Table des matières

0.1 Introduction

Chapitre 1

Rappels de théorie de la mesure positive

1.1 Espaces mesurés

Ensembles mesurables

Définition 1.1.1 *(Tribu) Soit X un ensemble quelconque. Une tribu (ou σ-algèbre) sur X est une famille $\mathcal{M}$ de parties de X telle que*

i) $X \in \mathcal{M}$

ii) Si $A \in \mathcal{M}$ *alors* $A^c \in \mathcal{M}$

iii) Si $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ *alors* $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

On dit alors que $\mathcal{M}$ est l'ensemble des parties mesurables de X.

Définition 1.1.2 *(Tribu engendrée par une partie). Si $\mathcal{S}$ une famille de parties de X. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{S}$ la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{S}$.*

Si X est un espace topologique, on appelle tribu borélienne la tribu engendrée par les ouverts, notée $\mathcal{B}(X)$.

Théorème 1.1.3 *(La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)*

Sur $\mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle, la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par :

1) Les intervalles $]a, b[\,,\ a, b \in \mathbb{R}$

2) Les intervalles $]-\infty, b[\,,\ b \in \mathbb{R}$.

3) Les intervalles $]a, +\infty[\,,\ a \in \mathbb{R}$

Mesures positives

Définition 1.1.4 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ est une application $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie :*

i) $\mu(\phi) = 0$.

ii) Si $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ *disjoint deux-à-deux, alors*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Remarques 1.1.5 *1) De façon générale, on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Par ailleurs si $A \subset B$ tel que $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante alors

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu(A_n) \tag{1.1}$$

3) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante telle que $\mu(A_1) < \infty$ alors

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu(A_n) \tag{1.2}$$

Définition 1.1.6 *(Mesure finie σ-finie)*

Soit μ une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$

1) On dit qu'une mesure positive μ est finie si $\mu(X) < \infty$.

2) On dira qu'e μ est σ-finie s'il existe $(E_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exemples 1.1.7 *1) La mesure de Direc δ_x est finie car $\delta_x(X) = 1 < \infty$.*

2) La mesure de compage sur X est :

i) finie si et seulement si X est fini

ii) σ-finie si et seulement si X est dénombrable.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.1.8 *(de Carathéodory)*

Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que

$$\lambda(]a, b[) = b - a$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Définition 1.1.9 *(Mesure de Dirac) Soit X un ensemble et $a \in X$ un point de X. Pour tout $A \subset X$, la mesure δ_a de Dirac (sur $\mathcal{P}(X)$) au point a est définie par*

$$\begin{cases} \delta_a(A) = 1, & si\ a \in A \\ \delta_a(A) = 0, & si\ a \notin A \end{cases}$$

1.2 Intégration

Intégrale de fonctions positives

Définition 1.2.1 *La fonction numérique $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite mesurable si*

$$(f > a) = f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}, \ pour\ tout\ a \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^0(X)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ numériques mesurables.

Remarques 1.2.2 *1) La fonction indicatrice χ_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{M}$*
2) Soit $f, g : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables, on dit que $f = g$ presque par tout si

$$\mu(f \neq g) := \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

Définition 1.2.3 *Une fonction mesurable positive $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty[$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c-à-d*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$$

où $f(X) = \{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$ et $A_i = f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{M}$. On écrit $f \in \mathcal{E}_+$
On pose alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i . \mu(A_i)$$

avec la convention $0.\infty = 0$ si $a_i = 0$ et $\mu(A_i) = 0$.

Nous notons $\mathcal{L}^0_+$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives.

Définition 1.2.4 *Pour $f \in \mathcal{L}^0_+$ on appelle intégrale sur X de f par rapport à' μ l'élément de $[0, +\infty]$ noté $\int f d\mu$ et défini par*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+, \;\; s \leq f \right\}. \tag{1.3}$$

Pour $A \in \mathcal{M}$ on définit aussi

$$\int_A f d\mu := \int f.\chi_A d\mu \tag{1.4}$$

Nous donnons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite-intégrale ($\lim \int = \int \lim$).

Théorème 1.2.5 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi)*
Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{L}^0_+$ et soit $f = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \sup\limits_{n \geq 1} f_n$. Alors

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n \geq 1} \int f_n d\mu$$

Corollaire 1.2.6 *(Interversion série-intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. La fonction $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est aussi dans $\mathcal{L}^0_+$ et

$$\int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int f_n d\mu \right) \qquad \textit{(L'égalité dans } [0, +\infty])$$

Mesures à densité par rapport à une autre mesure

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante.

Théorème 1.2.7 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^0_+$. Définissons la fonction d'ensembles $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ par*

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \;\; A \in \mathcal{M} \tag{1.5}$$

Alors, ν est une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est de densité f par rapport à μ.

Exemples 1.2.8 *1) Intégration par rapport à la mesure de comptage*

Considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage* $\mu = card$ *et la fonction mesurable* $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. *Alors*

$$\int f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

2) Intégration par rapport à la mesure de Dirac

Considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni de la mesure de Dirac* δ_a *en point* $a \in X$ *et la fonction mesurable* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. *Alors*

$$\int f d\delta_a = f(a).$$

3) Intégration par rapport à une mesure à densité

Soit ν *la mesure de densité* f *par rapport à* μ *sur l'espace mesurable* $(X, \mathcal{M})$. *Alors pour tout* $g \in \mathcal{L}^0_+$ *on a*

$$\int g d\nu = \int f g d\mu.$$

Fonctions intégrables

Définition 1.2.9 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *(*$f \in \mathcal{L}^0$*) une fonction numérique mesurable. On dit que* f *est intégrable par rapport à* μ *si*

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

On notera $\mathcal{L}^1(\mu)$ *l'espace vectoriel des fonctions* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrables.*

Théorème 1.2.10 *(Convergence dominée)*

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions numériques mesurables. On suppose que*

1) $f_n \longrightarrow f$ *presque partout*

2) Il existe une fonction fixe $g : X \longrightarrow [a, +\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n| \leq g \text{ presque partout}$$

Alors, f est intégrable et $\int |f_n - f|\, d\mu \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

En particulier, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \int f d\mu$$

Chapitre 2

Mesures réelles (singnées), décomposition

2.1 Mesure singnée, décomposition

Définition 2.1.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espase mesurable. La mesure signée (réelle) est une application*

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$$

telle que

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) μ *est* σ*-additive ;*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{M}$ *disjoints deux à deux.*

La mesure signée μ *est dite finie si* $\mu(A)$ *est fini (i.e.* $\mu(A) \in \mathbb{R}$*) pour tout* $A \in \mathcal{M}$*.*

Remarque 2.1.2 *La musure signée infinie* μ *ne peut prendre à la fois la valeur* $-\infty$ *et la valeur* $+\infty$ *: c'est l'un ou l'autre. En effet, supposons qu'il existe* $A, B \in \mathcal{M}$ *avec* $\mu(A) = +\infty$ *et* $\mu(B) = -\infty$*. Puisque* $\mu(A) + \mu(A^c) = \mu(X)$ *on a* $\mu(X) = +\infty$ *et aussi par* $\mu(B) + \mu(B^c) = \mu(X)$ *on a* $\mu(X) = -\infty$*, ceci une contradiction.*

Proposition 2.1.3 *Soit* μ *une mesure signée sur* $(X, \mathcal{M})$*.*

i) Si $A, B \in \mathcal{M}$ *tels que* $A \subset B$ *avec* $\mu(B)$ *est fini alors* $\mu(A)$ *est fini. De plus on a*

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Par conséquence, si $\mu(X)$ *est fini alors* μ *est finie.*

ii) La mesures signée μ *vérifiée la continuité croissante et la continuité décroissante.*

Preuve. i) Soit $A \subset B$ avec $\mu(B)$ est fini. On a $B = A \cup (B \backslash A)$, alors

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$$

Il est clair que $\mu(A)$ est fini, car si $\mu(A) = +\infty$ on a $\mu(B \backslash A) = -\infty$, ce qui est une contradiction puisque μ ne peut prendre à la fois $-\infty$ et $+\infty$.

ii) La preuve comme le cas des mesures positives. ■

Exemple 2.1.4 *Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{M})$ dont au moins une est finie, alors $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.*

Exemple 2.1.5 *Soit μ une mesure positive sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et soit f : $X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. L'application $\upsilon : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\upsilon(A) = \int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

est une mesure signée. On dit qu'elle est de densité f par rapport à μ.

Nous verrons bientôt que toute mesure signée se présente de cette manière.

Définition 2.1.6 *Soient μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$ et $A \in \mathcal{M}$.*
i) On dit que A est positif pour μ si pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$ on a $\mu(E) \geq 0$.
ii) On dit que A est négatif pour μ si pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$ on a $\mu(E) \leq 0$.
iii) On dit que A est nul pour μ si pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$ on a $\mu(E) = 0$. On écrit simplement A est μ-nul.

