Corrigé type " Série n = II" Algèbre II

EX01

f est dite linéaire SSI

$$\begin{cases} 1/\ \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 : f(X_1+X_2) = f(X_1)+f(X_2). \\ 2/\ \forall X_1 \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha X_1) = \alpha f(X_1). \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha X_1+\beta X_2) = \alpha f(X_1) + \beta f(X_2).$

- Il s'agit de trouver $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$f(x,y,z) = f(xe_1+ye_2+ze_3) \underset{\text{linéaire}}{\overset{f}{=\!=}} x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3).$$

$$= (5x-y+2z, -x+5y+2z, 2x+2y+2z).$$

EX02

1/ Soient $u=(x,y,z)$; $v=(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(\alpha u+\beta v) = f(\alpha x+\beta\bar{x}, \alpha y+\beta\bar{y}, \alpha z+\beta\bar{z}).$$

$$= (-(\alpha x+\beta\bar{x}) + \alpha y+\beta\bar{y} + \alpha z+\beta\bar{z}, \alpha x+\beta\bar{x} - (\alpha y+\beta\bar{y}) + \alpha z+\beta\bar{z}).$$

$$= (-\alpha x+\alpha y+\alpha z, \alpha x-\alpha y+\alpha z) + (-\beta\bar{x}+\beta\bar{y}+\beta\bar{z}, \beta\bar{x}-\beta\bar{y}+\beta\bar{z}).$$

$$= \alpha(-x+y+z, x-y+z) + \beta(-\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}, \bar{x}-\bar{y}+\bar{z}).$$

$$= \alpha f(x,y,z) + \beta f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Donc, f est linéaire.

- g est linéaire (Supplémentaire).

2/ $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \wedge z = 0\}$

$= \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle \{a=(1,1,0)\} \rangle.$

$\mathrm{Im}(f) = \{f(x,y,z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(-x+y)(1,-1) + z(1,1), x,y,z \in \mathbb{R}\}.$

$= \langle \{b=(1,-1); c=(1,1)\} \rangle.$

$\ker(g) = \{(0,0)\}.$

$\mathrm{Im}(g) = \{y(1,0,1) + x(0,1,1), x,y \in \mathbb{R}\} = \langle \{a_1=(1,0,1); a_2=(0,1,1)\} \rangle.$

- $\dim \ker(f) = 1$ puisque $\{a\}$ est libre.
- $\dim \mathrm{Im}(f) = rg(f) = 2$ puisque $\{b, c\}$ est libre.

Oubien : D'après le Théorème du rang :

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + rg(f) = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

- $\dim \ker(g) = 0$.
- $\dim \mathrm{Im}(g) = 2$.

3/ f est injective $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow \dim \mathbb{R}^3 = rg(f)$. [Théorème].

On a $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq rg(f) = 2$. Donc, f n'est pas injective.

(ou bien, $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc f n'est pas injective).

- f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow rg(f) = \dim \mathbb{R}^2$. [Théorème].

On a $rg(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Alors, f est surjective.

- g est injective car $\ker(g) = \{(0,0)\}$.
- g n'est pas surjective, car $rg(g) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$.

4/ $$f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto f(g(x,y)) = (2x, 2y).$$

5/ On a $(f \circ g)(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y)$. On remarque alors que :

$$f \circ g = 2\, Id_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2} f\right) \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}.$$

Donc, il existe $h = \frac{1}{2} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$h \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}.$$

Exercice 3 :

1) i) Pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]$, alors $P' = a_1 + 2a_2X$ et $P'' = 2a_2$, d'où $f(P) = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2$. C'est à dire $a_0 = a_1 - a_2$

ii) f un endomorphisme si et seulement si f est une application linéaire (morphisme) de $IR_2[X]$ dans lui-même, i.e $\forall P \in IR_2[X]: f(P) \in IR_2[X] \Leftrightarrow \deg(f(P)) \leq 2$?

On a f est une application linéaire

D'autre part, $f(P) = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2$, donc $\deg(f(P)) \leq 2$ puisque $a_2 \in IR$, par conséquent f est un endomorphisme de $IR_2[X]$.

2) On sait que $f \circ f = f \Leftrightarrow \forall P \in IR_2[X]: (f \circ f)(P) = f(P)$

On a $f(P) = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2$. C'est à dire $a_0 = a_1 - a_2$, alors

$(f \circ f)(P) = f(f(P)) = f(a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2) = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2$

Alors $f \circ f = f$

3) L e noyau de f est défini par

$\ker(f) = \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]: f(P) = 0_{IR_2[X]}\}$

$= \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]: a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2 = 0 = 0.1 + 0.X + 0.x^2\}$

$= \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]: a_1 = a_2 = 0\}$

$= \{P = a_0, a_0 \in IR\} = < G_0 = 1 >$

Est un sous espace vectoriel de $IR_2[X]$ engendré par $L_1 = \{G_0 = 1\}$ de plus elle est une base de $\ker(f)$.

D'autre part,

$\mathrm{Im}(f) = \{f(P), P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]\} = \{a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2 / a_1, a_2 \in IR\}$

$= \{a_1(1 + X) + a_2(X^2 - 1) / a_1, a_2 \in IR\} = < \{G_1 = X + 1, G_2 = X^2 - 1\} >$

Un sous espace vectoriel de $IR_2[X]$ engendré par $L_2 = \{G_1 = X + 1, G_2 = X^2 - 1\}$ de plus elle est libre, donc elle forme une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4) $\dim_{IR} \ker(f) = Card(L_1) = 1$ et $\dim_{IR} \mathrm{Im}(f) = Card(L_2) = 2$

5) On montre que $IR_2[X] = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ en deux étapes :

$$\begin{cases} i)\,\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_{IR_2[X]}\} \\ ii)\,IR_2[X] = \mathrm{Im}(f) + \ker(f) \end{cases}$$

i)

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]$ tel que $P \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$, alors

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow P = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2 \Rightarrow a_0 = a_1 - a_2$

et

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \ker(f) \Rightarrow P = a_0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

En déduit que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, ainsi $P = 0$, donc $P \in \{0_{IR_2[X]}\}$

On obtient que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) \subset \{0_{IR_2[X]}\}$

L'autre inclusion étant toujours vérifiée, on aura $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_{IR_2[X]}\}$

ii) Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X]$, on peut écrire $\begin{aligned} P &= (a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2) + (a_0 - a_1 + a_2) \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned}$

Où $P_1 = a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2 \in \mathrm{Im}(f)$ et $P_2 = a_0 - a_1 + a_2 \in \ker(f)$, on a donc $IR_2[X] \subset \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

L'autre inclusion étant évident puisque $\mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ est un sous espace vectoriel de $IR_2[X]$, on conclut que $IR_2[X] = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.