CHAP 03 Méthodes d'analyse

Etude temporelle des systèmes linéaires du 1^er^ et 2^ème^ ordre

* Analyse temporelle :

L'analyse temporelle a pour objectif d'analyser l'étude d'un sys dans le domaine temporelle a pour objectif d'analyser sa réponse $s(t)$ lorsqu'il sous mis à une entrée $e(t)$.

soit

$$E(p) \longrightarrow \boxed{F(p)} \longrightarrow S(p)$$

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad ; \quad S(p) = F(p) \cdot E(p).$$

* si $e(t) = \delta(t)$ impulsion de Dirac.

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \Rightarrow E(p) = 1.$$

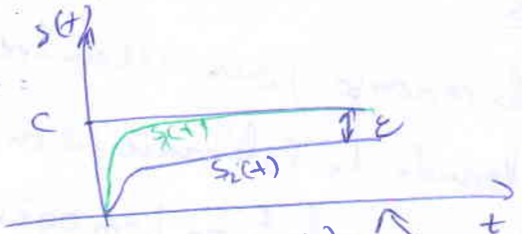
$$S(p) = F(p) \Rightarrow s(t) = T\mathcal{L}^{-1}[F(p)].$$

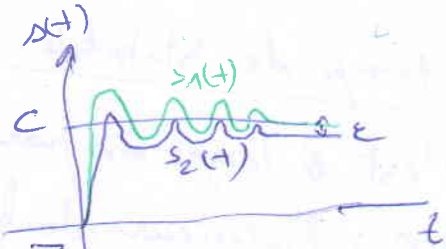
conclusion

* La Réponse impulsionnelle d'un sys linéaire continue et la $T.\mathcal{L}^{-1}$ inverse de sa fonction de transfert.

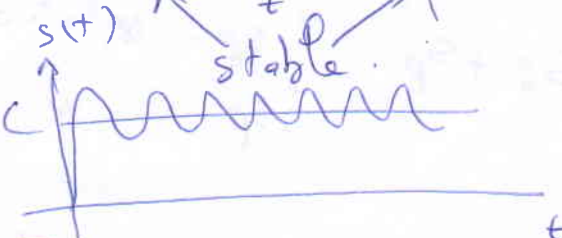
$$\text{si } e(t) = C \cdot u(t) = \begin{cases} C & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

* Régime Transitoire $s(t)$.

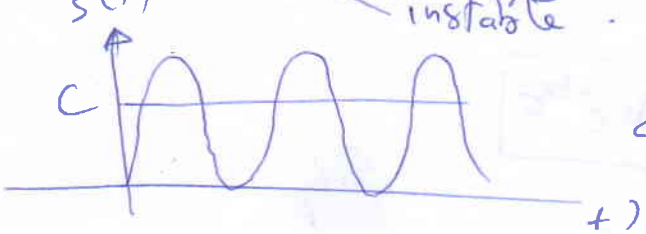




stable.



instable.



le sys est juste oscillant.

Exp : soit le sys suivant. $\xrightarrow{E(p)} \boxed{F(p)} \xrightarrow{S(p)}$

$$F(p) = \frac{0,5}{1+\tau p} \quad ; \quad E(p) = \frac{c}{p}.$$

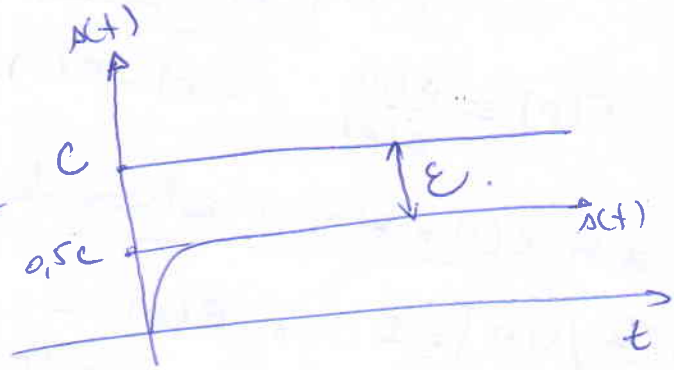
donner la réponse du système :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow S(p) = F(p).E(p)$$
$$= \frac{0,5}{1+\tau p} \cdot \frac{c}{p} = \frac{0,5\,c}{(1+\tau p)p}.$$

la réponse s(t) du sys est à ∞ :

théorème de la valeur final (réponse permanente)