Proposition 2.1.7 *Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.*
i) Si A est positif (resp. négatifs, resp. nul) et $B \in \mathcal{M}$ avec $B \subset A$, alors B est positif (resp. négatifs, resp. nul).
ii) Si $(A_n)_n$ est une suite des ensembles positifs (resp. négatifs, resp. nul), alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est positif (resp. négatif, resp. nul)

Preuve. i) Soit $E \in \mathcal{M}$, $E \subset B \subset A$ alors $E \subset A$ et A est positif donc $\mu(E) \geq 0$, donc B est positif.
ii) Soit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, on définit la suite $(B_n)_n$ par

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \backslash \left(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}\right), \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Les B_n sont des patrties mesurables disjoints deux à deux, de plus ils sont positives car $B_n \subset A_n$ pour tout $n \geq 1$ et on a

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

Soit $E \in \mathcal{M}$, $E \subset A$, alors on peut écrire

$$E = E \cap A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (B_n \cap E).$$

Par la σ-additivité de la mesure signée μ en tenant compte du fait que $B_n \cap E \subset B_n$, on a

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap E) \geq 0$$

Ce qui donne $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est positif. ■

Décomposition de Hahn

Théorème 2.1.8 *Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.*
Il existe $P, N \in \mathcal{M}$ tels que $\begin{cases} P \cap N = \phi \\ P \cup N = X \end{cases}$ *, P est positif et N est négatif.*
On dit que (P, N) est une décomposition de Hahn de la mesure signée μ.

Remarque 2.1.9 *La décomposition de Hahn n'est pas unique, on peut associer plusieurs décomposition de Hahn pour la même mesure signée μ.*
Soient $(X, \mathcal{M})$ =$([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]))$ et μ la mesure signée définie par

$$\mu(A) = \int_A x dx, \quad A \in \mathcal{B}([-1,1]$$

Les couples $([0,1], [-1,0[)$ et $(]0,1], [-1,0])$ sont deux décompositions de Hahn pour la mesure signée μ

Décomposition de Jordan

Théorème 2.1.10 *i) Toute mesure signée μ sur $(X, \mathcal{M})$ est la différence de deux mesures μ^+, μ^- positives ($\mu = \mu^+ - \mu^-$) dont au moins une est finie. De plus, si (P, N) est une décomposition de Hahn de μ, on définit μ^+ et μ^- par*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \quad \textit{et} \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N), \ \textit{pour tout } E \in \mathcal{M}.$$

ii) Les mesures positives μ^+ et μ^- ne dépendent pas de la décomposition de Hahn utilisée.

Preuve. Comme P est positif et $E \cap P \subset P$ donc $\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \geq 0$ et aussi N est négatif et $E \cap N \subset N$ donc $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N) \geq 0$. Ce qui montre que les fonctions $\mu^+, \mu^- : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ sont positives. Dautre part $\mu^+(\phi) = \mu(\phi \cap P) = \mu(\phi) = 0$ et aussi $\mu^-(\phi) = 0$. Pour la σ-additivité, soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux, la suite $(E_n \cap P)_{n\geq 1}$ est aussi disjoints deux à deux car

$$(E_n \cap P) \cap (E_m \cap P) = E_n \cap E_m \cap P = \phi \cap P = \phi, \ \text{pour tout } n \neq m$$

La mesure positive μ^+ est σ-additive car

$$\mu^+ \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \cap P \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap P) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^+(E_n)$$

de même pour la mesure positive μ^-. Il suit alors que μ^+ et μ^- sont des mesures positives. On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ car pour tout $E \in \mathcal{M}$,

$$\mu(E) = \mu(E \cap X) = \mu\left[E \cap (P \cup N)\right] = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

Puisque μ prend au plus une des deux valeurs $+\infty$ ou $-\infty$ alors μ^+ ou μ^- est finie.
Il reste à montrer que μ^+, μ^- ne dépend pas de la décomposition de Hahn utilisée. On considère deux décompositions de Hahn (P_1, N_1) et (P_2, N_2) de la mesure signée μ et on montre que

$$\begin{cases} \mu(E \cap P_1) = \mu(E \cap P_2) \\ \mu(E \cap N_1) = \mu(E \cap N_2) \end{cases} \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{M} \ ?$$

Puisque $E \cap (P_1 \backslash P_2) \subset P_1$ et P_1 est positif on a

$$\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right) \geq 0. \tag{2.1}$$

D'autre part, puisque $P_2 \cup N_2 = X$ on a $N_2 = P_2^C$ et alors

$$E \cap (P_1 \backslash P_2) = E \cap P_1 \cap (P_2^C) = E \cap P_1 \cap N_2 \subset N_2.$$

L'ensemble N_2 est négatif donc

$$\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right) \leq 0. \tag{2.2}$$

Les inégalités (2.1) et (2.2) implique que $\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right) = 0$. Mais,

$$\begin{aligned} E \cap P_1 &= E \cap \left[\overbrace{(P_1 \backslash P_2) \cup (P_1 \cap P_2)}^{P_1}\right] \\ &= \underbrace{E \cap (P_1 \backslash P_2)}_{(E1)} \cup \underbrace{E \cap (P_1 \cap P_2)}_{(E2)} \end{aligned}$$

Puisque $(E1)$ et $(E2)$ sont disjoints on obtient

$$\mu\left(E \cap P_1\right) = \underbrace{\mu\left(E \cap (P_1 \backslash P_2)\right)}_{=0} + \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right) = \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right)$$

De même façon on trouve $\mu\left(E \cap P_2\right) = \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right)$. Ce qui donne

$$\mu\left(E \cap P_1\right) = \mu\left(E \cap P_2\right) = \mu\left(E \cap P_1 \cap P_2\right).$$

■

Exemple 2.1.11 *Soit υ la mesure signée définie dans l'Exemple 2.1.5 et considérons P, N deux parties de X telles que*

$$P = \{x \in X : f(x) \geq 0\} \quad et \quad N = P^C.$$

Puisque la fonction f est mésurable on a $P = f^{-1}([0, +\infty[) \in \mathcal{M}$ et $N = P^C \in \mathcal{M}$ et aussi $P \cup N = X$ et $P \cap N = \phi$. L'ensemble P est positif car si $E \subset P$ alors $f \geq 0$ dans E donc

$$\upsilon(E) = \int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$$

de même façon montrons que N est négatif. Alors (P,N) est une décomposition de Hahn de la mesure signée υ. Pour la décomposition de Jordan, pour tout $E\in\mathcal{M}$ on a

$$\begin{array}{l} \upsilon^{+}(E)=\int_{E\cap P}fd\mu=\int_{E}f\chi_{P}d\mu=\int_{E}f^{+}d\mu \\ \upsilon^{-}(E)=-\int_{E\cap N}fd\mu=-\int_{E}f\chi_{N}d\mu=\int_{E}f^{-}d\mu \end{array}$$

Corollaire 2.1.12 *Si (μ^{+},μ^{-}) est la décomposition de Jordan de la mesure μ, alors pour tout $A\in\mathcal{M}$ on a*

$$\mu^{+}(A) = \sup\{\mu(E),\ E\in\mathcal{M},\ E\subset A\} \tag{2.3}$$

$$\mu^{-}(A) = \sup\{-\mu(E),\ E\in\mathcal{M},\ E\subset A\} \tag{2.4}$$

Preuve. Soit $A,E\in\mathcal{M}$ avec $E\subset A$, puisque μ^{+} est une mesure positive on a

$$\mu(E)=\mu^{+}(E)-\mu^{-}(E)\leq\mu^{+}(E)\leq\mu^{+}(A)$$

donc $\mu^{+}(A)$ est un majorant de l'ensemble $\{\mu(E),\ E\in\mathcal{M},\ E\subset A\}$. D'autre part si (P,N) est une décomposition de Hahn de μ on a $\mu^{+}(A)=\mu(A\cap P)$ et puisque $P\in\mathcal{M}$ et $A\cap P\subset A$ on a

$$\mu^{+}(A)=\mu(A\cap P)\in\{\mu(E),\ E\in\mathcal{M},\ E\subset A\}$$

ce qui implique que

$$\mu^{+}(A)=\sup\{\mu(E),\ E\in\mathcal{M},\ E\subset A\}$$

■

Théorème 2.1.13 *(caractérisation des ensembles positifs et négatifs)*
Soit μ une mesure signée sur $(X,\mathcal{M})$. L'ensemble $E\in\mathcal{M}$ est positif (resp. négatif) si et seulement si $\mu^{-}(E)=0$ (resp. $\mu^{+}(E)=0$).

