons l'appliction*

$$\begin{array}{rcl} T:(l^{1},\|\ .\ \|_{1}) & \longrightarrow & (c_0,\|\ .\ \|_{\infty})^{*} \\ x & \mapsto & T_{x} \end{array}$$

*alors $T$ est un isomorphisme isometrique de $l^{1}$, sur le dual topologique de $c_0$ (le dual topologique de $c_0$ est $l^{1}$).*

**Corollaire 1.4.4** *Soient $p,q\in[1,\infty[$, tel que $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$,et $y=(y_n)_n\in l^q$, on a*

$$\|y\|_q=\sup_{x=(x_n)_n\in B_{l^p}}\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n\right|.$$

**Corollaire 1.4.5** *Les espaces $l^p$ avec $p\in[1,\infty]$ et les espaces $c_0$ et $c$ sont de Banach.*

**Preuve.** En effet, $l^{\infty}\simeq(l^1)^*=\mathcal{L}(l^1,\mathbb{K})$, $l^1\simeq(c_0)^*=\mathcal{L}(c_0,\mathbb{K})$ et $l^p\simeq(l^q)^*=\mathcal{L}(l^q,\mathbb{K})$ pour $p,q\in]1,\infty[$ et $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ (un espace normé isomorphe à un espace de Banach est de Banach). Les espaces $c_0$ et $c$ sont fermés dans $l^{\infty}$. ■

## 1.5 Bidual d'un espace normè et espaces rèflexifs

**Définition 1.5.1** *Soit $X$ un espace normè, le dual du dual $X^*$ de $X$ s'appelle le Biduale de $X$ est se note $X^{**}$.*

**Proposition 1.5.2** *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé. Alors, on a*

1. *Pour tout $x \in X$, l'application*

$$\begin{array}{rccl} J_X(x): & X^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x^* & \longmapsto & J(x)(x^*) = x^*(x) \end{array}$$

   *est linéaire continue. Ainsi, on a $J(x) \in X^{**}$.*

2. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} J_X: & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & J_X(x) \end{array}$$

*est linéaire et isométrie, appelé **l'application canonique** de $X$ dans son bidual $X^{**}$.*

**Preuve.**

1. Il est claire que $J_X(x)$ est linéaire. Pour tout $x^* \in X^*$, on a $|J_X(x)(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|$. Donc l'application $J_X(x)$ est contine et on a $\|J_X(x)\| \leq \|x\|$.
2. Pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $f \in X^*$, on a

$$J(x+\lambda y)(x^*) = x^*(x+\lambda y) = x^*(x)+\lambda x^*(y) = J(x)(x^*)+\lambda J(y)(x^*) = (J(x)+\lambda J(y))(x^*).$$

D'où on a $J_X(x+\lambda y) = J_X(x) + \lambda J_X(y)$. Ainsi, $J_X$ est une application linéaire. Soit $x \in X$ tel que $x \neq 0$, par le théorème de Hahn-Banach

$$\begin{aligned} \|J_X(x)\|_{X^{**}} &= \|J_X(x)\|_{\mathcal{L}(X^*,\mathbb{K})} \\ &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} |J_X(x)(x^*)| \\ &= \sup_{x^* \in B_{(X^*)}} |x^*(x)| \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Donc $J_X$ est isométrique. ■

**Remarque 1.5.3** *(Une autre constrution du complété d'un espace normé) Soient* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace normé et* $X^{**}$ *son bidual topologique. On vient de voir que l'application canonique* $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ *est linéaire et isométrique. Ainsi, on identifie l'espace normé* $(X, \|\cdot\|)$ *à son image* $J_X(X)$ *qui est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach* $X^{**}$*. Posons* $\widehat{X} = \overline{J_X(X)}$ *l'adhérence de* $J_X(X)$ *dans* $X^{**}$*, alors* $\widehat{X}$ *est un espace de Banach et* $(X, \|\cdot\|)$ *est un sous-espace vectoriel dense dans* $\widehat{X}$*. On obtient ainsi une constrution du complété d'un espace normé* $X$*.*

**Remarque 1.5.4** *L'application canonique* $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ *n'est pas toujours surjective.*

*En effet, si* $X = c_0$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$*, on a* $X^* = \ell_1, X^{**} = \ell_\infty$ *et l'application canonique* $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ *correspond à l'injection canonique* $c_0 \hookrightarrow \ell_\infty$*. Donc* $J$ *n'est pas surjective.*

**Définition 1.5.5** *Un espace de Banach* $X$ *est réflexif si l'application canonique* $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ *est bijective. Autrment dit, un espace de Banach* $X$ *est reflexif lorsque toute forme lineaire* $x^{**}$ *continue sur le dual* $X^*$ *pravient d'un vecteur* $x$ *de* $X$ *de la façons explique precedement. i.e.*

$$\forall x^* \in X^*, x^{**}(x^*) = x^*(x).$$

Notons que si $X$ est un espace normé et si l'application canonique $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ est bijective, alors nécessairement $X$ est un espace de Banach, car $X^{**}$ est un espace de Banach et $J_X$ est une application linéaire bijective et isométrique.

**Exemple 1.5.6**

1. *Les espaces normés de dimension finies sont réflexifs.*
2. *Pour tout* $p \in ]1, \infty[$, $l^p$ *est réflexif.*

**Preuve.** Soit $X = l^p$ et $J_q$ l'application isometrique isomorphe de $l^q$ sur le dual de $l^p$ ; $J_q : l^q \longrightarrow (l^p)^*$.

Si $x^{**} \in X^{**} = (l^p)^{**} = ((l^p)^*)^*$, la composè $x^{**} \circ J_q \in (l^q)^* = l^p$ ($l^q \xrightarrow{J_q} (l^p)^* \xrightarrow{x^{**}} \mathbb{K}$).Il existe donc $x \in l^p = X$, tel que $\forall y \in l^q$

$$(x^{**} \circ J_q)(y) = \sum_{n \geq 1} x_n y_n \qquad (*)$$

Soit $x^* \in X^* = (l^p)^* = l^q$, il existe donc $y \in l^q$, tel que $x^* = J_q(y)$,et alors

$$\begin{aligned} x^*(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \\ &\overset{(*)}{=} (x^{**} \circ J_q)(y) \\ &= x^{**}(J_q(y)) \\ &= x^{**}(x^*). \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.5.7** *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach réflexif. Alors pour tout $x^* \in X^*$, il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|x^*\| = |x^*(x)|$.*

**Preuve.** Soit $x^* \in X^*$. On peut supposé $x^* \neq 0$. On appliquant le théorème de Hahn-Banach (théorème de prolongement) à $x^*$ et à $X^*$, on obtiet un élément $\xi \in X^{**}$ tel que $\|\xi\| = 1$ et $\xi(x^*) = \|x^*\|$.Comme $X$ réflexif, alors il existe $x \in X$ tel que $\xi = J(x)$. D'où on a $\|x\| = 1$ et $\|f\| = x^*(x) = |x^*(x)|$. ■

L'inverse de la proposition précédente est aussi vraie (voir Chapitre 3). Autrement dit, si $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach tel que pour tout $x^* \in X^*$ il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et$\|x^*\| = |x^*(x)|$, alors $(X, \|\cdot\|)$ est réflexif.

**Remarque 1.5.8** *Puisque le dual topologique de $(c_0, \|.\|_\infty)$ est $(\ell^1, \|.\|_1)$ et le dual topologique de $(\ell^1, \|.\|_1)$ est $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$, on déduit de la proposition précédente que les espaces $c_0, \ell_1$ et $\ell_\infty$ ne sont pas réflexifs.*

Si $X$ et $Y$ sont isomorphismes au vecteur $x \in X$ on associè $y = T(x) \in Y$ et alors $x = T^{-1}(y)$, a une forme lineaire $x^* \in X^*$ on associe $y^* = x^* \circ T^{-1} = (T^{-1})^*(x^*) \in Y^*$ est inversement $x^* = y^* \circ T = T^*(y^*)$.