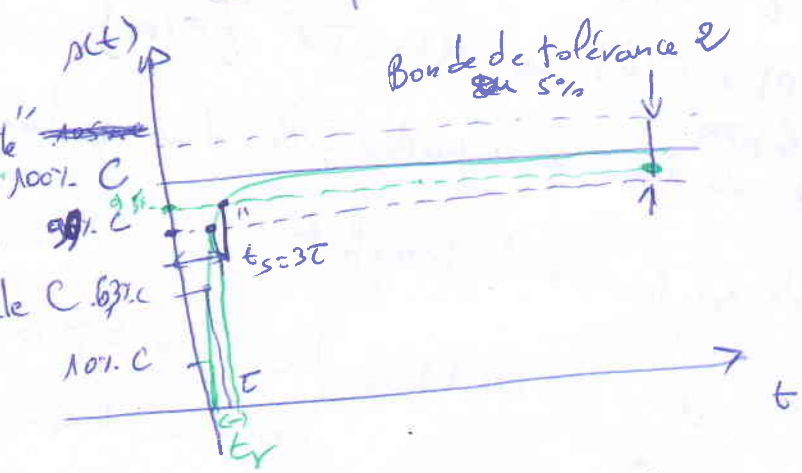
$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{p \to 0} p\,S(p)$$
$$= \lim_{p \to 0} \cancel{p} \cdot \frac{0,5.c}{(1+\tau p)\cancel{p}} = 0,5\,c.$$



plus on augmente le gain K plus que l'erreur diminue.

2// Système du 1er ordre :

a)) temps de Réponse t_r = "temps de monté" : c'est le temps mis par la réponse pour aller de 10% à 90% de ~~la~~ sa valeur finale C.



b)) temps de stabilité : t_s.

c'est le temps mis par la réponse pour atteindre et sur tout pour rester à l'interieur de la bande de Tolérance (2 ou 5%)

$$s(t) = S_h + S_p$$

" S_h " : solution homogène
" S_p " " particulaire.

Exemple :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$S_h \Rightarrow e(t) = 0. \Rightarrow \boxed{S_h = A\,e^{-t/\tau}}$$

s_p : $e(t) \neq 0$ (réponse permanante cte) au régime permanant

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \Rightarrow s(t) = e(t) \Rightarrow \boxed{s_p = e(t).}$$

$$s(t) = s_h + s_p = A e^{-\frac{t}{\tau}} + e(t)$$

A à déterminer des C.I = 0.

$$s(0) = 0 = A e^{-\frac{t}{\tau}} + e(t) = 0 \Rightarrow \boxed{A = -e(t)}$$

$$\boxed{s(t) = e(t)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]}$$

* Régime permanent :

Le régime permanent est obtenue lorsque : $|s_f - s(t)| < 5\% \, s_f$.

$t = t_s$.

s_f : la sortie finale (réponse finale).

$s(t)$: sortie en "cours" réponse actuelle.

Donc : $s_f = e(t)$

On a : $s_f - s(t) < 5\% \, s_f$.