Preuve. $\Longrightarrow$) Si E est positif et si (P,N) est une décomposition de Hahn de μ on a $\mu^{-}(E)=-\mu(E\cap N)$,

$$\left\{\begin{array}{lll} E\cap N\subset E \text{ et } E \text{ positif} & \Longrightarrow & \mu(E\cap N)\geq 0 \\ E\cap N\subset N \text{ et } N \text{ négatif} & \Longrightarrow & \mu(E\cap N)\leq 0 \end{array}\right.$$

ce qui implique que $\mu(E \cap N) = 0$ alors $\mu^-(E) = 0$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\mu^-(E) = 0$ et montrons que $E \in \mathcal{M}$ est positif. Soit $G \in \mathcal{M}$ avec $G \subset E$ donc $\mu^-(G) \leq \mu^-(E) = 0$ ce qui donne $\mu^-(G) = 0$. Alors

$$\mu(G) = \mu^+(G) - \mu^-(G) = \mu^+(G) \geq 0,$$

d'où la positivité de l'ensemble E. ■

2.2 Variation d'une mesure singnée

Définition 2.2.1 *Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$. La variation de μ est la mesure positive*

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

où (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de μ

La variation totale de μ est la quantité $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Exemple 2.2.2 *La variation de la mesure signée υ définie dans l'Exemple 2.1.5 est donnée par*

$$|\upsilon|(A) = \upsilon^+(A) + \upsilon^-(A) = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu = \int_A |f| \, d\mu$$

Remarque 2.2.3 *Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a*

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \tag{2.5}$$

En effet,

$$|\mu(A)| = \left|\mu^+(A) - \mu^-(A)\right| \leq \left|\mu^+(A)\right| + \left|\mu^-(A)\right| = \mu^+(A) + \mu^-(A) = |\mu|(A)$$

Proposition 2.2.4 *Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$, alors*

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A \right\} \tag{2.6}$$

Preuve. Soit (P, N) une décomposition de Hahn de μ. On a

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) = \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N)$$

puisque P est positif avec $A \cap P \subset P$ on a $\mu(A \cap P) \geq 0$. Aussiet N est négatif et $A \cap N \subset N$, alors $\mu(A \cap N) \leq 0$. Donc

$$|\mu|(A) = |\mu(A \cap P)| + |\mu(A \cap N)|.$$

Il est clair que $\{A \cap P, A \cap N\}$ est une partition de A dans $\mathcal{M}$ car $A \cap P, A \cap N \in \mathcal{M}$ et

$$\begin{cases} (A \cap P) \cup (A \cap N) = A \cap (P \cup N) = A \cap X = A \\ \text{et} \\ (A \cap P) \cap (A \cap N) = A \cap (P \cap N) = A \cap \phi = \phi \end{cases}$$

Ce qui implique que $|\mu|(A) \leq \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A \right\}$.
D'autre part, d'après (2.5) et puisque $|\mu|$ est une mesure positive on a

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A \right\} \\ \leq & \sup \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |\mu|(A_n) : A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right\} \\ = & \sup \left\{ |\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) : A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right\} \\ = & |\mu|(A) \end{aligned}$$

Donc on obtient l'égalité (2.6). ■

Corollaire 2.2.5 *On a aussi*

$$|\mu|(A) = \sup \{ |\mu(E)| + |\mu(A \backslash E)| : E \in \mathcal{M} \text{ et } E \subset A \} = s \tag{2.7}$$

Preuve. Puisque $\{E, A \backslash E\}$ est une partition de A pour tout $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A$, d'après la proposition précédente on a $|\mu|(A) \geq |\mu(E)| + |\mu(A \backslash E)|$ d'où $|\mu|(A) \geq s$. Inversement, pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$. Comme

$$\mu^+(A) = \sup \{ \mu(E), \ E \in \mathcal{M}, \ E \subset A \},$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisit $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$ et $E_\varepsilon \subset A$ telle que

$$\mu(E_\varepsilon) \geq \mu^+(A) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.8}$$

Si $\mu^+(A) = +\infty$ alors

$$s \geq |\mu(E_\varepsilon)| \geq \mu^+(A) - \frac{\varepsilon}{2} = +\infty$$

et donc $s = +\infty = |\mu|(A)$. Maintenant supposons que $\mu^+(A) < +\infty$. Alors

$$\mu(A) = \mu(E_\varepsilon) + \mu(A \backslash E_\varepsilon) \geq \mu^+(A) - \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A \backslash E_\varepsilon).$$

D'où

$$\mu(A) - \mu^+(A) \geq -\frac{\varepsilon}{2} + \mu(A \backslash E_\varepsilon),$$

ce qui implique que

$$-\mu(A \backslash E_\varepsilon) \geq \mu^-(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

(2.8) et (2.9) donne

$$|\mu(E_\varepsilon)| + |\mu(A \backslash E_\varepsilon)| \geq \mu(E_\varepsilon) - \mu(A \backslash E_\varepsilon) \geq \mu^+(A) + \mu^-(A) - \varepsilon = |\mu|(A) - \varepsilon$$

En fin

$$s \geq |\mu(E_\varepsilon)| + |\mu(A \backslash E_\varepsilon)| \geq |\mu|(A) - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ceci entraîne que $s \geq |\mu|(A)$. ■

Proposition 2.2.6 $|\mu|$ *est la plus petite mesure positive sur* $(X, \mathcal{M})$ *qui majore* μ.

Preuve. Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ (Remarque 2.2.3), alors $|\mu|$ majore μ. Supposons que ν est une mesure positive majore μ i.e. $|\mu(A)| \leq \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$ et montrons que $|\mu|(A) \leq \nu(A)$?

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une partition de A dans $\mathcal{M}$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \nu(A)$$

En prend la borne supérieure sur toute les partitions mesurables de A, on trouve $|\mu|(A) \leq \nu(A)$. ■

Proposition 2.2.7 *Pour toute mesure signée finie μ sur $(X,\mathcal{M})$, la variation totale de μ est finie c-à-d*

$$\|\mu\| = |\mu|(X) < \infty,$$

par conséquent, $|\mu|(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathcal{M}$.

Preuve. On sait que l'une des messures μ^+ ou μ^- est finie et comme $\mu(X) = \mu^+(X) - \mu^-(X)$ alors $\mu^+(X)$ et $\mu^-(X)$ sont finies, ce qui implique que $\|\mu\| = \mu^+(X) + \mu^-(X)$ est finie. ■

Proposition 2.2.8 *L'ensemble $M(X)$ des mesures signées finies μ sur $(X,\mathcal{M})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et la variation totale définie une norme sur cet espace.*

Preuve. Il est clair que $M(X)$ un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications $\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour toute mesure singée $\mu \in M(X)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mu\| &= |\alpha\mu|(X) \\
&= \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha\mu(A_n)| : X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right\} \\
&= |\alpha| \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(A_n)| : X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right\} \\
&= |\alpha| \, \|\mu\|
\end{aligned}$$

Si $\|\mu\| = 0$ alors $|\mu|(X) = 0$. D'après (2.5) on a

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(X) = 0, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}.$$

Donc $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}$, d'où la mesure signée μ est nulle. Pour l'inégalité triagulaire on utilisant la relation (2.7), soit μ_1, μ_2 deux mesures signées sur $(X,\mathcal{M})$

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 + \mu_2\| &= |\mu_1 + \mu_2|(X) \\
&= \sup_{A\in\mathcal{M}} \{|\mu_1(A) + \mu_2(A)| + |\mu_1(A^c) + \mu_2(A^c)|\} \\
&\leq \sup_{A\in\mathcal{M}} \{|\mu_1(A)| + |\mu_1(A^c)|\} + \sup_{A\in\mathcal{M}} \{|\mu_2(A)| + |\mu_2(A^c)|\} \\
&= |\mu_1|(X) + |\mu_2|(X). \\
&= \|\mu_1\| + \|\mu_2\|
\end{aligned}$$

Donc $\|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$. ■

Théorème 2.2.9 *$M(X)$, muni de la norme variation totale $\|\mu\|$, est un espace de Banach.*

2.3 Intégration par rapport à une mesure signée

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ de la décomposition de Jordan $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Définition 2.3.1 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. L'intégrale de f par rapport à μ est donnée par la relation*

$$\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^- \tag{2.10}$$

Remarques 2.3.2 *1) Pour les fonctions $f \in L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-)$ on a $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$ et alors*

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f d\mu^+ - \int f d\mu^- \\ &= \int f^+ d\mu^+ - \int f^- d\mu^+ - \int f^+ d\mu^- + \int f^- d\mu^- \end{aligned}$$

2) Comme $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ on a

$$\int |f| \, d|\mu| = \int |f| \, d(\mu^+ + \mu^-) = \int |f| \, d\mu^+ + \int |f| \, d\mu^-$$

et donc $f \in L^1(|\mu|)$ si et seulement si $f \in L^1(\mu^+)$ et $f \in L^1(\mu^-)$, c'est-à-dire

$$L^1(\mu) = L^1(|\mu|) = L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-) \tag{2.11}$$

L'intégrale par rapport à une mesure signée vérifie des propriétés analogues à celle de l'intégrale par rapport à une mesure positive.

