Université de Mohammed Boudiaf, M'sila | Faculté des mathématiques

Master 1 : Analyse fonctionnelle, 2021/2022 | Mr. Bougherara Brahim

Module : **Formulation variationnelle**

Table des matières

1 Espaces de Lebesgue, Distributions . . . **2**
1.1 Exercices corrigés . . . 5

2 Espaces de Sobolev . . . **7**
2.1 Notion de dérivée faible et espaces de Sobolev . . . 7
2.2 Densité sur $\mathbb{R}^N$ . . . 11
2.3 Densité sur un ouvert Ω . . . 13
2.4 Existence de l'opérateur de prolongement . . . 14
2.5 Trace et formule de Green . . . 14
2.5.1 Notion de trace . . . 14
2.5.2 Formule de Green . . . 15
2.6 Quelques propriétés utiles dans les espaces de Sobolev . . . 16
2.7 Injection de Sobolev . . . 18
2.8 Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$ . . . 18
2.9 Exercices corrigés . . . 20

3 Problèmes aux limites linéaires de seconde ordre . . . **28**
3.1 Quelques définitions . . . 28
3.2 Théorème de Lax-Milgram . . . 29
3.3 Existence pour le problèmes de Dirichlet . . . 32
3.3.1 Formulation variationnelle et solution faible . . . 32
3.3.2 Existence de la solution . . . 33
3.4 Problème de Neumann homogène . . . 36
3.5 Problèmes aux limite mixtes . . . 38
3.5.1 Conditions aux limites mêlées . . . 38
3.5.2 Condition aux limites périodiques . . . 38
3.6 Exercices corrigés . . . 39

1 Espaces de Lebesgue, Distributions

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1. i)Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty.$$

ii) Pour $p = \infty$, on désigne par $L^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions mesurable et bornées $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Remarque 1.1. *L'application $u \longmapsto \|u\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur l'espace $L^p(\Omega)$, et les espaces $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)})$ sont des espaces de Banach séparables pour $1 \leq p \leq \infty$ et réflexifs pour $1 < p < \infty$.*

Exercice 1.1. *a) Montrer que $L^p(\Omega) \ni f \longmapsto \|f\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. b) Montrer aussi que ces espaces avec leurs normes associées sont des espaces de Banach.*

Dans ce qui suit, $p \in [1, \infty[$. Nous présentons quelques résultats de convergence et de densité.

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi). *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$, telle que $\sup_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}x < \infty$. Alors f_n converge p.p. sur Ω vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.*

Théorème 1.2. ***Théorème de convergence dominée de Lebesgue]*** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que $(f_n)_n$ converge p.p. sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.*

Théorème 1.3. *[**Réciproque du théorème de Lebesgue**]Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que*

1. *$(f_{n_k})_k$ converge p.p. sur Ω vers f.*
2. *Il existe $h \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout k : $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p. $x \in \Omega$.*

(La preuve de ce théorème est basée sur le théorème de Fischer-Riesz 1.6 ci-dessous .)

Exercice 1.2. *Soient $p, q \in [1, \infty[$. Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$ et converge vers g dans $L^q(\Omega)$. Montrer que $f = g$ p.p. sur Ω.*

Exercice 1.3. *Montrer que l'extraction d'une sous-suite est nécessaire dans le théorème précédent. Prendre l'exemple suivant :* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = 1_{[\frac{n-1}{m} - \frac{m-1}{2}, \frac{n}{m} - \frac{m-1}{2}]}(x)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m(m-1)}{2} \leq n \leq \frac{m(m+1)}{2} + 1$.

Théorème 1.4 (Théorème de densité). *L'espace* $\mathcal{D}(\Omega)$ *des fonctions de* $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *à support compact est danse dans* $L^p(\Omega)$*. C'est à dire pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $f \in L^p(\Omega)$*, il existe une fonction* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *telle que :* $\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Théorème 1.5 (Inégalité de Hölder). *Soient* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et on a l'inégalité suivant :*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Théorème 1.6 (Théorème de Fischer-Riesz)**.** *Pour tout* $p \in [1, \infty]$*, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach avec la norme associée.*

Définition 1.2. *1) On note par* $\mathcal{D}(\Omega)$ *l'espace de toutes les fonctions* f *de classe* C^∞ *et à support compact.*

2) Une suite $\{\varphi_n\}$ *de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dite convergente vers* φ *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ *s'il existe un compact* $K \subset \Omega$ *tel que*

$$\forall n : supp\varphi_n \subset K, \quad D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi \text{ uniformément sur } \Omega$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Définition 1.3. *1. Une forme linéaire* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *est continue si pour tout suite* $(\varphi_n)_n$ *convergente vers* φ *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$.