$$e(t) - e(t)\left[1 - e^{-t/\tau}\right] < 5\% \, e(t).$$

$$\cancel{e} - \cancel{e} + \cancel{e} \cdot e^{-t/\tau} < 5\% \, \cancel{e}.$$

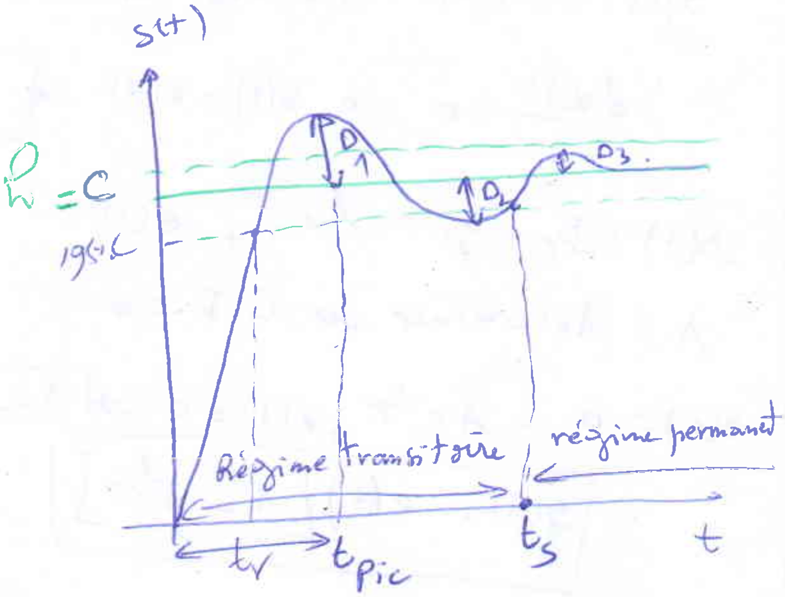
$$e^{-t/\tau} < 5\% \Rightarrow \ln\left(e^{-t/\tau}\right) < \ln 5\%.$$

$$-t_s/\tau < -2{,}995.$$

$$\Rightarrow \boxed{t_s \simeq 3\tau}$$

3// Système du 2ème ordre :

* Dépassement Max D_{max} (%)



c'est la différence maximale existante entre le régime transitoire et le régime permanent.

$$D_{max}(\%) = \frac{D_1}{C} \cdot 100.$$

il est donné également par :

$$\boxed{D_{max}(\%) = 100\, e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}}$$ ξ : Coefficient d'amortissement.

Il permet de savoir si le système atteint ou dépasse l'amplitude maximale admise sur la sortie.

pour un échelon d'hauteur h.

$$s(t) = h + \frac{h}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t} \sin\Big(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \underbrace{tg^{-1}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi}}}_{\alpha}\Big)$$

ω_n : pulsation naturel. $\omega_n = 2\pi f$.

Temps de réponse : c'est le temps mis par la réponse pour monter de 0 à h.

$$\Rightarrow s(t) = h \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t_r + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_r = \frac{-\alpha}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$ pour un ξ donné $\boxed{t_r \simeq \frac{1}{\omega_n}}$

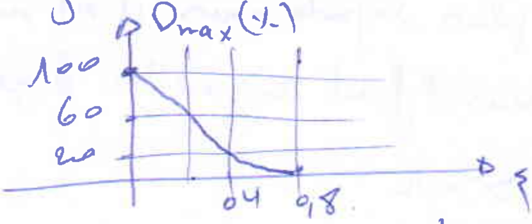
Temps de Pic t_{pic} :

$$t_p \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = 0 ; \quad \frac{ds(t)}{dt} = \frac{\omega_n h\, e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t_{pic} = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$$

$$\boxed{t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On a choisi l'angle π parce que dans cet interval il y a le pic maximal par contre de π il y a l'amortissement de ce pic et il y a le régime permanent



les oscillations sont dûes uniquement par ξ.

Si $\xi \nearrow \Rightarrow D_{max}(\%) \searrow$

Temps de stabilité t_s :

Réponse à l'intérieur de la bande de tolérance 2 ou 5 %.

$$\frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0,05.$$

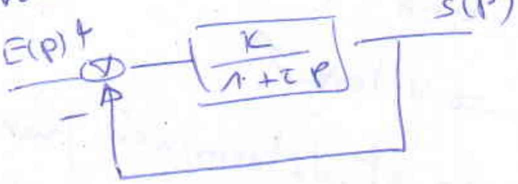
sachant que $e^{-3} = 0,05 \Rightarrow$ Approximation.