Proposition 2.3.3 *Soit μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$.*
Si $f \in L^1(\mu)$ alors

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\, |\mu| \tag{2.12}$$

Preuve. On utilise les propriétés analogues des mesures positives avec (2.10),

$$\begin{aligned}
\left|\int f d\mu\right| &= \left|\int f d\mu^+ - \int f d\mu^-\right| \\
&\leq \left|\int f d\mu^+\right| + \left|\int f d\mu^-\right| \\
&\leq \int |f| \, d\mu^+ + \int |f| \, d\mu^- \\
&= \int |f| \, d\, |\mu|
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.4 *(Convergence dominée). Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(|\mu|)$.*
On suppose que
1) $f_n \longrightarrow f$, $|\mu|$-presque partout.
2) Il existe une fonction fixe $g \in L^1(|\mu|)$ telle que

$$|f_n| \leq g, \quad |\mu| \text{ -presque partout.}$$

Alors,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \tag{2.13}$$

Preuve. Le théorème de convergence dominée (Théorème 1.2.10) pour la mesure positive $|\mu|$ donne

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int |f_n - f| \, d\, |\mu| = 0.$$

Par (2.12) on a

$$\left|\int f_n d\mu - \int f d\mu\right| \leq \int |f_n - f| \, d\, |\mu| \longrightarrow 0$$

donc $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$. ■

2.4 Exercices de chapitre 2

Exercice 2.1

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$.

1) Montrer que si $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) > 0$, alors il existe $E_0 \subset E$ ce qui est un ensemble positif pour μ avec $\mu(E_0) \geq \mu(E)$.

2) Montrer que si $F \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(F) < 0$, alors il existe $F_0 \subset F$ ce qui est un ensemble négatif pour μ avec $\mu(F_0) \geq \mu(F)$.

Solution 2.1

1) Si E est un ensemble positif pour μ alors nous avons terminé (on prend $E_0 \subset E$). Supposons que E est non-positif pour μ. Si (P, N) une décomposition de Hahn de μ, on pose alors $E_0 = E \cap P$. Puisque P est positif et $E_0 \subset P$ donc E_0 est aussi positif (voir Proposition 2.1.7). De plus,

$$\mu(E) = \mu\{E \cap (P \cup N)\} = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu(E_0) + \mu(E \cap N).$$

N est négétif et $E \cap N \subset N$ alors $\mu(E \cap N) \leq 0$ d'où

$$0 < \mu(E) \leq \mu(E_0),$$

ainsi, $E_0 = E \cap P$ est l'ensemble désiré.

Exercice 2.2

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ de la décomposition de Jordan (μ^+, μ^-). Soient E, $F \in \mathcal{M}$ tels que $E \cup F = X$ et $E \cap F = \phi$.

Montrer que si $\mu^-(E) = \mu^+(F) = 0$ alors, le couple (E, F) est une décomposition de Hahn de μ.

Exercice 2.2

Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$.

Montrer que si (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de la mesure μ, alors $\inf\{\mu^+, \mu^-\} = 0$ (la mesure nulle)

Solution 2.2

Si (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure μ, pour tout $E \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E) \\ &= \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E \cap X) \\ &= \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E \cap N) + \inf\left\{\mu^+, \mu^-\right\}(E \cap P) \\ &\leq \mu^+(E \cap N) + \mu^-(E \cap P) \\ &\leq \mu(E \cap N \cap P) - \mu(E \cap P \cap N) = 0. \end{aligned}$$

D'où $\inf\{\mu^+, \mu^-\} = 0$.

Exercice 2.3

1) Soit X un ensemble non vide et soit $A, B \subset X$. Déterminer $|\chi_A - \chi_B|$.

2) $\mathbb{R}$ est muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et la mesure de Lebesgue λ.

Soient $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $E \neq \phi$ avec $\lambda(E) < \infty$ et $G \in \mathcal{B}(E)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} &\mu : \mathcal{B}(E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &A \longmapsto \mu(A) = \lambda(G \cap A) - \lambda\left[(E \backslash G) \cap A\right] \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure signée sur $(E, \mathcal{B}(E))$ et déterminer $|\mu|$, la variation de μ.

Solution 2.3

1) On a quatre cas

i) Si $x \in A \backslash B$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 1$

ii) Si $x \in A \cap B$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 0$

iii) Si $x \in B \backslash A$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 1$

iv) Si $x \notin A \cup B$ alors $|\chi_A(x) - \chi_B(x)| = 0$

Dans tous les cas on a

$$\begin{aligned}|\chi_A(x) - \chi_B(x)| &= \begin{cases} 1, \text{ si } x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ 0, \text{ si } x \in (A \cap B) \cup (A \cup B)^C \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, \text{ si } x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ 0, \text{ si } x \notin (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \end{cases} \\ &= \chi_{A\Delta B}(x)\end{aligned}$$

2) L'application μ est finie sur $\mathcal{B}(E)$ car

$$\mu(A) \leq \lambda(G \cap A) \leq \lambda(G) < \infty$$

Il est claire que $\mu(\phi) = \lambda(\phi) - \lambda(\phi) = 0$

Soit $(A_n)_n$ une suite des éléments de $\mathcal{B}(E)$ disjoints 2-à-2. Par la σ-additivité de la mesure positive λ on a

$$\lambda\left[G \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\right] = \lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}(G \cap A_n)\right) = \sum_{n\geq 1}\lambda(G \cap A_n)$$
$$\lambda\left[(E \backslash G) \cap \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\right] = \sum_{n\geq 1} \lambda\left[(E\backslash G) \cap A_n\right]$$

Ce qui implique la σ-additivité de l'application μ.

Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \lambda(G \cap A) - \lambda\left[(E\backslash G) \cap A\right] \\ &= \int \chi_{G\cap A} d\lambda - \int \chi_{(E\backslash G)\cap A} d\lambda \\ &= \int_A \chi_G d\lambda - \int_A \chi_{E\backslash G} d\lambda \\ &= \int_A (\chi_G - \chi_{E\backslash G}) d\lambda\end{aligned}$$

D'aprés 1) et l'Exemple 2.2.2 on a

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &= \int_A \left|\chi_G - \chi_{E\setminus G}\right| d\lambda \\ &= \int_A \chi_{G\Delta(E\setminus G)} d\lambda \\ &= \int_A \chi_E d\lambda \\ &= \int_A 1 d\lambda \\ &= \lambda(A) \end{aligned}$$

Donc $|\mu| = \lambda$.

Exercice 2.4 (Examen 2016)

1) Montrer que si m une mesure signée finie et m_1, m_2 sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $m = m_1 - m_2$, alors

$$m_1 \geq m^+ \quad \text{et} \quad m_2 \geq m^-.$$

2) Soient μ, η deux mesures signées finies et ν une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $\mu + \nu = \eta$.

Utiliser la question précédente pour montrer que

$$\mu^+ \leq \eta^+ \leq \mu^+ + \nu \quad \text{et} \quad \eta^- \leq \mu^- \leq \eta^- + \nu.$$

Solution 2.4

1) Soit (P, N) une décomposition de Hahn de la mesure signée m. Puisque $m \leq m_1$ et m_1 est une mesure positive, pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$m^+(A) = m(A \cap P) \leq m_1(A \cap P) \leq m_1(A)$$

D'autre part, puisque $m(A) < \infty$, pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$m^-(A) = m^+(A) - m(A) \leq m_1(A) - m(A) = m_2(A)$$

2) $(\mu^+ + \nu)$ et μ^- sont des mesure positives avec $\eta = \mu + \nu = (\mu^+ + \nu) - \mu^-$. On applique 1) pour ces mesures ;

$$\eta^+ \leq \mu^+ + \nu \quad \text{et} \quad \eta^- \leq \mu^-.$$

Par ailleurs on a $\mu = \eta^+ - (\eta^- + \nu)$ donc d'aprés 1) ;

$$\mu^+ \leq \eta^+ \quad \text{et} \quad \mu^- \leq \eta^- + \nu.$$

Exercice 2.5

Soit μ une mesure signée finie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et soient (P_1, N_1), (P_2, N_2) deux décompositions de Hahn de la mesure μ. Montrer que

$$|\mu|(P_1 \Delta P_2) = |\mu|(N_1 \Delta N_2) = 0$$

Solution 2.5

Puisque $|\mu|$ est σ-additive on a

$$|\mu|(P_1 \Delta P_2) = |\mu|(P_1 \backslash P_2) + |\mu|(P_2 \backslash P_1)$$

Si (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de la mesure signée μ,

$$|\mu|(P_1 \backslash P_2) = \mu^+(P_1 \backslash P_2) + \mu^-(P_1 \backslash P_2)$$

On a $(P_1 \backslash P_2) \subset P_1$ et P_1 est positif, alors $(P_1 \backslash P_2)$ est positif. Ceci implique que $\mu^-(P_1 \backslash P_2) = 0$ (voir le Théorème 2.1.13). D'autre part

$$P_1 \backslash P_2 = P_1 \cap P_2^C = P_1 \cap N_2 \subset N_2$$

et N_2 est négatif, alors $(P_1 \backslash P_2)$ est négatif. Ceci implique que $\mu^+(P_1 \backslash P_2) = 0$. En fin on a

$$|\mu|(P_1 \backslash P_2) = 0 + 0 = 0$$

De même façon montrons que $|\mu|(P_2 \backslash P_1) = 0$. Donc $|\mu|(P_1 \Delta P_2) = 0$.
Nous suivons les mêmes étapes pour prouver que $|\mu|(N_1 \Delta N_2) = 0$.

Exercice 2.6

Soit μ une mesure signée finie sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ de décomposition de Hahn (P, N).