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n - \varphi) = 0.$$

2. Une distribution sur Ω *est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\Omega)$*. On note par* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *l'espace de toutes les distributions sur* Ω *(c'est l'espace dual de* $\mathcal{D}(\Omega)$*).*

Exercice 1.4 (Distribution régulière). *Montrer que pour tout* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$*, l'application* $T_f : \mathcal{D}(\Omega \to \mathbb{R}, \varphi \longmapsto \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x$ *définit une distribution sur* Ω*. (*T_f *s'appelle distribution régulière, on la note par* f*.)*

Définition 1.4 (Dérivation d'une distribution). *On appelle dérivée d'une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*, d'ordre* $\alpha \in \mathbb{N}^N$*, l'application*

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{array}$$

Exercice 1.5. *a. Montrer que* $D^\alpha T$ *est une distribution sur* Ω*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *(On dit alors que* T *est indéfiniment dérivable).*

b. *Supposons que* $T := f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$*. Montrer que les dérivées de* T *jusqu'à l'ordre* k *coïncident avec les dérivées classiques de* f*.*

Définition 1.5. *Soit* E *un espace de Banach. On appelle dual de* E *et note* E' *l'espace de toutes les formes linéaire continue* f *sur* E*, et on écrit* $f(x) := \langle f, x\rangle$ $(x \in E)$*.*

Théorème 1.7 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)**.** *Soit* H *un espace de Hilbert et* H' *est son dual. Alors pour tout élément* $f \in H'$*, il existe un unique élément* $x \in H$ *tels que*

$$\langle f, y\rangle = (x, y) \text{ pour tout } y \in H,$$

et $\|f\| = \|x\|$*, où* $(\ ,\ )$ *désigne le produit scalaire sur* H*. De plus l'application* $f \longmapsto x$ *est linéaire et continue.*

Théorème 1.8. *Pour tout élément* $f \in (L^p(\Omega))'$*, il existe un unique élément* $g \in L^{p'}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ *tel que*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega g v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

De plus, on a

$$\|f\| = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ce théorème nous permet d'identifier le dual de L^p avec $L^{p'}$.

Définition 1.6 (Convergence faible)**.**

1. *Une suite* $(x_n)_n$ *est dite converge faiblement vers* x *dans un espace de Banach* E *et on note* $x_n \rightharpoonup x$*, si pour tout élément* $f \in E'$ *on a*

$$\langle f, x_n\rangle_{E'\times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E'\times E} \text{ quand } n \to +\infty.$$

2. *Une suite* $(T_n)_n$ *est convergente vers* T *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *si pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle, \ n \to \infty.$$

D'après les théorèmes ci-dessus, on peut identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$ et aussi tout espace de Hilbert avec son dual. D'où on le résultat suivant

Proposition 1.8.1. *1. Une suite* (f_n) *est convergente faiblement vers* f *dans* L^p *si et seulement si pour tout* $g \in L^{p'}$

$$\int f_n g \mathrm{d}x \longrightarrow \int f g \mathrm{d}x, \ n \to \infty.$$

$$\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle, \ n \to \infty.$$

3. Une suite $(x_n)_n$ *est convergente faiblement vers* x *dans un espace de Hilbert* H *SSI pour tout* $y \in H$ *on a*

$$(x_n, y) \longrightarrow (x, y), \quad n \to \infty.$$

Exercice 1.6.

i) Si la suite $(f_n)_n$ *est convergente dans* L^p*, montrer qu'elle est faiblement convergente dans* L^p*.*

ii) Si la suite $(f_n)_n$ *de* L^p *est convergente* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, montrer quelle est faiblement convergente dans* L^p*.*

Théorème 1.9. *Toute suite bornée dans un espace de Hilbert* H *admet une sous-suite faiblement convergente dans* H*.*

1.1 Exercices corrigés

Exercice 1.7. *Montrer que $L^p(\Omega) \ni u \longmapsto \|u\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Solution :