$\xi \omega_n t \geq 3. \Rightarrow \boxed{t_s \geq \frac{3}{\xi \omega_n}}$

~~Remarque~~ : EXP

* syst du 1er ordre en fonction du gain K et la constante de temps τ.

Soit le sys Asservis suivant :



$H(P) = 1$

$T(P) = G(P) . H(P)$

$= \frac{K}{1+\tau P}$

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{\frac{K}{1+\tau P}}{1 + \frac{K}{1+\tau P}} = \frac{K}{1+\tau P + K}$$

on divise par $1+K$.

$$F(P) = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{\tau}{1+K} P} \; ; \; K' = \frac{K}{1+K} \; ; \; \tau' = \frac{\tau}{1+K}$$

$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} \Rightarrow S(P) = F(P) . E(P) \leftarrow$ Echelon.

$S(P) = \frac{K'}{1+\tau' P} \cdot \frac{1}{P}$ Régime permanent.

$S(\infty) = \lim_{P \to 0} P[S(P)] = K' \Rightarrow \boxed{S(\infty) = K'}$

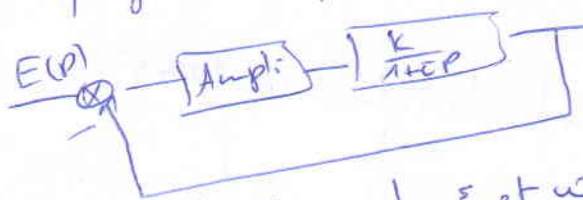
Si $K=1 \Rightarrow S(\infty) = \frac{K}{K+1} = \frac{1}{2}$; $\tau' = \frac{\tau}{K+1} = \frac{\tau}{2}$; $t_s = \frac{3}{2}\tau$

$t_s = 3\tau'$.

On remarque que le système est plus rapide mais il est moins précis et pour que le sys soit plus précis il faut augmenter le gain k' pour tendre $k' \to 1$ il faut que $K >> 1$

Si $K=10 \Rightarrow k'^{*} = \frac{10}{11} = 0,9$.

on ajoute un amplificateur pour augmenter le gain K.



Syst 2ème ordre en fonction de ξ et ω_n.

ξ = coefficiant d'amortissement.

ω_n : pulsation naturelle.

* la vitesse de la réponse est gouvernée par ω_n.

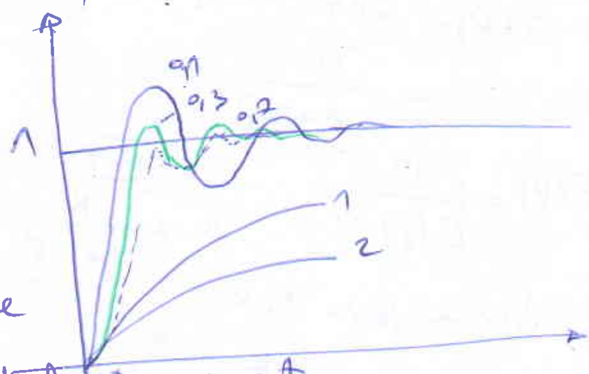
exp : pour $\omega_n t = 2$.

si $\omega_n = 0,1 \Rightarrow t = 20\,s$

si $\omega_n = 10 \to t = 0,2\,s$

donc ; plus que $\nearrow \omega_n \Rightarrow$ vitesse $\nearrow$.

* La forme du réponse st déterminée par ξ comme il est illustré sur la figure suivante.



Pour $\xi < 0,4$; Dépassement et oscillations sont excessives

* pour $\xi > 1 \Rightarrow$ temps considérable pour que la réponse atteindre des nouvelles conditions de fonctionnement. vitess lenteur.

$\boxed{0,4 < \xi < 1}$

$\xi = 0$: sys à limite de stabilité

$\xi < 1$ ~ instable.

Si $\xi < 0,4$: sys très oscillant.