1) Pour $A \in \mathcal{M}$, calculer $\int \chi_A d\mu$ et $\int_A (\chi_P - \chi_N) d\mu$

2) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$|\mu|(A) = \sup_{|f| \leq 1} \left| \int_A f d\mu \right|.$$

Solution 2.6

1) Si (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan pour μ et par la définition de l'intégration par rapport à la mesure signée et la mesure positive on a

$$\int \chi_A d\mu = \int \chi_A d\mu^+ - \int \chi_A d\mu^- = \mu^+(A) - \mu^-(A) = \mu(A)$$

Et aussi, puisque $A \cap P$ est positif et $A \cap N$ est négatif on a

$$\begin{aligned} \textstyle\int_A (\chi_P - \chi_N) d\mu &= \textstyle\int_A \chi_P d\mu - \int_A \chi_N d\mu \\ &= \mu(A \cap P) - \mu(A \cap N) \\ &= \mu^+(A) + \mu^-(A) \\ &= |\mu|(A) \end{aligned}$$

2) Soit f mesurable avec $|f| \leq 1$, alors par (2.12) on a

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| \, d|\mu| \leq \int_A d|\mu| = |\mu|(A)$$

Ce qui donne $\sup\limits_{|f| \leq 1} \left| \int_A f d\mu \right| \leq |\mu|(A)$.

Inversement, choisissons la fonction mesurable $(\chi_P - \chi_N)$, on a $|\chi_P - \chi_N| \leq 1$ car $N \cap P = \phi$ et $N \cup P = X$. Alors

$$\sup_{|f| \leq 1} \left| \int_A f d\mu \right| \geq \left| \int_A \chi_P - \chi_N d\mu \right| = |\mu|(A)$$

Chapitre 3

Théorème de Radon-Nikodym et applications

3.1 Absolue continuité

Définition 3.1.1 *Soit m une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et μ une mesure signée sur $(X, \mathcal{M})$. On dit que μ est absolument continue par rapport à m et l'on écrit $\mu \ll m$ si pour tout $A \in \mathcal{M}$ tel que $m(A) = 0$ on a également $\mu(A) = 0$.*

$$\forall A \in \mathcal{M} : m(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$$

Une mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ est absolument continue si elle est absolument continue par rapport a la mesure de Lebesgue.

Remarque 3.1.2 *Si m et μ sont deux mesures positives sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $\mu \leq m$, alors $\mu \ll m$. En effet, soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $m(A) = 0$ on a $0 \leq \mu(A) \leq m(A) = 0$ alors $\mu(A) = 0$.*

Exemples 3.1.3 *1) Toute mesure signée finie μ est absolument continue par rapport à sa variation $|\mu|$ c-à-d $\mu \ll |\mu|$. En effet soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $|\mu|(A) = 0$. Puisque $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ on a $\mu(A) = 0$.*
2) Soit m une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et $f \in L^1(m)$. Soit μ la mesure de densité f par rapport à m c-à-d

$$\mu(A) = \int_A f dm, \quad A \in \mathcal{M}$$

Alors $\mu \ll m$ car $m(A) = 0 \Longrightarrow \int_A f dm = 0$.
Nous allons voir que si m est une mesure σ-finie, alors toute mesure absolument continue par rapport à m est de ce type : c'est le Théorème de Radon-Nikodym.

Proposition 3.1.4 *Si $\mu \ll m$ alors $|\mu| \ll m$*

Preuve. Supposons que $m(A) = 0$. D'après le Corollaire 2.2.5 on a

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu(E)| + |\mu(A \backslash E)| : E \in \mathcal{M} \text{ et } E \subset A\}$$

Soit $E \in \mathcal{M}$ tel que $E \subset A$ et donc $m(E) = 0$ et $m(A \backslash E) = 0$ (car $A \backslash E \subset A$), alors $\mu(E) = 0$ et $\mu(A \backslash E) = 0$ puisque $\mu \ll m$. Il en résulte que $|\mu|(A) = 0$, en passant à la borne supérieure. ■

Corollaire 3.1.5 *$\mu \ll m$ si et seulement si $\mu^+ \ll m$ et $\mu^- \ll m$.*

Preuve. Supposons que $\mu \ll m$, alors $|\mu| \ll m$. Soit $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) = 0$, alors $|\mu|(A) = 0$ et $\mu(A) = 0$ ce qui implique que $\mu^+(A) = 0$ et $\mu^-(A) = 0$ puisque $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$.
Inversement, si $\mu^+, \mu^- \ll m$, alors $m(A) = 0$ implique $\mu^+(A) = \mu^-(A) = 0$ et donc $\mu(A) = 0$, ce qui suffit. ■

Proposition 3.1.6 *Soient m, μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ avec m positive et μ signée finie. Alors $\mu \ll m$ si et seulement si*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad \forall A \in \mathcal{M} : m(A) \leq \delta \Longrightarrow |\mu(A)| \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

Preuve. ($\Longleftarrow$) Supposons que (3.1) est vrai et soit $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) = 0$ alors $0 = m(A) \leq \delta$ pour tout δ et donc

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad |\mu(A)| \leq \varepsilon$$

Ceci entraîne $\mu(A) = 0$ et alors $\mu \ll m$.
($\Longrightarrow$) Supposons la propriété (3.1) fausse, alors

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall \delta > 0) \quad (\exists A_\delta \in \mathcal{M}) : \quad m(A) \leq \delta \text{ et } |\mu(A)| > \varepsilon \tag{3.2}$$

Si on pose $\delta = \dfrac{1}{2^n}$ on obtient

$$(\forall n \geq 1) \quad (\exists A_n \in \mathcal{M}) : \quad m(A_n) \leq \tfrac{1}{2^n} \text{ et } |\mu(A_n)| > \varepsilon$$

Posons $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Puisque

$$A \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k, \qquad \text{pour tout } n \geq 1$$

on déduit que

$$m(A) \;\leq\; m\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \;\leq\; \sum_{k=n}^{+\infty} m(A_k) \;\leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par le passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ on trouve $m(A) = 0$.

La mesure positive $|\mu|$ est finie car μ est finie (voir Proposition 2.2.7) et la suite $\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)_{n\geq 1}$ est décroissante. Ainsi, la continuité décroissante de $|\mu|$ donne

$$|\mu|(A) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu| \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu|(A_n) \geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mu(A_k)| > \varepsilon > 0.$$

$m(A) = 0$ et $|\mu|(A) > 0$ implique que $|\mu|$ n'est pas absolument continue par rapport à m, alors μ n'est pas absolument continue par rapport à m en vertu de la Proposition 3.1.4.

■

Remarque 3.1.7 *Si μ est une mesure positive infinie, alors l'imlication ($\Longrightarrow$) dans la proposition précédente est faux en general. Il suffit de prendre $m = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu(A) = \int_A |t|\, d\lambda(t)$. On sait que $\mu \ll \lambda$. D'autre part, la suite $\left(\left[n, n+\frac{1}{n}\right]\right)_{n\geq 1}$ vérifie*

$$\mu\left(\left[n, n+\frac{1}{n}\right]\right) = \int_n^{n+\frac{1}{n}} t dt = 1 + \frac{1}{n^2} > 1$$

alors que

$$\lambda\left(\left[n, n+\frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

D'où la condition (3.2), la négation de (3.1), est vérifie.

Mesures étrangères (ou singulières)

Définition 3.1.8 *Soient μ et ν deux mesures signées sur $(X, \mathcal{M})$. On dit que μ et ν sont étrangères, et l'on écrit $\mu \perp \nu$, s'il existe $A \in \mathcal{M}$ telle que A est μ-nul et A^c est ν-nul.*

Remarque 3.1.9 *Si μ est une mesure positive, alors A est μ-nul signifie que $\mu(A) = 0$.*

Exemple 3.1.10 *Soit μ une mesure signée avec une décomposition de Hahn (P, N) et la décomposition de Jordan (μ^+, μ^-). On a donc $\mu^+ \perp \mu^-$. En effet, puisque P est positive et N négative on a $\mu^+(N) = 0$ et $\mu^-(N^c) = \mu^-(P) = 0$ (voir Théorème 2.1.13).*

Proposition 3.1.11 *Soit m une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et μ, μ_1, μ_2 des mesures signées (μ_1 et μ_2 finies) sur $(X, \mathcal{M})$. On a :*
1) $\mu_1 \perp \mu_2 \Longrightarrow |\mu_1| \perp |\mu_2|$
2) $\mu_1 \perp \mu$ et $\mu_2 \perp \mu \Longrightarrow (\mu_1 + \mu_2) \perp \mu$
3) $\mu_1 \ll m$ et $\mu_2 \ll m \Longrightarrow (\mu_1 + \mu_2) \ll m$
4) $\mu_1 \ll m$ et $\mu_2 \perp m \Longrightarrow \mu_1 \perp \mu_2$
5) Si $\mu \ll m$ et $\mu \perp m$ la mesure μ est nulle.