**Proposition 1.5.9** *Soit $E$ un espace de Banach rèflexif, on a*

1. *Si $Y$ est isomorphe à $E$, alors $Y$ est rèflexif.*
2. *$E^*$ est rèflexif.*
3. *Tout sous espace fermè $Y$ de $E$ est rèflexif.*

***Corollaire 1.5.10*** *Si $E$ un espace de Banach et si $E^*$ est rèflexif, alors $E$ est rèflexif.*

## 1.6 Les énoncés d'exercices

**Exercice 1.1**. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,une suite des nombres strictement positifs $(\alpha_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$, et $1 \leq p < \infty$. on note respectivement

$$l_\alpha^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} : \sum_{n\geq 1} \alpha_n^p \left| x_n \right| < \infty \right\}$$
$$l_\alpha^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} : \sup_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha_n \left| x_n \right|) < \infty \right\}$$

$l_\alpha^p$ et $l_\alpha^\infty$ sont munis des normes respectives

$$\left\| x \right\|_{p,\alpha} = (\sum_{n\geq 1} \alpha_n \left| x_n \right|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\left\| x \right\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha_n \left| x_n \right|)$$

1. Montrer que $l_\alpha^p$ e $l_\alpha^\infty$ sont des espaces de Banach.
2. On choisit $\alpha = 1$, $(\alpha_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que si $1 \leq p < q < \infty$,alors $l_1^p \subset l_1^q$, avec inclusion stricte et contractante :

$$\left\| x \right\|_{q,1} \leq \left\| x \right\|_{p,1}, \forall x \in l_1^p$$

3. Soit

$$c_{0,\alpha} = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \lim_{\alpha}(\alpha_n |x_n|) = 0 \right\}$$

Montrer que $c_{0,\alpha}$,muni de la norme $\|x\|_{\infty,\alpha}$ est un espace de Banach.

**Exercice 1.2**

Soient $E, F$ deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour tout $f \in F^*$, la forme linéaire $f \circ T : E \to \mathbb{K}$ est continue.

1- Enoncer le théorème du graphe fermé.

2- Montrer que $T$ est continue.

3- Soit $F = \ell^\infty$ et pour tout $n \geq 0$, soit $f_n : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ définie par $f_n(x) = x_n$, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Déduire que $T$ est continue si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T : E \to \mathbb{K}$ est continue.

**Exercice 1.3** Soient $E, F, G$ trois espaces normés et $T$ une application bilinéaire de $E \times F$ espace normé produit dans $G$. On note

$$\forall x \in E, T_x : F \longrightarrow G \text{ définie par } T_x(y) = T(x, y),$$

et

$$\forall y \in F, T_y : E \longrightarrow G \text{ définie par } T_y(x) = T(x, y).$$

1. Enoncè le thèorème de Banach-steinhaus.
2. On suppose que $T$ est séparément continue, c'est-à-dire que $\forall x \in E, T_x$ est continue et $\forall y \in F, T_y$ est continue.
3. Montrer que si $E$ ou $F$ est un espace de Banach, $T$ est continue de $E \times F$ dans $G$.
4. Soit $E = F$ l'espace $l^1$ muni de la norme $\|\|_\infty$. Soit $T$ la forme bilinéaire sur $E \times F$ définie par $T(x, y) = \sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$, où $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n$ sont des éléments de $l^1$

   i) Montrer que $T$ est bien définie et est séparément continue.

ii) Montrer que $T$ n'est pas continue sur $E \times F$. Expliquer le résultat. (On peut utiliser les éléments $x^k \in l^1, k \in \mathbb{N}^*$,définis par $x^k = (x_n^k)$ où

$$x_n^k = \begin{cases} 1 & si \quad n \leq k \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exercice 1.4.** On se propose pour $1 < p < \infty$ de trouver le dual de $l^p$. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n y_n$ soit convergente pour tout $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^p$.

1. Enoncè la dèfinition d'isomètrie de deux espaces normès.
2. Pour $N$ entier $\geq 0$, calculer la norme de la forme linéaire $T_N : l^p \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $T_N(y) = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n y_n, \forall y \in l^p$
3. En déduire que $x \in l^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
4. $T$ est définie sur $l^p$ par $T(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Trouver la limite de $\| T - T_N \|$ quand $N$ tend vers l'infini.
5. Identifier le dual de $l^p$.
6. Identifier le dual de $l^1$.
7. Identifier le dual de $c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \underset{n}{\longrightarrow} 0 \right\}$. $\| x \| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$.

**Exercice 1.5.**

1. Vérifier que l'adhérence de $c_c$ dans $l^\infty$ est $c_0$. En déduire que $c_0$ est séparable.
2. Montrer que pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $c_c$ est dense dans $(l^p, \|\cdot\|_p)$. En déduire que $l^p$ est séparable.
3. En déduire que si $1 \leq p \leq q < \infty$, alors $l^p$ est dense dans $(l^q, \|\cdot\|_q)$.

**Exercice 1.6.** Montrer que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. En déduire que l'espace de Banach $l^\infty$ n'est pas séparable.

**Exercice 1.7.** Soit l'espace de Banach $E = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Considérons l'application

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{K} : x = (x_n)_n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

1. Montrer que $\psi$ est une forme linéaire continue non nulle et calculer sa norme.

2. Soient $H = Ker(\psi)$ et $x \in E \backslash H$. Montrer qu'il n'existe aucun $h \in H$ tel que $d(x, H) = d(x, h) = \|x - h\|_\infty$.

## "Les corrections d'exercices"

# Chapitre 2

# Topologies faibles et faibles*

## 2.1 Rappel sur la topologie la moins fine

**Espaces topologiques**

**Définition 2.1.1** *Un espace topologique est un couple* $(X, \tau)$ *où* $X$ *est un ensemble et* $\tau$ *est un ensemble des parties de* $X$ *verifiant les propriétés suivantes.*

*i)* $\varnothing$ *et* $X \in \tau$.

*ii) Si* $(O_i)_{i \in I}$ *est une famille (quelconque) d"lements de* $\tau$, *alors* $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$.

*iii) Si* $O_1, \cdots, O_n$ *sont des élements de* $\tau$, *alors* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \tau$.

L'ensemble $\tau$ s'appelle une topologie sur $X$, un élement de $\tau$ contituent ce qu'on appelle les ouverts de la topologie. Un fermé d'un topologie est definie comme le complémentair d'un ouvert.

Si $(X, \tau)$ est un espace topologique et $A$ une partie de $X$, alors l'adherence de $A$, est le plus petit ensemble fermé de $X$ qui contient $A$ on la note $\overline{A}$ ou $clos(A)$.

On dit qu'un point $x \in X$ est adhérent a $A$, lorsque tout voisinage de $x$ rencontre $A$.

**Définition 2.1.2** *Soint* $\tau, \tau^{'}$ *deux topologies, définie sur un ensemble* $X$. *On dit que* $\tau$ *est la plus faible (au moins finie) que* $\tau^{'}$ *si tout ouvert de* $\tau$ *est un ouvert de* $\tau^{'}$.

**Définition 2.1.3** *Etant donnèe une topologie* $\tau$ *sur* $X$ *et* $x \in X$.

*a) On appelle base de voisinage de* $x$ *pour la topologie* $\tau$, *tout collection* $\mathcal{B}$ *d'ouverts pour* $\tau$ *contenant* $x$ *et telle que chaque voisinage ouvert de* $x$ *contient un élement de* $\mathcal{B}$.

*b) Une collection* $\mathcal{B}$ *d'ouverts pour* $\tau$ *est appellée une base de la topologie si tout ouvert est une réunion d'ensembles de* $\mathcal{B}$.

**Exemple 2.1.4** *1- Soint* $X$ *muni de la topologie discrèt et* $x \in X$, *alors une base de voisinage pour* $x$ *est consitituée des singleton* $x$. *De plus une base de la topologie discrète est donnée par la famille* $\{x\}_{x \in X}$.

*2- Soint $(X,d)$ un espace metrique et $x \in X$. Une base de voisinage pour $x$, est constituée par la famille $\{B(x,r)\}_{r>0}$, des boules ouverts centrées en $x$. En particulier sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des intervalle ouvert $]a,b[$ où $a$ et $b$ décrivent $\mathbb{R}$ est une base de la topologiè de $\mathbb{R}$.*

**La topologie la moins fine**

Soit $X$ un ensemble et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille des espaces topologiques . Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$ .La question naturelle qui se pose est de munit $X$ de la topologie $\tau$ la plus faible (moins fine) qui rende continue toutes les applications $\varphi_i$, $i \in I$ . Il est clair que si l'on munit $X$ de la topologie discrèt (elle qui rend toutes les parties de $X$ ouvert) alors toutes les applications $\varphi_i$, $i \in I$ sont continues. Mais cette topologie n'est pas très intéressante : elle rend continue n'import quelle application sur $X$.

Avant répondre à cette question, nous donnons un résultat utile de théorie des ensembles .