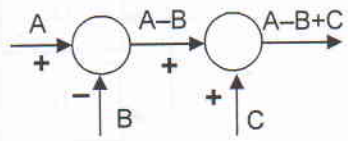
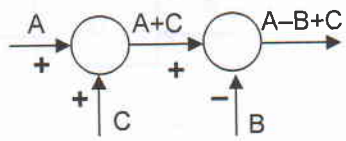
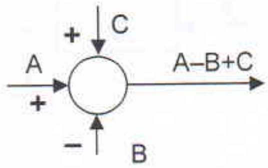
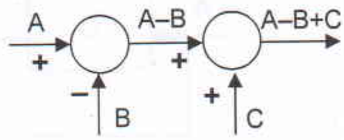
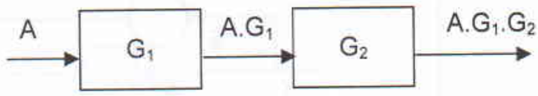
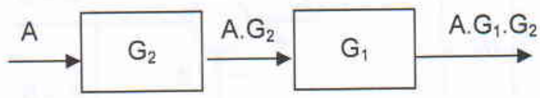
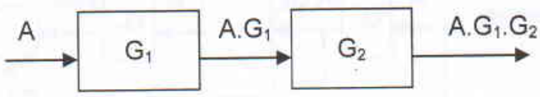
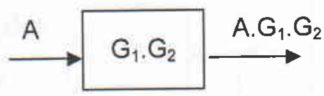
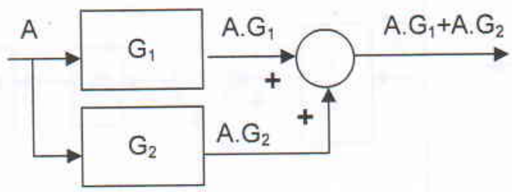
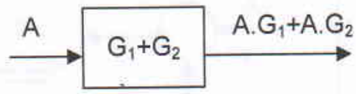
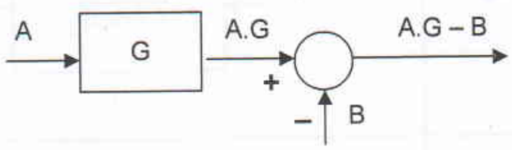
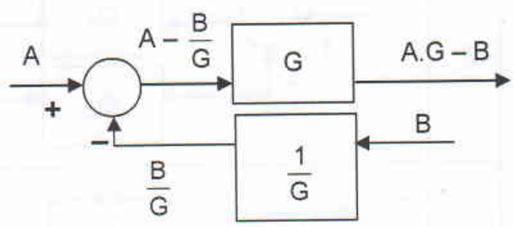
$\xi > 1$ ~ très lent

Syst d'ordre supérieur en fonction des pôles et des zéros

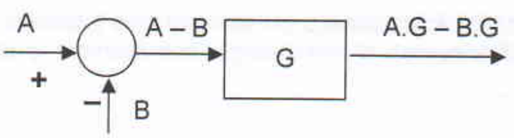
Remarque : ξ et ω_n décrivent le comportement transitoire.

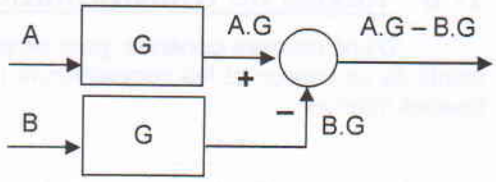
2- 8 - Règles de transformation des schémas fonctionnels

D'une manière générale, pour simplifier un bloc fonctionnel il est souvent plus judicieux de déplacer les points de connexion et les comparateurs (ou additionneurs), d'inter-changer ces derniers, puis de réduire les boucles internes.

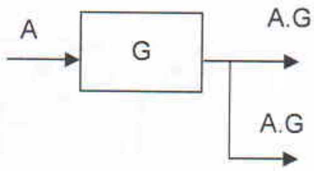
	Schéma fonctionnel original	*Schéma fonctionnel équivalent*
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

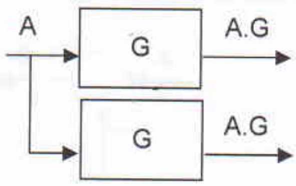
7.