Preuve. 1) exercice.
2) Il existent $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ tels que A_1, A_2 sont μ-nuls, A_1^c est μ_1-nul et A_2^c est μ_2-nul. Par la Proposition 2.1.7 on voit que la partie $A = A_1 \cup A_2$ est μ-nul. Soit $E \in \mathcal{M}$, $E \subset A^c = A_1^c \cap A_2^c$ alors que $E \subset A_1^c$ et $E \subset A_2^c$ ce qui donne

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) = 0.$$

Donc A^c est $(\mu_1 + \mu_2)$-nul.
3) est simple car si $m(A) = 0$ on a $\mu_1(A) = 0$ et $\mu_2(A) = 0$ donc

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) = 0.$$

4) Si $\mu_2 \perp m$ il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que A est μ_2-nul et $m(A^c) = 0$. Il suffit de montrer que A^c est μ_1-nul. Soit $E \in \mathcal{M}$ avec $E \subset A^c$ donc $m(E) = 0$, comme $\mu_1 \ll m$ on obtient $\mu_1(E) = 0$.
5) Si $\mu \ll m$ et $\mu \perp m$, alors d'après 4) on a $\mu \perp \mu$. Donc il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que A est μ-nul et A^c est μ-nul, ceci implique que pour tout $E \subset A \cup A^c = X$ vérifier $\mu(E) = 0$ et donc μ est nulle. ■

3.2 Le Théorème de Radon-Nikodym

Théorème 3.2.1 *(de Radon-Nikodym)*
Soit m, μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ telles que m est positive σ-finie et μ est signée finie avec $\mu \ll m$. Alors il existe une unique (m-presque par tout) fonction réelle intégrable $f \in L^1(m)$ (f mesurable positive si μ est positive σ-finie), telle que

$$\mu(A) = \int_A hdm, \quad \forall A \in \mathcal{M} \tag{3.3}$$

Dans ce cas on écrit $\mu = f.m$

En général, f se note $\dfrac{d\mu}{dm}$ et on dit que c'est une dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à m.

L'hypothèse de σ-finitude dans le théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2.2 *Posons $m = c$ la mesure de comptage et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesguesur définies sur $\mathbb{R}$. On sait que c n'est pas σ-finie car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On a $\lambda \ll c$ car si $c(A) = 0$ on a $A = \phi$ et $\lambda(\phi) = 0$. Supposons qu'elle existe une fonction $f \in L^1(c)$ telle que*

$$\lambda(A) = \int_A fdc, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} fdc = f(x) \int_{\{x\}} dc = f(x)c(\{x\}) = f(x)$$

on devrait donc avoir $\lambda(A) = \int_A 0dc = 0$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, contradiction. Alors la mesure de Lebesgue n'admet pas une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de comptage.

Proposition 3.2.3 *Soient m, μ et μ' trois mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{M})$ telles que $\mu \ll m$ et $\mu' \ll m$. Alors*

$$\frac{d(\mu + \mu')}{dm} = \frac{d\mu}{dm} + \frac{d\mu'}{dm}, \ m\text{-}p.p$$

Preuve. Posons $f = \dfrac{d\mu}{dm}$ et $g = \dfrac{d\mu'}{dm}$ avec f et g des fonctions mesurables positives. D'après 3) dans la Proposition 3.1.11 on a $\mu + \mu' \ll m$. Alors pour utiliser le Théorème de Radon-Nikodym, il reste à montrer que la mesure positive $\mu + \mu'$ est σ-finie. Il existe $(A_n)_{n\geq 1}, (B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ tels que

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu(A_n) < \infty \\ \mu'(B_n) < \infty \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Pour tout $n, m \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} (\mu + \mu')(A_n \cap B_m) &= \mu(A_n \cap B_m) + \mu'(A_n \cap B_m) \\ &\leq \mu(A_n) + \mu'(B_m) < \infty \end{aligned}$$

et aussi

$$\bigcup_{n,m=1}^{+\infty} (A_n \cap B_m) = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m \right) = X$$

Donc $\mu + \mu'$ est σ-finie.

D'après Radon-Nikodym, il existe une fonction positive mesurable h telle que pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a

$$(\mu + \mu')(A) = \int_A h dm$$

D'autre part

$$(\mu + \mu')(A) = \mu(A) + \mu'(A) = \int_A (f + g) dm$$

Ce qui donne $f + g = h$, m-p.p, d'où

$$\frac{d(\mu + \mu')}{dm} = \frac{d\mu}{dm} + \frac{d\mu'}{dm}, \ m\text{-p.p}$$

■

3.3 Applications du Théorème de Radon-Nikodym

3.3.1 Caractère complet de $M(X)$

$M(X)$ est l'ensemble des mesures signées finies μ sur $(X, \mathcal{M})$. Dans la suite on utilisant le théorème de Radon-Nikodym pour donner une preuve simple du Théorème 2.2.9 dit que $M(X)$ est un espace de Banach muni de la norme variation totale.

Lemme 3.3.1 *Si $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(X, \mathcal{M})$ (i.e. $\mathbb{P}$ est une mesure positive avec $\mathbb{P}(X) = 1$). Alors l'application*

$$\Psi : L^1(\mathbb{P}) \longrightarrow M(X), \quad \Psi(f) = \mu = f.\mathbb{P}$$

est une isométrie linéaire.

Preuve. L'application Ψ est linéaire car pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{P})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\Psi(\alpha f + \beta g)(A) = \int_A (\alpha f + \beta g) d\mathbb{P} = \alpha \int_A f d\mathbb{P} + \beta \int_A g d\mathbb{P} = \alpha\Psi(f)(A) + \beta\Psi(g)(A)$$

D'après l'Exemple 2.2.2, pour tout $f \in L^1(\mathbb{P})$ on a

$$\|\Psi(f)\|_{M(X)} = \|\mu\| = |\mu|(X) = \int_X |f|\, d\mathbb{P} = \|f\|_{L^1(\mathbb{P})}$$

■

Preuve. (de Théorème 2.2.9)

Soit $(\mu_n)_n$ une suite de Cauchy dans $M(X)$. S'il y a une infinité des termes μ_n qui sont nulle, la suite converge vers 0. Sinon, on peut supposer $\mu_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Posons alors

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} |\mu_n|$$

$\mathbb{P}$ est une probabilité car

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} \|\mu_n\| = 1.$$

D'autre part $\mu_n \ll \mathbb{P}$ pour tout $n \geq 1$ car si $A \in \mathcal{M}$ avec $\mathbb{P}(A) = 0$ on a $|\mu_n|(A) = 0$ pour tout $n \geq 1$ ce qui implique que $\mu_n^+(A) = 0$ et $\mu_n^-(A) = 0$ donc $\mu_n(A) = 0$ pour tout $n \geq 1$. D'après le théorème de Radon-Nikodym il existe $f_n \in L^1(\mathbb{P})$ tel que

$$\mu_n(A) = \int_A f_n d\mathbb{P}, \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } A \in \mathcal{M}$$

La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $L^1(\mathbb{P})$ puisque par le lemme précèdent on a

$$\|f_n - f_m\|_{L^1(\mathbb{P})} = \|\Psi(f_n) - \Psi(f_m)\|_{M(X)} = \|\mu_n - \mu_m\|$$

et donc $f_n \longrightarrow f \in L^1(\mathbb{P})$. De nouveau par le lemme précèdent on a $\mu_n \longrightarrow \mu = f.\mathbb{P} \in M(X)$ car

$$\|\mu_n - \mu\| = \|\Psi(f_n) - \Psi(f)\|_{M(X)} = \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{P})} \longrightarrow 0.$$

■

Théorème 3.3.2 *Soit m une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathcal{M})$. Soit $\mathcal{A}_m$, constitué par les mesures signées finies $\mu \in M(X)$ absolument continues par rapport à m c-à-d*

$$\mathcal{A}_m = \{\mu \in M(X) : \mu \ll m\}$$

1) $\mathcal{A}_m$ est un sous espace fermé de $M(X)$

2) Il existe un isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach $L^1(m)$ et l'espace $\mathcal{A}_m$.

Preuve. 1) $\mathcal{A}_m$ est un sous espace vectoriel de $M(X)$ car si $\mu \ll m$ et $\nu \ll m$ alors $\alpha\mu + \beta\nu \ll m$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{A}_m$ convergeant (au sens de la norme de $M(X)$) vers $\mu \in M(X)$ c-à-d

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|\mu_n - \mu\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |\mu_n - \mu|(X) = 0.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}$, la suite réelle $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ converge vers $\mu(A)$ car

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq |\mu_n - \mu|(A) \leq |\mu_n - \mu|(X) \longrightarrow 0$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) = 0$, donc, puisque $\mu_n \ll m$ on a $\mu_n(A) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et alors $\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu_n(A) = 0$, ce qui montre que $\mu \ll m$ d'où $\mu \in \mathcal{A}_m$.
2) Définissons l'application $\Phi : L^1(m) \longrightarrow \mathcal{A}_m$ par $\Phi(f) = \mu = f.m$. Cette application est une isométrie linéaire (voir la preuve du Lemme 3.3.1), Φ est surjective car si $\mu \in \mathcal{A}_m$ on a $\mu \ll m$ et m est σ-finie, alors par le Théorème de Radon-Nikodym il existe $f \in L^1(m)$ telle que $\mu = f.m = \Phi(f)$. ■

3.3.2 Décomposition de Lebesgue d'une mesure signée

Théorème 3.3.3 *Soit m, μ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$ telles que m positive σ-finie et μ est signée finie. Alors il existe un unique couple de mesures signées μ_a et μ_s (positives si μ est positive σ-finie) sur $(X, \mathcal{M})$ telles que*

$$\mu = \mu_a + \mu_s \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} \mu_a \ll m \\ \mu_s \perp m \end{cases} \tag{3.4}$$

De plus on a $\mu_a \perp \mu_s$(d'après 4) de la Proposition 3.1.11.
Le couple (μ_a, μ_s) s'appelle la décomposition de Lebesgue de μ relative à m.