**Lemme 2.1.5** *Soient $\mathbf{F}$, $\mathbf{J}_i$ et $\mathbf{A}_j$ $(i \in \mathbf{F}$ , $j \in \mathbf{J}_i)$ des ensembles quelconques . Alors*

$$\bigcap_{i\in\mathbf{F}} \bigcup_{j\in\mathbf{J}_i} \mathbf{A}_j = \bigcup_{\psi\in\mathcal{F}} \bigcap_{i\in\mathbf{F}} \mathbf{A}_{\psi(i)}$$

*où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les applications $\psi : i \in \mathbf{F} \to \psi(i) \in \mathbf{J}_i$*

**Proposition 2.1.6** *Soit $\tau$ l'ensemble des parties de $X$ de la forme*

$$\bigcup_{j\in\mathbf{J}} \bigcap_{i\in\mathbf{F}_j} \varphi_j^{-1}(\mathcal{U}_i)$$

*où*

*- $\mathcal{U}_i$ désigne un ouvert quelconque de $\mathbf{Y}_i$ .*

*- $\mathbf{F}_j$ est un sous ensemble fini quelconque de $\mathbf{I}$.*

*- $\mathbf{J}$ un sous ensemble quelconque d'indices.*

*Alors $\tau$ définie une topologie sur $X$ .De plus ; $\tau$ est la topologie la plus faible (mois fine ) qui rende continue toutes les applications $\varphi_i, i \in \mathbf{I}$ .*

**Proposition 2.1.7** *Soit $X$ un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologiques et $\varphi_i : X \to Y_i$ une famille d'applications. Soit $\tau$ la topologie la plus faible rendant continue chaque $\varphi_i, i \in \mathbf{I}$. Etant donné un point $x \in X$. Une base de $x$ pour la topologie $\tau$ est obtenue en conséderant les ensembles de la forme*

$$\bigcap_{i\in\mathbf{J}} \varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$$

*où $\mathbf{J}$ est un sous ensemble fini quelconque de $\mathbf{I}$ et $\mathcal{V}_i$ est un voisinage ouvert de $\varphi_i(x)$ dans $Y_i$ .*

**Preuve.** Tout d'aborde il est claire que les ensembles de la forme $\bigcap_{i\in\mathbf{J}} \varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$, sont des ouverts pour la topologie $\tau$ qui contiennent $x$ .Notons $\mathcal{B}$ la collection des ouverts de $\mathcal{B}$ obtenus de cette façon. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $x$ pour la topologie $\tau$ .D'après la Propostion 2.1.6 $\mathcal{V}$ est de forme

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i\in\mathbf{J}} \bigcap_{i\in\mathbf{F}_j} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$$

où

- $\mathcal{U}_i$ un ouvert quelconque de $\mathbf{Y}_i$ .

- $F_j$ est un sous-ensemble fini quelconque de $I$ .

- $\mathbf{J}$ est un ensemble quelconque d'indices. Comme $x \in \mathcal{V}$ ,il existe $j \in \mathbf{J}$ tel que $x \in \bigcap\limits_{i\in\mathbf{F}_j} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Donc $\varphi_i(x) \in \mathcal{U}_i$, pour tout $i \in \mathbf{F}_j$. Ainsi $\mathcal{U}_i$ est un voisinage ouvert de $\varphi_i(x)$ dans $\mathbf{Y}_i$, d'où

$$\bigcap_{i\in\mathbf{F}_j} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \in \beta \ \ et \ \ \bigcap_{i\in\mathbf{F}_j} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \subset \mathcal{V}$$

■

**Proposition 2.1.8** *Soient $(x_n)_n$ une suite de $X$ et $x \in X$ . Les assertions suivantes sont équivalents.*

*i) La suite $(x_n)_n$ converge vers $x$ pour la topologie $\tau$.*

*ii) Pour chaque $i \in \mathbf{I}$, la suite $(\varphi_i(x_n))_n$ converge vers $\varphi_i(x)$ dans l'espace topologique $Y_i$.*

**Preuve.** $i) \Rightarrow ii)$ $x_n \longrightarrow x$ et $\varphi_i$ continue, alors $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $x$ .D'après La proposition 2.1.7, on peut toujours supposer que est de la forme

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i \in \mathbf{J}} \varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$$

où $\mathbf{J}$ est sous ensemble finie de $\mathbf{I}$ et $\mathcal{V}_i$ est un voisinage ouvert de $\varphi_i(x)$ dans $\mathbf{Y_i}$ . D'après l'hypothese *(ii)*, pour chaque $i \in \mathbf{I}$, il existe $N_i$ tel que $\varphi_i(x_n) \in \mathcal{V}_i$, pour tout $n \geqslant N_i$ soit $N = \max_{i \in \mathbf{J}} N_i$. Alors $x_n \in \mathcal{U} = \bigcap_{i \in \mathbf{J}} \varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$ pour $n \geqslant N$ ce qui prouve la convergence de $(x_n)_n$ vers $x$. ■

**Proposition 2.1.9** *Soit $Z$ un espace topologique et soit $\psi$ une application de $Z$ dans $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

*a) L'application $\psi$ est continue.*

*b) Pour chaque $i \in \mathbf{I}$. L'application $\varphi_i \circ \psi : Z \longrightarrow Y_i$ est continue.*

**Preuve. a)** $\Rightarrow$ **b)** $\psi$ est continue, alors $\varphi_i \circ \psi$ est aussi continue pour chaque $i \in \mathbf{I}$.

**b)** $\Rightarrow$ **a)** Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $X$, montrons que $\psi^{-1}(\mathcal{U})$ un ouvert de $Z$. On sait que $\mathcal{U}$ est de la forme

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in \mathbf{J}} \bigcap_{i \in \mathbf{F_j}} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)$$

où $\mathcal{U}_i$ un ouvert quelconque de $Y_i$, $\mathbf{F_j}$ est un sous-ensemble finie quelconque de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ est un ensemble quelconque d'indice. Par conséquent

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathcal{U}) &= \psi^{-1}\Big( \bigcup_{quelconque} \bigcap_{finie} \varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)\Big) \\ &= \bigcup_{quelconque} \bigcap_{finie} \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(\mathcal{U}_i)) \\ &= \bigcup_{quelconque} \bigcap_{finie} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\mathcal{U}_i) \end{aligned}$$

comme $\varphi_i \circ \psi$ est continue et $\mathcal{U}_i$ ouvert de $\mathbf{Y}_i$ , $(\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\mathcal{U}_i)$ est un ouvert de $\mathbf{Z}$. Et par stabilité par union quelconque et intersection finie, $\psi^{-1}(\mathcal{U})$ est aussi un ouvert de $Z$.
■

## 2.2 La topologie faible $\sigma(E, E^*)$

Soit $E$ un espace de Banach .On note $E^*$ l'espace dual.

**Définition 2.2.1** *La topologie faible sur $E$ est la topologie la plus faible sur $E$ rendant continues touts les applications $\varphi \in E^*$, on la note $\sigma(E, E^*)$.*

**Proposition 2.2.2** *La topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est séparée .*

**Preuve.** Soit $x_1, x_2 \in E$, avec $x_1 \neq x_2$ .On cherche à construire $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ouverts pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ tels que $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.

D'après corollaire du théorème de Hahn Banach, il existe $f \in E^*$, tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B_1 := B(f(x_1), \varepsilon)$ et $B_2 := B(f(x_2), \varepsilon)$ sont disjoint, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= f^{-1}(B_1) \\ &= \{x \in E : f(x) \in B_1\} \\ &= \{x \in E : |f(x) - f(x_1)|\} . \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 &= f^{-1}(B_2) \\ &= \{x \in E : f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in E : |f(x) - f(x_2)|\} . \end{aligned}$$

Il est claire alors que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de $E$ pour $\sigma(E, E^*)$ qui verifiant $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$. ■

**Proposition 2.2.3** *Soient $E$ un espace de Banach et $x_0 \in E$ .Une base de voisinage de $x_0$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est obtenue en considérant tout les ensembles de la forme*

$$\mathcal{V} = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

*où $I$ est fini, $f_i \in E^*$ et $\varepsilon > 0$ .*

**Preuve.** L'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{x \in E : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \ ; \forall i \in I\} \\ &= \{x \in E : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \ ; \forall i \in I\} \\ &= \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(B(f_i(x_0), \varepsilon))\end{aligned}$$

est un ouvert pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ et qui contient $x_0$. Il reste à montre que tout voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $x_0$ contient un sous ensemble de cette façon .par définition de la topologie faible et en utilisant la Proposition 2.1.7 , on sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de $x_0$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ de la forme

$$\mathcal{W} = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(w_i)$$

où $I$ est fini, $f_i \in E^*$ et $w_i$ est un voisinage ouvert de $f_i(x_0)$ dans $\mathbb{K}$ . Donc il existe $\varepsilon > 0$ , tel que $B(f_i(x_0), \varepsilon) \subset w_i$ , pour chaque $i \in I$. ■

**Notation.** Etant donné une suite $(x_n)_n$ de $E$, on désigne par $x_n \xrightarrow{w} x$ la converge de $x_n$ de $x$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ .

