Université Mohamed Boudiaf - Msila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Socle Commun MI
Année Universitaire 2021/2022

Module : **Algèbre 02**

(Série d'exercices N° 3)

Exercice n°1 :
On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ et la matrice d'identité } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $A = I_2 + 4B$.
2. Calculer A^2, B^2, A^t, B^t, $Tr(A)$, $Tr(B)$.
3. Calculer la matrice $-A^2 + 2A - I_2$.
4. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $A^n = I_2 + 4nB$.

Exercice 02. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application telle que:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x - y, 2y, x + 3y)$$

1°) Montrer que f est linéaire.

2°) Déterminer $\ker(f)$

3°) Est ce que f est surjective.

I- Soient $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et
$\mathcal{B}' = \{v_1' = (1,0,0), v_2' = (0,1,0), v_3' = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1°) Déterminer la matrice associée à f de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ($A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$).

II- Soient $\mathcal{B}_1 = \{w_1 = (1,3), w_2 = (2,5)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ et
$\mathcal{B}_1' = \{w_1' = (0,1,1), w_2' = (1,0,1), w_3' = (1,1,0)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

1°) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ ($Q = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2})$)

2°) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1'$ à $\mathcal{B}'$ ($P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_1'}(Id_{\mathbb{R}^3})$).

3°) Déterminer la matrice $B = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'}(f)$.

Exercice 03. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) Est ce que A et B sont inversibles.

2°) Si oui calculer l'inverse.

Exercice 04. Soit $D_n(x) \in M_n(\mathbb{K})$ tel que

$$D_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{pmatrix}$$