L'exemple suivant montre que l'on ne peut emettre les hypothèses de σ-finitude

Exemple 3.3.4 *Posons $m = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mu = c$ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$. (La mesure c n'est pas σ-finie). Si l'on avait $c = \mu_a + \mu_s$ avec*

$$\begin{cases} \mu_a \ll \lambda \\ \mu_s \perp \lambda \\ \mu_a \perp \mu_s \end{cases}$$

On devrait avoir

$$\mu_a(\{x\}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

car $\mu_a \ll \lambda$ et $\lambda(\{x\}) = 0$. On aurait donc

$$\mu_s(\{x\}) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Puisque $\mu_a \perp \mu_s$, il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu_a(A^c) = 0$ et $\mu_s(A) = 0$, dans ce cas, $A = \phi$ car si $x \in A$ on a

$$\mu_s(A) \geq \mu_s(\{x\}) = 1, \text{ impossible car } \mu_s(A) = 0$$

Il faudrait donc $\mu_a(A^c) = \mu_a(\mathbb{R}) = 0$ d'où la mesure positive μ_a est nulle. Ainsi, on aurait

$$\mu_s = c \perp \lambda$$

Donc il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $c(B) = 0$ et $\lambda(B^c) = 0$. Ce qui implique que $B = \phi$ et $\lambda(\mathbb{R}) = 0$, contradiction, donc la mesure c n'admet pas de décomposition de Lebesgue relative à λ.

3.3.3 Décomposition polaire d'une mesure signée

Lemme 3.3.5 *(Lemme des moyennes)*
Soit m une mesure positive finie sur $(X, \mathcal{M})$ et F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Soit $g \in L^1(m)$ telle que

$$M_A(g) = \left(\frac{1}{m(A)} \int_A g dm \right) \in F,$$

pour tout $A \in \mathcal{M}$ avec $m(A) \neq 0$. Alors

$$g(x) \in F, \quad \text{pour } m\text{-presque par tout } x \in X.$$

Preuve. On va montrer que

$$m(\{x \in X : g(x) \notin F\}) = 0,$$

ceci traduit par $m\left[g^{-1}(F^c)\right] = 0$.
Comme F^c est un ouvert dans $\mathbb{R}$ il est réunion dénombrable d'intervalles ouverts $I_1, I_2, ...$

$$F^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n.$$

On a

$$m\left[g^{-1}(F^c)\right] = m\left[\bigcup_{n=1}^{+\infty} g^{-1}(I_n)\right] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m\left[g^{-1}(I_n)\right]$$

Il suffit donc de démontrer que

$$m\left[g^{-1}(I_n)\right] = 0, \quad \forall n \geq 1$$

Possons $A_n = g^{-1}(I_n)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $j \geq 1$ tel que $m(A_j) \neq 0$, alors par hypothèse $M_{A_j}(g) \in F$ et d'autre part, si $x \in A_j$ on a $g(x) \in I_j =]a_j - r_j, a_j + r_j[$ avec $a_j \in \mathbb{R}$, $r_j > 0$, et donc $|g(x) - a_j| < r_j$. Par intégration on obtient

$$\begin{aligned}
\left|M_{A_j}(g) - a_j\right| &= \left|\frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} (g - a_j) dm\right| \\
&\leq \frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} |g - a_j|\, dm \\
&< \frac{1}{m(A_j)} \int_{A_j} r_j dm = r_j
\end{aligned}$$

Cela signifie que $M_{A_j}(g) \in]a_j - r_j, a_j + r_j[\subset F^c$, d'où $M_{A_j}(g) \in F^c$. On aboutit donc à une contradiction, donc $m(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et le résultat est démontré. ■

Proposition 3.3.6 *Soit μ une mesure signée finie sur $(X, \mathcal{M})$. Il existe une fonction $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que*

$$\begin{cases}
|h(x)| = 1, \quad |\mu| \text{-}p.p \\
et \\
\mu = h.\,|\mu|
\end{cases}$$

Preuve. La mesure positive $|\mu|$ est finie (voir Proposition 2.2.7) et $\mu \ll |\mu|$ (voir l'Exemple 3.1.3). Par le Théorème de Radon-Nikodym il existe $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $\mu = h.\,|\mu|$.
Reste à voir que $|h(x)| = 1$, $|\mu|$-p.p.
Montrons d'abord que $|h| \geq 1$, $|\mu|$-p.p. Pour $r > 0$ on pose $A_r = \{x \in X : |h(x)| < r\}$.
Par définition on a

$$|\mu|(A_r) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu(B_n)| : (B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M} \text{ partition de } A_r\right\}$$

Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une partition de A_r,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}|\mu(B_n)| &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\int_{B_n} hd\,|\mu|\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{B_n}|h|\,d\,|\mu| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{B_n} rd\,|\mu| = r\sum_{n=1}^{+\infty}|\mu|\,(B_n),\ (\text{car } B_n\subset A_r) \\ &= r\,|\mu|\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right) = r\,|\mu|\,(A_r)\end{aligned}$$

l'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty}|\mu(B_n)|\leq r\,|\mu|\,(A_r)$ valable pour tout partition $(B_n)_{n\geq 1}$ de A_r, on en déduit

$$|\mu|\,(A_r)\leq r\,|\mu|\,(A_r)$$

Si $r<1$, ceci implique que $|\mu|\,(A_r)=|\mu|\,\{|h|<r\}=0$, alors $|\mu|\,\{|h|<1\}=0$. Ainsi $|h|\geq 1$, $|\mu|$-p.p.

D'un autre côté, si $\mu(A)\neq 0$ on a

$$|M_A(h)|=\left|\frac{1}{|\mu|\,(A)}\int_A hd\mu\right|=\frac{1}{|\mu|\,(A)}\,|\mu(A)|\leq\frac{1}{|\mu|\,(A)}\,|\mu|\,(A)=1$$

On peut donc utiliser le lemme des moyennes (où $[-1,1]$ remplace F), et en conclure que $|h|\leq 1$, $|\mu|$-p.p. ■

3.4 Exercices de chapitre 3

Exercice 3.1

Soit X un ensemble dénombrable et soit $\nu=\delta_a-3\delta_b$ où δ_a et δ_b sont les mesures de Dirac au points $a,b\in X$ avec $a\neq b$.

1) Montrer que la mesure signée ν admet une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure comptage μ_c sur $\mathcal{P}(X)$. Déterminer $\dfrac{d\nu}{d\mu_c}$

2) Soit $d\in X$, avec $d\neq a$ et $d\neq b$.

A) Montrer que ν n'est pas absolument continue par rapport à δ_d

B) Démontrer qu'il n'existe aucune fonction mesurable $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifier

$$\nu(A) = \int_A h d\delta_d, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{P}(X).$$

Solution 3.1

1) La mesure positive μ_c est σ-finie car X est dénombrable, en effet

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{a_n\} \quad \text{et} \quad \mu_c(\{a_n\}) = 1 < \infty, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

La mesure signée ν est finie car pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ on a

$$|\nu(A)| \leq \delta_a(A) + 3\delta_b(A) \leq 4.$$

On a aussi $\nu \ll \mu_c$ car si $A \in \mathcal{P}(X)$ avec $\mu_c(A) = 0$ on a $A = \phi$ et alors $\nu(A) = \nu(\phi) = 0$
D'après le Théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction $f \in L^1(\mu_c)$ telle que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu_c$$

En particulier, pour $A = \{x\}$, $x \in X$, d'une part on a

$$\nu(\{x\}) = \delta_a(\{x\}) - 3\delta_b(\{x\}) = \chi_{\{a\}}(x) - 3\chi_{\{b\}}(x)$$

D'autre part on a

$$\nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu_c = f(x) \int_{\{x\}} d\mu_c = f(x)$$

Ce qui montre que

$$\frac{d\nu}{d\mu_c} = f = \chi_{\{a\}} - 3\chi_{\{b\}}$$

2) A) Si on pose $A = \{a\}$ on trouve

$$\delta_d(\{a\}) = 0 \quad \text{mais} \quad \nu(\{a\}) = 1$$

B) Supposons qu'il existe $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifier $\nu(A) = \int_A h d\delta_d$. Pour $A = \{a\}$ on obtient

$$1 = \nu(\{a\}) = \int_{\{a\}} h d\delta_d = h(a)\delta_d(\{a\}) = 0$$

Ceci une contradiction.