**Proposition 2.2.4** *Soit $(x_n)_n$ une suite de $E$ , on a*

*a) $x_n \xrightarrow{w} x$ ssi $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ pour tout $f \in E^*$.*

*b) Si $x_n \longrightarrow x$ fortement ($\|x_n - x\| \longrightarrow 0$) alors $x_n \xrightarrow{w} x$.*

*c) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ alors $\|x_n\|$ est bornée .et $\|x\| \leq \liminf_{n \longmapsto +\infty} \|x_n\|$.*

*d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement ($\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0$) dans $E^*$ , alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$*

**Preuve.** a) Résulte de la Proposition 2.1.8.

b) Résulte de a) puisque $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f\| \|x_n - x\| \underset{n \longmapsto \infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Pour $a \in E$ notons $\delta_a : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par

$$\delta_a(f) = f(a), \ f \in E^*$$

on vérifie facilement que $\delta_a$ est continue

$$|\delta_a(f)| = |f(a)| \leqslant \|a\| \|f\|, f \in E^*,$$

et le théorème de Hahn Banach implique que

$$\|a\| \overset{H-B}{=} \sup_{f\in B_{E^*}} |f(a)| = \sup_{f\in B_{E^*}} |\delta_a(f)| \overset{\text{déf}}{=} \|\delta_a\| . \tag{2.1}$$

Par l'hypothèse on sait que

$$\delta_{x_n}(f) = f(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} f(x) = \delta_x(f)$$

et donc en particulier on a

$$\sup_{n\geqslant 1} |\delta_{x_n}(f)| < +\infty, \forall f \in E^*.$$

Le théorème de **Banach-steinhauss** entraîne alors que

$$\sup_{n\geqslant 1} \|\delta_{x_n}\| < +\infty$$

et donc (d'après (2.1))

$$\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\| < +\infty.$$

Ce qui prouve la première partie de l'assertion.

D'autre part, pour $f \in E^*$, on a

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\| \leq \|f\| \liminf_{n\longmapsto +\infty} \|x_n\|$$

et par passage à la limite inf, on obtient

$$\|x\| \overset{H-B}{=} \sup_{f\in B_{E^*}} |f(x) \leq \sup_{f\in B_{E^*}} \|f\| \liminf_{n\longmapsto +\infty} \|x_n\|$$

D'où

$$\|x\| \leq \liminf_{n\longmapsto +\infty} \|x_n\| .$$

d) Pour finir prouvons $(d)$ on a

$$\begin{aligned}
|f_n(x_n) - f(x)| &= |(f_n - f)(x_n) + f(x_n - x)| \\
&\leqslant |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)| \\
&\leqslant \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n - x)| \\
&= \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.2.5** *Lorsque $E$ est de* ***dimension finie*** *; la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et la topologie usuelle coïncident .En particulier une suite $(x_n)_n$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement .*

**Preuve.** La topologie faible a **toujours** moins d'ouverts que la topologie forte.

**Inversement** nous devons vérifie q'un ouvert fort est un ouvert faible .Soit $x_0 \in E$ et soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $x_0$ pour la topologie forte. Il faut construireun voisinage $\mathcal{V}$

de $x_0$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ . Autrement dit, il faut trouver une partie **finie** $(f_i)_{i\in I}$ de $E^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\mathcal{V} = \{x \in E; \langle f_i, x - x_0\rangle < \varepsilon, \forall i \in I\} \subset \mathcal{U}$$

Supposons que $\mathbf{B}(x_0, r) \subset \mathcal{U}$. On choisit une base $e_1, e_2, ..., e_n$ de $E$ avec $\|e_i\| = 1, \forall i$. Pour tout $x \in E$, on a une décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ; les

application $E \underset{x \longmapsto x_i}{\longmapsto} \mathbb{K}$ définissent $n$ formes linéaires continues sur $E$ notées $f_i$ . On a alors

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)(e_i) \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^0| \, \|e_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} | \langle f_i, x - x_0 \rangle | \\
&< n\varepsilon
\end{aligned}$$

pour $x \in \mathcal{V}$. Choisissant $\varepsilon = \dfrac{r}{n}$, on obtient $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. ■

**Remarque 2.2.6** *Les ouverts (resp.fermés) de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sont aussi ouverts (resp.fermés) pour la topologie forte. Lorsque $E$ est de* ***dimension infinie*** *la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ est* ***strictement moins fine*** *que la ttopologie forte* ***i.e.*** *il existe des ouverts (resp.fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp.fermés) pour la topologie faible. Voicie deux exemples.*

**Exemple 2.2.7** *1- L'ensemble $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ n'est **jamais** fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Plus précisément montrons que*

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \{x \in E; \|x\| \leqslant 1\}$$

*2- L'ensemble $U = \{x \in E; \|x\| < 1\}$ n'est **jamais** ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ ($intU = \varnothing$).*

## 2.3 Topologie faible, ensembles convexes et opérateurs linéaires

**Proposition 2.3.1** *Soit $C \subset E$ convexe. Alors $C$ est faiblement fermé pour $\sigma(E, E^*)$ si et seulement s'il fortement fermé.*

**Preuve.** On sait déjà que si $C$ est faiblement fermé ,alors il est fortement fermé. Supposons que $C$ est fortement fermé et montrons que $C^c = E - C$ est ouvert pour $\sigma(E, E^*)$ .Soit donc $x_0 \in C^c$. D'après le théorème de hahn Banach forme géométrique, il existe un hyperplan fermé séparant au sens strict $\{x_0\}$ et $C$. Autrement dit, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Re(f(x_0)) < \alpha < Re(f(x))$ posons alors

$$\Omega = \{x \in E : |f(x) - f(x_0)| < \alpha - Re(f(x_0))\}.$$

Il est claire que $\Omega$ est un voivinage ouvert de $x$ pour $\sigma(E, E^*)$ et de plus ; on vérifie facilement que $\Omega \cap C = \emptyset$. Par conséquent $\Omega \subset C^c$ .Ainsi $C^c = E - C$ est un voisinage de chacun de ses points pour $\sigma(E, E^*)$, ce qui signifie que $E - C$ est un ouvert pour $\sigma(E, E^*)$.

■

Le résultat suivant montre que pour une application linéaire entre deux espaces de Banach, la continuité faible et fort coïncident

**Théorème 2.3.2** *Soit $E$, $F$ deux espaces de Banach et soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire .Les assertion suivant sont équivalentes.*

*i) $T$ est continue de $E$ dans $F$.*

*ii) $T$ est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans$(F, \sigma(F, F^*))$.*

Pour prover ce résultat, nous utilisons deux lemme.

**Lemme 2.3.3** *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $\Omega_1$ (resp $\Omega_2$) un ouvert de $E$ (resp $F$). Pour $\sigma(E, E^*)$ (resp ,$\sigma(F, F^*)$). Alors $\Omega_1 \times \Omega_2$ est un ouvert de $E \times F$ pour $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$.*

**Lemme 2.3.4** *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On suppose que $T$ est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ $(F, \sigma(F, F^*))$. Alors le graphe de $T$*

$$G(T) = \{(x, T(x)), x \in E\}$$

*est fermé pour la topologie faible $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$.*

**Preuve.** (du théorème) $i) \Longrightarrow ii)$**TD**

$ii) \Longrightarrow i)$ On suppose que $T : (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (F, \sigma(F, F^*))$ est continue. Alors, d'après Lemme 2.3.4, $G(T)$ est fermés pour $\sigma(E \times F, (E \times F)^*)$. Donc $G(T)$ est fermés pour la topologie forte. Le théorème de graphe fermé, implique alors que $T$ est continue de $E$ dans $F$. ■

## 2.4 La topologie faible* $\sigma(E^*, E)$

Soit $E$ un espace de Banach et $E^*$ son dual. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle = f(x)$, $\forall f \in E^*$.

**Définition 2.4.1** *La **topologie faible*** sur $E^*$ est la topologie la plus faible sur $E^*$ qui rendant continues touts les application $(\varphi_x)_{x \in E}$ on la note $\sigma(E^*, E)$.*

On dispose sur $E^*$ de trois topologie :

a) La topologie fort

b) La topologie faible $\sigma(E^*, E^{**})$

c) la topologie faible $*$ $\sigma(E^*, E)$.