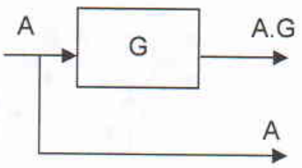


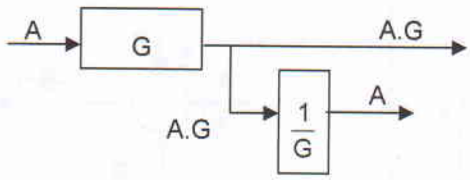
8.



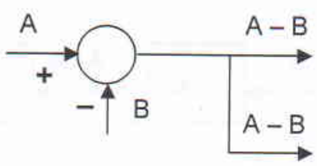


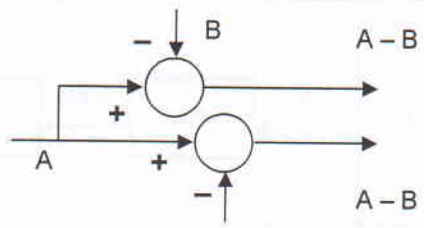
9.



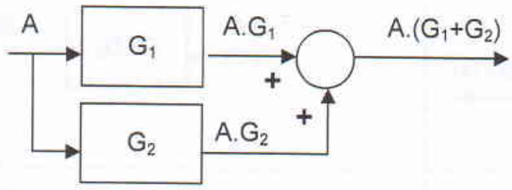


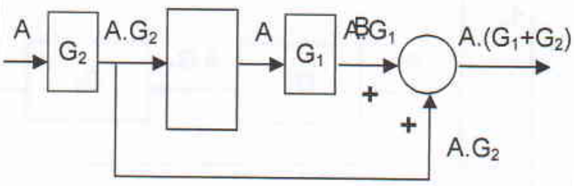
10.



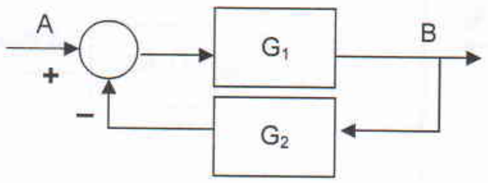


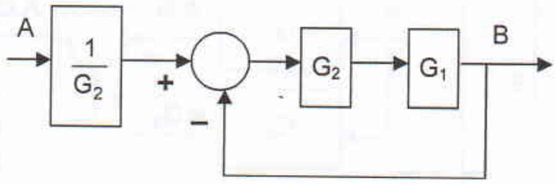
11.



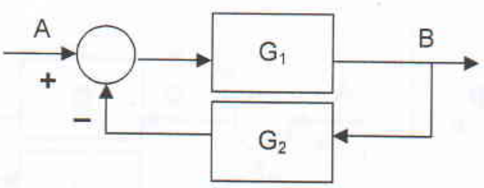


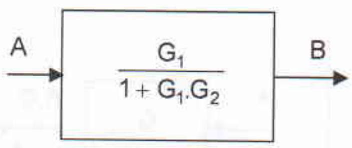
12.



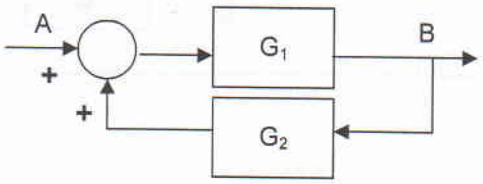


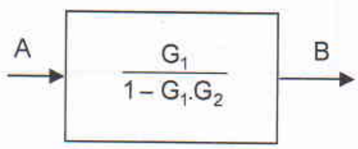
13.