Exercice 3.2

Soient η, μ et ν trois mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{M})$.

Montrer que si $\eta \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$ alors $\eta \ll \nu$ et

$$\frac{d\eta}{d\nu} = \frac{d\eta}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}, \ \nu\text{-p.p}$$

Solution 3.2

Soit $A \in \mathcal{M}$ avec $\nu(A) = 0$, alors $\mu(A) = 0$ (car $\mu \ll \nu$) et donc $\eta(A) = 0$ (car $\eta \ll \mu$). Ce qui montre que $\eta \ll \nu$.

Par le Théorème de Radon-Nikodym il existe trois fonctions mesurables positives

$$f = \frac{d\eta}{d\mu}, \quad g = \frac{d\mu}{d\nu}, \quad h = \frac{d\eta}{d\nu}$$

C-à-d pour tout $A \in \mathcal{M}$

$$\eta(A) = \int_A f d\mu, \quad \mu(A) = \int_A g d\nu, \quad \eta(A) = \int_A h d\nu$$

l'intégration par rapport à la mesure μ à densité g donne

$$\eta(A) = \int_A f d\mu = \int_A f g \nu$$

L'égalité $\int_A h d\nu = \int_A f g \nu$ implique que $h = fg$, ν-p.p d'où le résultat.

Exercice 3.3

Soit μ une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathcal{M})$ et soit E, F deux éléments de $\mathcal{M}$. On définit μ_E sur $\mathcal{M}$ par

$$\mu_E(A) = \mu(E \cap A), \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}$$

1) Montrer que μ_E une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$ et qu'elle vérifie $\mu_E \ll \mu$.
Calculer $\dfrac{d\mu_E}{d\mu}$.
2) Montrer que $\mu_E \ll \mu_F$ si et seulement si $\mu(E \backslash F) = 0$.

Solution 3.3

1) $\mu_E(\phi) = \mu(E \cap \phi) = \mu(\phi) = 0$. La σ-additivité résulte immédiatement de celle de μ. Soit $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) = 0$. D'après la monotonie de la mesure positive on a

$$\mu_E(A) = \mu(E \cap A) \leq \mu(A) = 0$$

d'où $\mu_E(A) = 0$. Ce qui donne $\mu_E \ll \mu$.
D'après le Théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction h mesurable positive unique μ-presque par tout telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad \mu_E(A) = \int_A h d\mu$$

D'autre part

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad \mu_E(A) = \mu(E \cap A) = \int_{E \cap A} d\mu = \int_A \chi_E d\mu$$

Donc $\dfrac{d\mu_E}{d\mu} = h = \chi_E$, μ-p.p, comme il résulte de l'égalité $\int_A h d\mu = \int_A \chi_E d\mu$.
2) $\Longrightarrow$) Supposons que $\mu_E \ll \mu_F$, puisque $\mu(E \backslash F) = \mu(E \cap F^C) = \mu_E(F^C)$, il suffit de montrer que $\mu_F(F^C) = 0$ et ceci clair car

$$\mu_F(F^C) = \mu(F \cap F^C) = \mu(\phi) = 0$$

$\Longleftarrow$) Supposons que $\mu(E \backslash F) = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu_F(A) = 0$. D'autre part

$$A = A \cap X = A \cap (F \cup F^C) = (A \cap F) \cup (A \cap F^C)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mu_E(A) &= \mu_E(A \cap F) + \mu_E(A \cap F^C) \\
&= \mu(A \cap F \cap E) + \mu(A \cap F^C \cap E) \\
&\leq \mu(A \cap F) + \mu(F^C \cap E) \\
&= \mu_F(A) + \mu(E \backslash F) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\mu_E(A) = 0$.

Exercice 3.4

Soient m, μ et ν trois mesures positives σ-finies sur $(X, \mathcal{M})$ telles que

$$\mu(A) = \int_A g dm, \quad \nu(A) = \int_A f dm, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}$$

où f et g sont deux fonctions mesurables positives vérifiant

$$m(\{fg > 0\}) \neq 0, \quad \text{et} \quad \{f = 0\} \subset \{g > 0\}$$

1) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{M}$ avec $B \subset P = \{fg > 0\}$ on a

$$m(B) = \int_B \frac{1}{g} d\mu$$

2) Montrer que la décomposition de Lebesgue de la mesure ν par rapport à μ est donnée par les mesures ν_0 et ν_1 avec

$$\nu_0(A) = \int_A \frac{f}{g} \chi_P d\mu, \quad \nu_1(A) = \nu(A \cap G^C), \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}$$

où $G = \{g > 0\}$.

Solution 3.4

1) Puisque $g \neq 0$ sur B, l'intégration par rapport à la mesure μ à densité g donne

$$m(B) = \int_B dm = \int_B \frac{1}{g} g dm = \int_B \frac{1}{g} d\mu$$

2) D'après le théorème de décomposition de Lebesgue, il suffit de montrer que

$$\nu = \nu_0 + \nu_1, \quad \nu_0 \ll \mu \text{ et } \quad \nu_1 \perp \mu$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\begin{aligned}
\nu_0(A) + \nu_1(A) &= \int_A \frac{f}{g}\chi_P d\mu + \int_{A\cap G^C} f dm \\
&= \int_A f\chi_P dm + \int_{A\cap G^C} f dm \\
&= \int_{A\cap P} f dm + \int_{A\cap G^C} f dm \\
&= \int_{A\cap P} f dm + \int_{A\cap p^C} f dm, \quad (\text{car } A\cap G^C = A\cap p^C) \\
&= \int_A f dm, \quad (\text{car } (A\cap P)\cup(A\cap p^C)) \\
&= \nu(A)
\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu(A) = 0$, alors $\mu(A\cap P) = 0$ car $A\cap P \subset A$ et donc

$$\nu_0(A) = \int_A \frac{f}{g}\chi_P d\mu = \int_{A\cap P} \frac{f}{g} d\mu = 0.$$

Ce qui montre que $\nu_0 \ll \mu$. D'autre part

$$\nu_1(G) = \nu(G\cap G^C) = \nu(\phi) = 0.$$

Et aussi

$$\mu(G^C) = \int_{G^C} gdm = \int_{\{g=0\}} gdm = 0$$

Ce qui montre que $\nu_1 \perp \mu$.

Exercice 3.5

Soient $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré positive σ-fini, $A, B, C \in \mathcal{M}$ avec $m(A), m(B) < \infty$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha\beta \neq 0$.

Soit μ la mesure signée définie sur $(X, \mathcal{M})$ par

$$\mu(E) = \alpha.m(A\cap E) + \beta.m(B\cap E), \quad E \in \mathcal{M}$$

Soit η une autre mesure positive définie sur $(X, \mathcal{M})$ par

$$\eta(E) = m(C\cap E), \quad E \in \mathcal{M}$$

1) Déterminer $\frac{d\mu}{dm}$, la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à m.

2) Supossons que $m\left[(A \cup B)\backslash C\right] = 0$

a) Montrer que pour tout $E \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(E) = \alpha.m(E \cap A \cap C) + \beta.m(E \cap B \cap C)$$

b) Déduire que μ est absolument continue par rapport a η

c) Déterminer $\frac{d\mu}{d\eta}$, la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à η.

Chapitre 4

Mesure de Radon

Bibliographie

[1] V. I. Bogachev, Measure theory (Volume I), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[2] A. Bouziad et J. Calbrix, Théorie de la Mesure et de l'intégration, 185. Puli. univ. Rounen, 1993.

[3] H. Brezis, functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[4] T. Gallay, Théorie de la Mesure et de l'intégration, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.

[5] J. Genet, Mesure et intégration (théorie élémentaire), Vuibert 1976.

[6] R. Godement, Analyse mathématique IV : Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

[7] P. R. Halmos, Measure theory, Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[8] B. Hauchecorne, Les contres exemple en Mathématiques, Ellipses Edition Marketing S.A., 2007.

[9] H. König, Measure and integration (An advanced course in basic procedures and applications), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[10] V. Komornik, Précis d'analyse réelle : Analyse fonctionnelle, Intégrale de Lebesgue, Espaces fonctionnels, Ellipses Édition Marketing S.A., 2002.

[11] P. Krée, Intégration et théorie de la Mesure : une approche géométrique, ellipses édition marketing S.A., 1997.

[12] E. Laamri, Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourrier des fonctions, Sciences Sup, Dunod, 2007.

[13] L. Meziani, Mesure et intégration, Université d'Alger, 1977-78.

[14] W. Rudin, Real and Complex Analysis (Third Edition), McGraw-Hill, Inc., 1987.

[15] C. Suquet, I.F.P. Cours de l'année 2003-2004, http ://math.univ-lille1.fr/suquet/ens/IFP/Cours/cours04/CoursIFP04.html

[16] C. Swartz, Measure, integration and function spaces, World scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1994.

[17] A. J. Weir, Lebesgue integration and measure, Cambridge university Press, 1973

[18] J. Yeh, Real analysis (theory of measure and integration), 2nd edition, World scientific publishing, London, 2006.