• Notons que chaque $\varphi_x$ est continue comme forme linéaire sur $E^*$ (avec la topologie forte ) et donc $\varphi_x \in E^{**}$. Ainsi $\varphi_x$ est continue pour la topologie faible $\sigma(E^*, E^{**})$ et par définition de la topologie faible on obtient que la topologie faible$^*$ est plus faible que la topologie qui elle même est plus faible que la topologie forte

• On peut s'étonner de l'interêt d'appauvrir ainsi les topologies. La raison est la suivante : plus une topologie est faible, moins elle possède d'ouvert et plus elle possêde de compact or la compacité est un outil essentiel dans de nombreuses question, notamment d'existence. Ainsi, on verra dans le théorème de **Banach Alaoglu** que la boule unité du dual d'un espace de Banach $E$ est compact pour $\sigma(E^*, E)$, alors qu'elle n'est pas compact pour la topologie de la norme uniquement lorsque $\dim E < +\infty$.

**Proposition 2.4.2** *La topologie faible$^*$ est séparée.*

**Preuve.** Soit $f_1$ et $f_2$ dans $E^*$ avec $f_1 \neq f_2$. Donc il existe $x \in E$, tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$. On considère alors $\varepsilon > 0$ tel que les boules $B_1 : = B(f_1(x), \varepsilon)$ et $B_2 : = B(f_2(x), \varepsilon)$ sont disjoint .On pose alors

$$\mathcal{O}_1 = \{f \in E^* : |f_1(x) - f_2(x)| \ < \varepsilon\} = \varphi_x^{-1}(B_1)$$
$$\mathcal{O}_2 = \{f \in E^* : |f_2(x) - f_2(x)| \ < \varepsilon\} = \varphi_x^{-1}(B_2)$$

Il est claire alors $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de $E^*$ pour $\sigma(E^*, E)$ qui vérifient $f_1 \in \mathcal{O}_1, f_2 \in \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. ■

**Proposition 2.4.3** *Soit $f_0 \in E^*$. Une base de voisinage de $f_0$ pour $\sigma(E^*, E)$ est obtenue en considérons tout les ensembles de la forme*

$$\mathcal{V}_{f_0} = \{f \in E^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\}$$

*où $I$ est fini , $x_i \in E, \varepsilon > 0$.*

**Notation.** Etant donnée une suite $(f_n)_n$ de $E^*$. On désigne par $f_n \xrightarrow{w^*} f$ la convergence de $f_n$ vers $f$ pour $\sigma(E^*, E)$.

**Proposition 2.4.4** *Soit $(f_n)_n \in E^*$ .On a.*

*a) $f_n \xrightarrow{w^*} f$ si et seulement si $f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in E$.*

*b) $f_n \longrightarrow f$ alors $f_n \xrightarrow{w} f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$ si $f_n \xrightarrow{w} f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$ alors $f_n \xrightarrow{w^*} f$.*

*c) Si $f_n \xrightarrow{w^*} f$ ; alors $\|f\|$ est bornée et $\|f\| \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \inf \|f_n\|$*

*d) Si $f_n \xrightarrow{w^*} f$ et si $x_n \longrightarrow x$ dans $E$ alors $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.*

**Preuve.** La preuve est similaire à la Proposition 2.2.4. ■

L'importance de la topologie faible* est sans acune doute continue dans le théorème de **Banach Alaoglu**.

**Théorème 2.4.5** *La boule unité fermé de $E^*$*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$$

*est compact pour la topologie faible* $\sigma(E^*, E)$.*

## 2.5 Espaces réflexifs et topologie faible

Soit $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ l'injection canonique définie de la façon suivant :

$$J_E(x)(f) = \langle f, x\rangle \, ; \forall f \in E^*$$

L'application $J_E$ est un isomorphisme isométrique de $E$, muni de la topologie de la norme ; sur $J_E(E)$. Au niveau des topologie faible, on peut donner le résultat suivant.

**Proposition 2.5.1** *$J$ est un isomorphisme de $E$, muni de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$, sur $J_E(E)$ ,muni de la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$.*

L'importance fondamental de la réflexivité provient d'un résultat de compacité obtenue par **Kakutoni** . Avant d'énoncer et démontré ce résultat, nous avons besoin de deux lemme

**Lemme 2.5.2** *(Helly) Soient $f_1, f_2, ..., f_n \in E^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

*i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que*

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon; \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

*ii) Pour tout $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$, on a*

$$|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\|.$$

**Lemme 2.5.3** *(Goldstine)$J_E(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$.*

**Preuve.** Soients $\eta \in \overline{B}_{E^{**}}$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de $\eta$ pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Il s'aiget de montre que $\mathcal{V} \cap J_E(B_E) \neq \emptyset$. D'après la Proposition 2.4.3, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, f_2, ..., f_n \in E^*$ tel que

$$\mathcal{V} = \{\xi \in E^{**} : |\langle \xi, f_i \rangle - \langle \eta, f_i \rangle| < \varepsilon;\} \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

posons $\alpha_i = \eta(f_i), 1 \leq i \leq n$ et soit $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$ En utilisant le fait que $\eta \in \overline{B}_{E^{**}}$ on a

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i| &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta(f_i)| \\ &= \eta(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i) \\ &\leq \|\eta\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| \end{aligned}$$

Le Lemme 2.5.2 implique alors qu'il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que

$$| \langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i | < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

$\Rightarrow | \langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \langle \eta, f_i \rangle | < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$

$\Rightarrow | \langle J(x_\varepsilon), f_i \rangle - \langle \eta, f_i \rangle | < \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$ .

Ce qui signifie exactement que $J(x_\varepsilon) \in \mathcal{V}$. Donc on a bien $\mathcal{V} \cap J_E(B_E) \neq \emptyset$ ■

**Théorème 2.5.4** ***(Kakutani)*** *Soit $E$ un espace de Banach. $E$ est réflexif ssi $\overline{B}_E$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

**Preuve.** On a $J_E(\overline{B}_E) = \overline{B}_{E^{**}}$ et il résultat du théorème de **Banach-Alaoglu** $B_{E^{**}}$ est compact pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$ . Mais le lemme **??** $J_E^{-1}$ est continue de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ vers $(E, \sigma(E, E^*))$ et on obtient ainsi $\overline{B}_E = J^{-1}(\overline{B}_{E^{**}})$. Inversement. Supposons que $\overline{B}_E$ est compact pour $\sigma(E, E^*)$ .Comme $JE$ est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$, on déduit que $J_E(\overline{B}_E)$ est compact pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Mais comme $J_E(\overline{B}_E)$ est dense dans $\overline{B}_{E^{**}}$ (lemme Goldstine) pour la topologie faible* $\sigma(E^{**}, E^*)$ et donc $J_E(E) = E^{**}$. ■

## 2.6 Exercices

**Exercice 2.1.** Soit $(f_n)_n \in E^*$. On désigne par $f_n \xrightarrow{w^*} f$ la convergence de $f_n$ vers $f$ pour $\sigma(E^*, E)$. Montrer que :

a) $f_n \xrightarrow{w^*} f$ si et seulement si $f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in E$.

b) $f_n \longrightarrow f$ alors $f_n \xrightarrow{w} f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$ si $f_n \xrightarrow{w} f$ pour $\sigma(E^*, E^{**})$ alors $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

c) Si $f_n \xrightarrow{w^*} f$ ; alors $\|f\|$ est bornée et $\|f\| \leq \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \inf \|f_n\|$

d) Si $f_n \xrightarrow{w^*} f$ et si $x_n \longrightarrow x$ dans $E$ alors $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

**Exercice 2.2.** Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie.

a) Soint $x_0 \in E, \varepsilon > 0$ et $f_1, f_2, , , , f_n \in E^*$,on note

$$\mathcal{V} = \{x \in E; \langle f_i, x - x_0 \rangle < \varepsilon, \forall i = 1, , , , , n\}$$

i) Montrer qu'il existe $y_0 \in E, y_0 \neq 0$ tel que

$$\langle f_i, y_0 \rangle = 0 \ \ \forall i = 1, , , , , n.$$

<u>**Indication**</u> :on pourra raisonner par l'absurde.

ii) En dèduire que $\mathcal{V}$ contient une droit passant par $x_0$.

b) montrer que tout voisinage de $x_0$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$,contient une droit passant par $x_0$ .

c) Soit $S = \{x \in E :\| x \|= 1\}$ .

i) Soit $x_0 \in E, \| x \|< 1$, montrer que $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E^*)}$la fermeteure de $S$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. <u>**Indication**</u> :on pourra utilise la question (b).

ii) montrer que

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \{x \in E :\| x \|\leq 1\} .$$

En dèduire que $S$ n'est pas fermè pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

**Exercice 2.3**. Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie et

$$U = \{x \in E :\| x \|< 1\} .$$

Montrer que $U$ n'est pas ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. <u>**Indication**</u> :on pourra raisonner par l'absurde et utilise la question (b) de l'exercice 2.