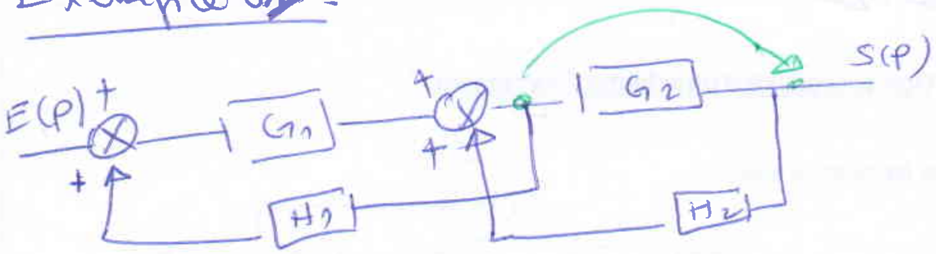


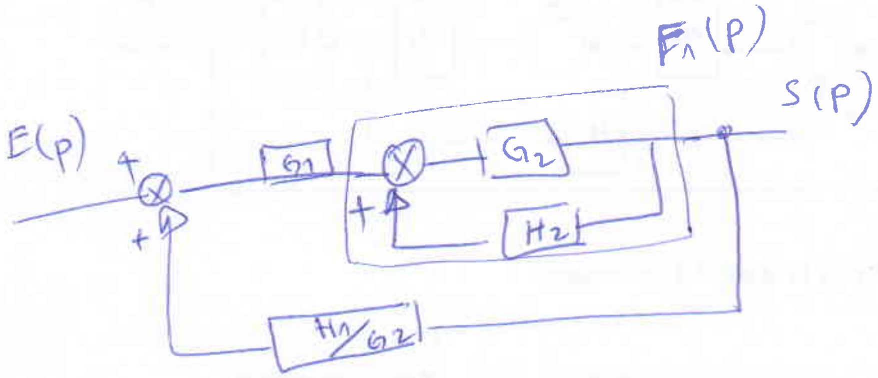
14.



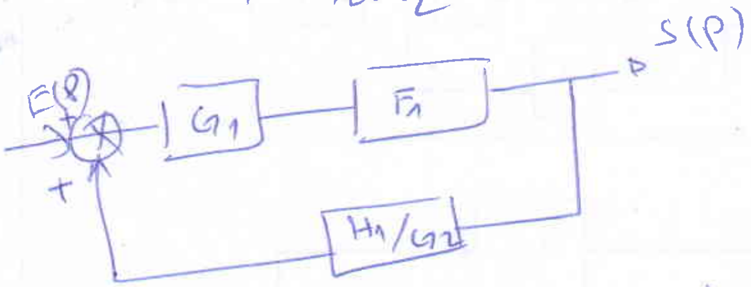


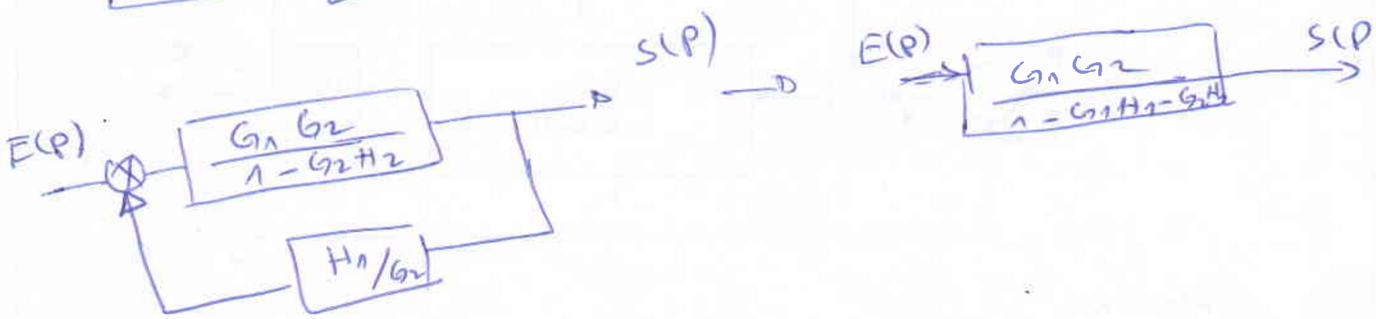
Exemple 01 :