**Exercice 2.4.** Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach et supposons qu'il existe $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de $E$ sur $F$. Montrer que $E$ est rèflexif si et seulement si $F$ est rèflexif.

**Exercice 2.5.** Soit $E$ un espace de Banach. Montrer que : $E$ est réflexif $\Leftrightarrow$ $E^*$ est réflexif.

**Exercice 2.6**. Soit $E$ un espace de Banach rèflexif.et $K$ une partie convexe fermé et bornée de $E$ Montrer que $K$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ .

# Chapitre 3

# Quelques classe d'opérateurs

## 3.1 Compacité dans les espaces de Banach

Rappelons qu'une partie $A$ d'un espace topologique séparé $X$ est dite relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte. Une partie $A$ d'un espace métrique $(X;d)$ est dite précompacte si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de $A$ par des parties de diamètre $\leq \epsilon$. Cela revient à dire que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un entier $n$ et des points $x_1, ..., x_n \in X$ tels que $A$ soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \epsilon)$, $i = 1, ..., n$.

**Proposition 3.1.1** *Soit $(X, d)$ un espace métrique. Une partie $A$ de $X$ est relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de $A$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $X$.*

*Preuve.* Supposons $A$ relativement compacte. Alors toute suite d'éléments de $A$ est aussi une suite d'éléments du compact $\overline{A}$. En conséquence, elle admet au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{A}$, et donc une sous-suite convergente dans $X$.

Réciproquement, supposons que de toute suite de $A$ on puisse extraire une sous-suite convergente et considérons une suite $(x_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\overline{A}$. Il existe alors une suite $(y_n)_{n\in N}$ d'éléments de $(y_n)_{n\in N}$ telle que $d(x_n, x_m) \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite admet une sous-suite convergente $(y_{\varphi(n)})_{n\in N}$ et il est clair que $(x_{\varphi(n)})_{n\in N}$ converge vers la même limite. Cette limite se trouve n´ecessairement dans le fermé $\overline{A}$. En conséquence $A$ est bien compact.

**Corollaire 3.1.2** *Dans un espace métrique, toute partie relativement compacte est bornée et toute partie compacte est fermée bornée.*

*Preuve.* Pour démontrer la première partie du corollaire, raisonnons par contraposition. Soit donc $A$ une partie non bornée de l'espace métrique $(X, d)$. Alors on peut construire (par récurrence) une suite $(x_n)_{n\in N}$ telle que $d(x_n, x_m) \geq 1$ pour tout $(n, m) \in N^2$ tel que $n \neq m$. Une telle suite ne peut avoir de sous-suite convergente. La deuxième partie du corollaire devient alors évidente. En effet, tout compact est relativement compact (donc borné), et fermé.

Le théorème suivant permet de comparer les notions de complétude et de compacité.

**Théorème 3.1.3** *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.*

*Preuve.* $\Rightarrow$) Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy de $X$. Comme $(X,d)$ est un espace métrique compact, la suite $(x_n)$ a une valeur d'adhérence. Mais comme elle est de Cauchy, elle converge. En conséquence $(X,d)$ est complet. Par ailleurs, la compacité assure aussi que $X$ peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de n'importe quel rayon donné.

($\Longleftarrow$ . Supposons que $(X,d)$ soit complet et que, pour tout $\epsilon > 0$, $X$ puisse être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\epsilon$. Soit $(x_n)$ une suite de $X^{\mathbb{N}}$. Par extractions successives puis procédé diagonal, on construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in N}$ de $(x_n)_{n\in N}$, et une suite $(y_n)_{n\in N}$ de $X^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$N et $p \in \mathbb{N}$ on ait $x_{\varphi(n+p)} \in B(y_n, 2^{-n})$. Pour cela, on commence par sélectionner une boule $B(y_0,1)$ contenant une infinité de termes de $(x_n)_{n\in N}$. Cela permet de définir une suite extraite $(x_{\varphi_0(n)})_{n\in N} \in B(y_0,1)^{\mathbb{N}}$. Ensuite, on choisit une boule $B(y_1,1/2)$ contenant une suite extraite $(x_{\varphi_0(\varphi_1(n))})_{n\in N}$, de $(x_{\varphi_0(n)})_{n\in N}$, etc.
Par extractions successives puis procédé diagonal, on obtient finalement une suite extraite ayant la propriété voulue.
La suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in N}$ est de Cauchy donc converge. Donc $(X,d)$ est compact.

**Corollaire 3.1.4** *Dans un espace métrique* ***complet*** $(X;d)$*, une partie* $A$ *est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte.*

$\Rightarrow$) : Il suffit de remarquer que

$$\overline{A} \subset \cup_{x\in A} B(x,\epsilon)$$

Comme $\overline{A}$ est compact, on peut extraire du recouvrement ci-dessus un sous-recouvrement fini de $\overline{A}$ donc (a fortiori) de $A$.
($\Longleftarrow$ : Pour démontrer la réciproque, on remarque que la complétude de $(X, d)$ assure que $(\overline{A}, d)$ est complet. Il est clair que si pour tout $\epsilon > 0$, la partie $A$ peut être recouverte par un nombre fini de boules centrées en des points de $A$, il en est de même pour $\overline{A}$. En effet

$$\overline{A} \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \tfrac{\epsilon}{2}) \Rightarrow \overline{A} \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon)$$

Le théorème précédent permet de conclure que $(\overline{A}, d)$ est compact.

**Corollaire 3.1.5** *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les ensembles fermés bornés.*

*Preuve.* On sait déjà que dans un espace métrique, les compacts sont fermés bornés. Réciproquement, sachant que $\mathbb{R}$ est complet et que toute partie bornée de $\mathbb{R}$ peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\epsilon$ arbitrairement fixé, le corollaire précédent assure que toute partie bornée de $\mathbb{R}$ est relativement compacte.

Notons une conséquence facile : pour qu'une partie $A$ d'un espace métrique complet $X$ soit relativement compacte, il suffit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie compacte $K_\epsilon$ de $X$ telle que tout point de $A$ soit à une distance $< \epsilon$ de l'ensemble $K_\epsilon$

$$\forall x \in A, d(x, K_\epsilon) < \epsilon.$$

Dans le cas d'un sous-ensemble $A$ d'un espace de Banach $E$, il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant : pour que l'adhérence de $A$ soit compacte dans l'espace de Banach $E$, il faut et il suffit que $A$ vérifie les deux conditions suivantes :
**a**. l'ensemble $A$ est borné ;
**b**. pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\epsilon \subset E$ de dimension finie tel que tout point de $A$ soit à une distance $< \epsilon$ de $L_\epsilon$ :

$$\forall x \in A, d(x, L_\epsilon) < \epsilon$$

Si l'adhérence de $A$ est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait : en effet $\overline{A}$ est borné parce que compact (la fonction continue $x \to \|x\|$ atteint son maximum sur le compact $\overline{A}$ ) et la deuxième condition est évidemment impliquée par la précompacité : il suffit de prendre l'espace vectoriel $L_\epsilon$ engendré par un ensemble fini $F_\epsilon$ qui approche $A$ à moins de $\epsilon$.

Dans l'autre direction, supposons les deux conditions du critère vérifiées, et montrons que $A$ est approchable arbitrairement bien par des compacts de $E$ ; soit $M$ une borne pour les normes des éléments de $A$ ; soient $\epsilon > 0$ et$L_\epsilon$ un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche $A$ à moins de $\epsilon$. Désignons par $K_\epsilon$ le compact de $E$ formé par les points de $L_\epsilon$ de norme $\leq M+\epsilon$. Si $x \in A$, il existe $y \in L_\epsilon$ tel que $\|x-y\| \leq \epsilon$ ; puisque $\|x\| \leq M$, on aura $\|y\| \leq M+\epsilon$, d'où $y \in K_\epsilon$, et le résultat est démontré.

**Proposition 3.1.6** *Si $K_1$ et $K_2$ sont compacts dans l'espace de Banach $E$, l'ensemble $K_1 + K_2$ est compact ; si $A_1$ et $A_2$ sont relativement compacts dans l'espace de Banach $E$, l'ensemble $A_1 + A_2$ est relativement compact dans $E$.*

*Preuve.* Il est clair que $K_1 + K_2$ est borné. Si $L_j, j = 1, 2$, est un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche $K_j$ à moins de $\frac{\epsilon}{2}$, il est facile de vérifier que le sous-espace de dimension finie $L_1 + L_2$ approche $K_1 + K_2$ à moins de $\epsilon$. De plus $K_1 + K_2$ est fermé, donc compact, comme image du compact $K_1 \times K_2$ par l'application continue $(x; y) \to x + y$. La deuxième affirmation résulte facilement de la première, car l'adhérence de la somme $A_1 + A_2$ est contenue dans $\overline{A_1} + \overline{A_2}$.

## 3.2 Applications linéaires compactes

Dans cette section, $X$ et $Y$ sont des espaces de Banach. On note $B_X := \{x : \|x\| \leq 1\}$ la boule unitaire fermée de $X$.

**Définition 3.2.1** *Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit compact si $T(B_X)$ est relativement compacte dans $Y$ (c'est-a-dire l'adhérence $\overline{T(B_X)}$ de $T(B_X)$ est compact). On note $\mathcal{K}(X;Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $X$ dans $Y$.*

**Remarque 3.2.2** ***Remarques 3.2.3 (1)*** *Si $T$ est un opérateur compact alors $T$ est borné car la norme de $Y$ est bornée sur le compact $\overline{T(B_X)}$. Donc $T \in \mathcal{L}(X;Y)$.*

*(2) Un opérateur linéaire $T$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de $X$, la suite des images $(T(x_n))_n$ admet une sous-suite convergente.*

*(3) On rappelle qu'un ensemble $A \subset Y$ est dit précompact si, pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir $A$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\epsilon$. Si $Y$ est complet, la précompacité de $A$ implique la compacité de $A$. Donc $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ est compact si et seulement si $T(B_X)$ est précompact.*

*(4)Toute partie fermée d'un espace compact est compacte et, réciproquement, toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée. En outre, l'image continue d'un compact est compact).*

**Définition 3.2.4** ***Proposition 3.2.5*** *$T \in \mathcal{K}(X;Y)$ si et seulement si pour tout $A \subset X$ bornée, $T(\overline{A})$ est relativement compact dans $Y$..*

**Lemme 3.2.6** *Si $T : X \to Y$ et $S : Y \to Z$ sont des applications linéaires bornées entre espaces de Banach et si $S$ ou $T$ est compact, alors la composée $S \circ T$ est un opérateur compact.*

*Preuve.* Supposons que $T$ est compact. Alors $S(\overline{T(B_X)})$ est compact, donc fermé, et contient $(ST)(B_X)$, d'où $\overline{(ST)(B_X)} \subset S(\overline{T(B_X)})$. D'autre part, $S(\overline{T(B_X)}) \subset \overline{(ST)(B_X)}$, d'où $\overline{(ST)(B_X)} = S(\overline{T(B_X)})$ est compact. Supposons maintenant que $S$ est compact. Comme $T$ est borné, il existe $r > 0$ tel que $T(B_X) \subset rB_Y$ . Donc $\overline{(ST)(B_X)} \subset rS(\overline{B_Y})$ est compact.

**Définition 3.2.7** *Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est de rang fini si la dimension de son image $Im(T)$ est finie.*

**Corollaire 3.2.8** *Un opérateur linéaire de rang fini est un opérateur compact. En effet, l'ensemble $T(B_X)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie.*

**Lemme 3.2.9** *$\mathcal{K}(X;Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X;Y)$.*

*Preuve.* Il est clair que les combinaisons linéaires finies d'opérateurs compacts sont compacts. Supposons donc que $(T_n) \in \mathcal{K}(X;Y)$ est une suite d'opérateurs compacts, $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ et $\|T_n - T\| \to 0$. Comme $Y$ est un espace complet, pour montrer que $T \in \mathcal{K}(X;Y)$, il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $T(B_X)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(y_j;\epsilon)$ dans $Y$ . Soit $n \in N$ fixé tel que $\|T_n - T\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Comme $T_n(B_X)$ est relativement compact, on peut déterminer $y_1, ..., y_n \in Y$ tels que $T_n(B_X) \subset \cup_{j=1}^{n} B(y_j; \frac{\epsilon}{2})$. Donc $T(B_X) \subset \cup_{j=1}^{n} B(y_j;\epsilon)$.

**Deuxième Démonstration**. Il est clair que si $T \in K(E;F)$ et ¸$\lambda \in K$, alors¸$\lambda T \in K(E;F)$. Soient maintenant $T_1$ et $T_2$ deux applications linéaires compactes de $E$ dans $F$, et considérons les ensembles $A_1 = T_1(B_E)$, $A_2 = T_2(B_E)$ et $A = (T_1 + T_2)(B_E)$ ; il est clair que $A$ est contenu dans $A_1 + A_2$, donc il est relativement compact d'après la proposition 1.2. Ceci montre que $\mathcal{K}(E;F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E;F)$.

Supposons que $T \in \mathcal{L}(E;F)$ soit adhérent à $\mathcal{K}(E;F)$. Pour tout $\epsilon > 0$ donné, on peut trouver $S$ compacte telle que $\|T - S\| < \epsilon$ ; il en résulte que tout point de $T(B_E)$ est approché à $\epsilon$ près par un point du compact $K_\epsilon = \overline{S(B_E)}$, donc $\overline{T(B_E)}$ est compact.

Montrons pour finir les propriétés de composition. Supposons $S \in \mathcal{L}(E;F)$ compacte ; si $M \subset F$ est compact et contient l'image $S(B_E)$, alors $T(M)$ est compact et contient l'image $TS(B_E)$, donc $TS$ est compacte. Pour l'autre cas, remarquons que l'image $S(B_E)$ est contenue dans la boule de $F$ de centre 0 et de rayon $r = \|S\|$ ; si $M \subset G$ est compact et contient l'image par $T$ de la boule unité de $F$, alors $rM$ est compact et contient l'image par $TS$ de $B_E$.

**Corollaire 3.2.10** *Soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires de rang fini de $X$ dans $Y$ . Si $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ et $\|T_n - T\| \to 0$, alors $T \in \mathcal{K}(X;Y)$.*

Le "problème d'approximation" de Banach concerne la réciproque du corollaire précedent, c'est-a-dire si tout opérateur linéaire compact est la limite dans la norme d'opérateurs d'une suite d'opérateurs linéaires de rang fini. En général, la réponse est négative ; la réponse est toutefois positive sous des hypothèses additionnelles, par exemple si $Y$ est un espace de Hilbert.

**Théorème 3.2.11** *Si $Y$ est un espace de Hilbert alors tout opérateur compact $T : X \to Y$ est limite dans $\mathcal{L}(X; Y)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini. (Autrement dit, les opérateurs de rangs finis forment un sous-espace dense de $\mathcal{K}(X; Y)$).*

*Preuve***.** Soit $T$ est un opérateur compact. Puisque l'adhérence de $T(B_X)$ est compacte, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble fini $\{y_1, ..., y_n\}$ dans $Y$ tel que pour tout $x \in B_X$ il existe $j(x)$ tel que $\left\|Tx - y_{j(x)}\right\| \leq \epsilon$. On considère alors la projection $P_\epsilon$ sur le sous-espace de dimension finie $Y_\epsilon$ engendré par les $y_j$ . L'opérateur $T_\epsilon := P_\epsilon \circ T$ est alors de rang fini et $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$. En effet, si $x \in B_X$, alors la projection $T_\epsilon(x) = P_\epsilon(T(x))$ de $Tx$ est l'élément de $Y_\epsilon$ de distance minimale avec $Tx$. Donc $\|Tx - T_\epsilon x\| \leq \left\|Tx - y_{j(x)}\right\| \leq \epsilon$.

Par continuité, $\|Tx - T_\epsilon x\| \leq \epsilon$ pour tout $x \in X$ avec $\|x\| \leq 1$. Ainsi $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$.

**Exemples 3.2.12** ***Exemple 3.2.13*** *Il est clair que tout opérateur $T$ de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(B_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite $T$ en norme d'opérateur d'une suite $(T_n)$ d'opérateurs de rang fini est compacte. C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts ; on montre par exemple que si $c_n \to 0$, l'opérateur $\Delta_c$ de $l_p$ dans $l_p$ défini par $\Delta_c((x_n)) = (c_n x_n)$ est compact : on commence par remarquer que la norme de $\Delta_c$ dans $\mathcal{L}(l_p)$ est majorée par $\|c\|_\infty$(elle est en fait égale à $\|c\|_\infty$). Ensuite, pour tout entier $N$ on considère la suite $c^{(N)}$ telle que*

$$c^{(N)} = \begin{cases} c_n \text{ si } n \leq N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

*l'opérateur* $T_N = \Delta_{c^{(N)}}$ *est de rang fini, et* $\|\Delta_c - T_N\| = \|\Delta_{c-c^{(N)}}\|$ *est majoré par* $\left\|c - c^{(N)}\right\|_\infty = sup_{n>N} |c_n|$ *qui tend vers* $0$ *parce que la suite* $(c_n)$ *tend vers* $0$.