$$F_1(p) = \frac{G_2}{1 - G_2 H_2}$$

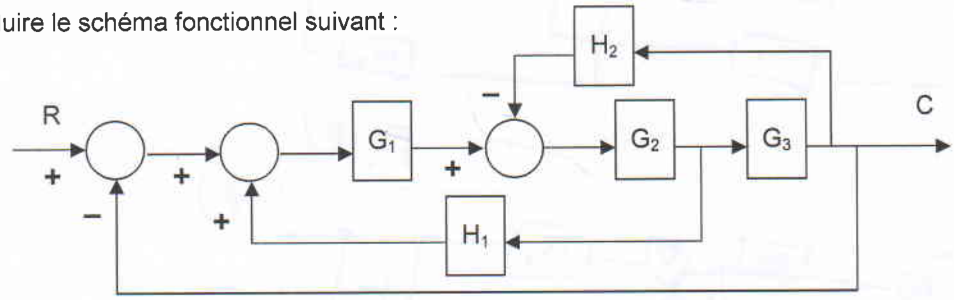




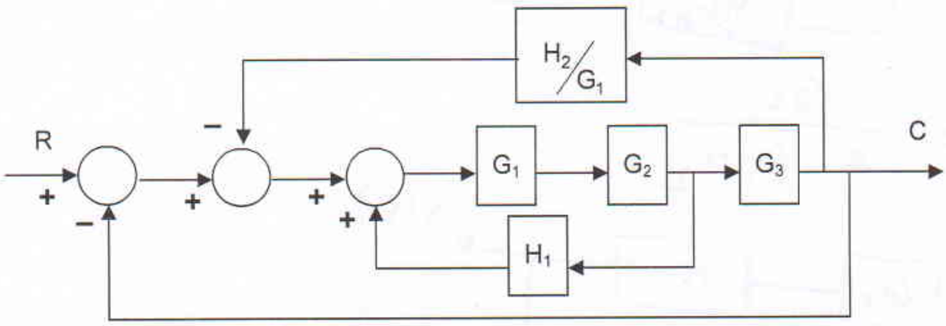
Exemple 02

2- ~~8.1.a~~ - *Exemple de réduction successive d'un schéma fonctionnel*

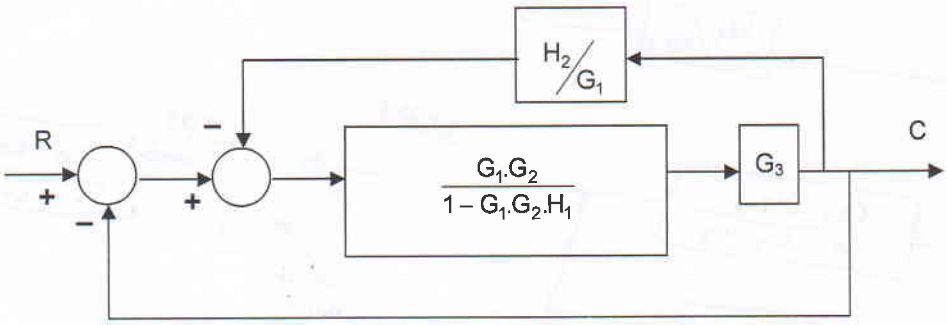
Soit à réduire le schéma fonctionnel suivant :



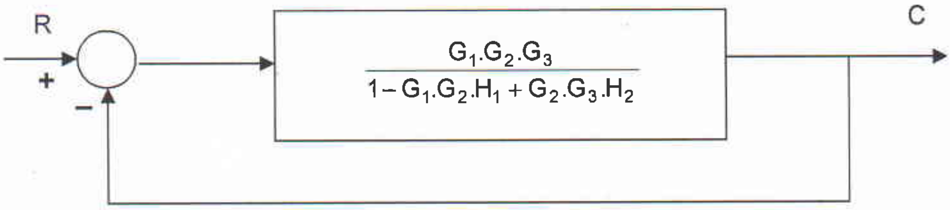
En appliquant la *règle n° 6*, puis la *règle n° 1*, on obtient :



Règle n° 14 :



Règle n°13 :



Règle n° 13 :