**Proposition 3.2.14** *Soient* $E$ *et* $F$ *deux espaces de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E; F)$ *; notons* $B_E$ *la boule unité fermée de* $E$.

(i) Supposons $T$ compact ; alors $T$ est continu de $B_E$, munie de la topologie faible, dans $F$ muni de la topologie de la norme ; en conséquence, pour toute suite $(x_n)$ de points de $E$ convergeant faiblement vers 0 la suite $(T(x_n))$ converge en norme vers 0.
(ii) Supposons $E$ réflexif ; alors $T$ est compact si et seulement si : pour toute suite $(x_n)$ de points de $E$ convergeant faiblement vers 0, la suite $(T(x_n))$ converge en norme vers 0 ; de plus, l'ensemble $T(B_E)$ est compact (en norme) dans $F$ lorsque $T$ est compact.

*Preuve.* Supposons $T$ compact, et soit $K$ un compact de $F$ contenant $T(B_E)$ ; l'identité, de $K$ muni de la topologie de la norme, dans $K$ muni de la topologie faible est continue ; comme K est compact, c'est un hom´eomorphisme. Comme T est continu de BE muni de la topologie faible dans K muni de la topologie faible, il en r´esulte que T est continu de BE faible dans $F$ muni de la norme.

Si $(x_n)$ est une suite qui converge faiblement vers 0 dans $E$, elle est bornée dans $E$, donc $(T(x_n))$ tend vers 0 en norme par ce qui précède. Lorsque $E$ est réflexif, la boule $B_E$ est faiblement compacte, donc son image $T(B_E)$ est faiblement compacte dans $F$, donc faiblement fermée, donc fermée ; puisque $T(B_E)$ est relativement compacte, elle est en fait compacte.

Supposons encore $E$ réflexif et que $(T(x_n))$ converge vers 0 en norme dans $F$ pour toute suite $(x_n)$ qui tend faiblement vers $0_E$ ; soit $(x_n)$ une suite dans $B_E$ ; il existe une sous-suite $(x_{n_k})$ qui converge faiblement vers un point $x \in B_E$ ; alors $(x_{n_k} - x)$ converge faiblement vers 0, donc $T(x_{n_k}) - T(x)$ converge en norme vers 0 d'après l'hypothèse ; on a ainsi montré que pour toute suite $(x_n) \subset B_E$, il existe une sous-suite $(T(x_{n_k}))$ qui converge en norme, donc $T$ est compact.

## 3.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt forment une classe remarquable d'opérateurs compacts sur des espaces de Hilbert. Dans toute cette section $H$, $H_1$ et $H_2$ désignant des espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On supposera que tout espace de Hilbert est séparable (d'où, dans le cas de dimension infinie, toute base est dénombrable).

On rappelle la définition d'adjoint d'un opérateur linéaire borné. Soit $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. Alors il existe un et un seul opérateur linéaire borné $T^* \in \mathcal{L}(H_2; H_1)$ vérifiant pour toutx $x \in H_1$, $y \in H_2$ :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

L'opérateur $T^*$ est appelé opérateur adjoint de $T$, et l'on a $\|T\| = \|T^*\|$. En outre, si $S; T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$, alors $(ST)^* = T^*S^*$.

**Définition 3.3.1** *Soit $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. On dit que $T$ est un op erateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $H_1$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < \infty.$$

*On note $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $H_1$ dans $H_2$.*

**Remarque 3.3.2** *On remarque que la condition pour $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ d'etre un opérateur de Hilbert-Schmidt revient au fait qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que la suite numérique $(\|T(e_n)\|)_n$ est dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$.*

**Lemme 3.3.3** *(a) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ alors pour toutes bases hilbertiennes $(e_n)_{n\geq 1}$ de $H_1$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ de $H_2$, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*(f_m)\|^2 \tag{1}$$

*(valeur finie $\geq 0$ ou bien $+\infty$).*

*(b) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ est de Hilbert-Schmidt, il en est de meme pour $T^*$.*

*(c) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$ converge pour toute base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $H_1$.*

*Preuve.* L'égalité (1) est une conséquence de l'égalit e de Bessel et du fait qu'on peut renverser l'ordre des sommations car les sommants sont positifs ou nuls.

Pour $x \in H_1$ et $y \in H_2$ on a

$$\|x\|^2 = \sum\nolimits_{b\in B} |\langle x, b\rangle|^2, \|y\|^2 = \sum\nolimits_{b'\in B'} |\langle b', y\rangle|^2$$

d'où le resulte.

(b) et (c) suivent immédiatement de (a).

D'après le lemme précedent l'expression $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$ ne dépend pas du choix de la base et dépend uniquement de $T($ Il est clair que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$ ne d'pend pas de $(f_n)_{n\geq 1}$ et que $\sum_{m=1}^{\infty} \|T^*(f_m)\|^2$ ne dépend pas de $(e_n)_{n\geq 1})$. On pose

$$\|T\|_{HS} = (\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

On pose aussi

$$\langle S, T\rangle_{HS} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n\rangle \tag{3}$$

On a

$$\langle Se_n, Te_n\rangle \leq \|Se_n\| \, \|Te_n\| \leq \tfrac{\|S(e_n)\|^2+\|T(e_n)\|^2}{2}$$

Par conséquent, la suite $(\langle Se_n, Te_n\rangle)_n$ est bien sommable pour $S; T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$.

**Exemples 3.3.4** *1. Prenons d'abord $E = F = \mathbb{C}^n$. Un opérateur $T$ est représenté par une matrice $(a_{i;j})$ dans la base canonique ; si $(e_j)$ désigne la base canonique, on a*

$$\|T(e_j)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i;j}|^2,$$

*donc la norme Hilbert-Schmidt de $T$ est égale à*

$$\|T\|_2 = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i;j}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

*2. Si $E = F = l_2$, un opérateur $T$ peut se représenter par une matrice infinie $(a_{i;j})$, et on voit de meme que la norme Hilbert-Schmidt est égale à*

$$\|T\|_2 = (\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{i;j}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**Exercice** . Monter que, pour tout $S; T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$, le nombre $\langle S, T\rangle_{HS}$ est indépendant du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$.

Le lemme suivant montre notamment que $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

**Lemme 3.3.5** *Avec la convention $0\infty = 0$, nous avons les propriétés suivantes pour tout $S, T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ :*

(a) $\|T + S\|_{HS} \leq \|T\|_{HS} + \|S\|_{HS}$
(b)$\|\lambda S\|_{HS} = |\lambda| \, \|T\|_{HS}$
(c)$\|ST\|_{HS} \leq \|S\| \, \|T\|_{HS}$ et $\|TS\|_{HS} \leq \|S\| \, \|T\|_{HS}$
(d)$\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.

**Théorème 3.3.6** *$(\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ ; $\langle ., .\rangle_{HS})$ est un espace de Hilbert.*

**Théorème 3.3.7** *(1) Tout opérateur de rang fini est de Hilbert-Schmidt.*

*(2) $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il existe une suite $(T_n)$ d'opérateurs de rangs finis telle que $\|T_n - T\|_{HS} \to 0$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. (Autrement dit, les opérateurs de rangs finis forment un sous-espace dense de $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$).*

**Corollaire 3.3.8** *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur compact. De plus, $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ est dense dans $\mathcal{K}(H_1; H_2)$ pour la norme d'opérateurs.*

# Bibliographie


[1] H. Brezis, functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[2] Daniel Li. Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés. Ellipses Paris. 2013.

[3] N. E. Hassan, Topologie générale et espaces normés, Dunod Malakoff, 2011.

[4] Isabelle Chalendar et Emmanuel Fricain. Compléments en analyse. Cours et exercices. Master- Mathématiques pures. Cours de l'année 2011-2010. http ://math.univ-lille1.fr/~fricain/enseignement.html

[5] B. Maurey. Analyse fonctionnelle et théorie spéctrale "MT04". Cours de l'année 2001-2002. https ://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/ts012/poly/mths.pdf

[6] Claude Wagschal. Topologie et analyse fonctionnelle. Hermann. Paris. 2012.