1. Pour $p = 1$ et $p = \infty$, c'est évident. Pour$1 < p < \infty$, on a pour l'inégalité triangulaire, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f+g|^p \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|\mathrm{d}x + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|\mathrm{d}x \\ &\leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 1.8. *Soient $p, q \in [1, \infty[$. Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$ et converge vers g dans $L^q(\Omega)$. Montrer que $f = g$ p.p. sur Ω.*

Solution : Utiliser le théorème de Lebesgue inverse 1.3

Exercice 1.9. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

a. Montrer que $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ (Alors toute distribution T est indéfiniment dérivable).

b. Supposons que $T := f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Montrer que les dérivées de T jusqu'à l'ordre k coïncident avec les dérivées classiques de f.

Solution :

a) Soit $\{\varphi_n\}_n$ une suite convergente de $\mathcal{D}(0, T)$. Alors

$$\begin{cases} \exists\ K \subset \Omega \text{ compact } : \mathrm{supp}\varphi_n \subset K, \ \forall n \\ \varphi_n^{(\alpha)} \longrightarrow \varphi^{(\alpha)}, \ \mathrm{dans} L^\infty(0, T), \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \end{cases}$$

On a donc pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\langle D^{(\alpha)}T, \varphi_n\rangle \ := \ (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi_n^\alpha\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi^{(k)}\rangle := \langle D(\alpha)T, \varphi_n\rangle \text{ car } T \in \mathcal{D}'(0, T; E).$$

Donc $D^\alpha T$ est une distributions.

b) Comme $f \in C^k(\Omega)$, alors $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Et on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, avec $|\alpha| \leq k$:

$$\langle D^{(\alpha)}T_f, \varphi\rangle \ := \ (-1)^{|\alpha|}\langle T_f, \varphi^\alpha\rangle \tag{1.2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle D^{(\alpha)}f, \varphi\rangle &:= \int_\Omega D^{(\alpha)}f\varphi\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^{(\alpha)}\varphi\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\langle T_f, \varphi^\alpha\rangle \end{aligned} \tag{1.3}$$

De (1.2) et (1.3), on trouve le résultat.

Exercice 1.10. *i) Si la suite $(f_n)_n$ est convergente dans L^p, montrer qu'elle est faiblement convergente dans L^p.*

ii) Si la suite $(f_n)_n$ de L^p est convergente $\mathcal{D}'(\Omega)$, montrer quelle est faiblement convergente dans L^p.

Exercice 1.11. *Soient p, q et r trois réels supérieure ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder que $fg \in L^r(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Solution :

Appliquer l'inégalité de Hölder sur les fonction $|f|^r \in L^{p/r}(\Omega)$, $|g|^r \in L^{p'/r}(\Omega)$.

Exercice 1.12. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergente vers f dans $L^p(\Omega)$.*
1. Montrer que si Ω est borné alors $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q \leq p$
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution :

1. On applique l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_\Omega |f_n - f|^q \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_\Omega |f_n - f|^p \mathrm{d}x \right)^{q/p} \left(\int_\Omega \mathrm{d}x \right)^{1-q/p} = c\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)}^q \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

2. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$|\int_\Omega (f_n - f)\varphi \mathrm{d}x| \leq \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Exercice 1.13. *Soit $\{T_n\}_n$ une suite des distributions converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que $\{D^\alpha T_n\}_n$ est convergente ver $D^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.*

Solution :

Rappelons que

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\langle \mathrm{D}^\alpha T_n, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle := \langle \mathrm{D}^\alpha T, \varphi \rangle$$

2 Espaces de Sobolev

2.1 Notion de dérivée faible et espaces de Sobolev

Soient $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On a les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\int_{\mathbb{R}} v\varphi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} u\varphi' \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
2. $v(x) = u'(x), \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}$

(Montrer cette équivalence). On peut donc adapter la première formule ci-dessus comme définition de la dérivée de u (dès que u est de classe $\mathcal{C}^1$) et de plus v est la dérivée de la distribution régulière T_u. Maintenant, si u n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, alors l'existence de telle fonction $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est équivalente à dire que la distribution $T'_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. C'est à dire u doit être appartient à l'espace des fonctions $\{w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : T'_w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\}$. Ce type d'espaces est appelé espace de Sobolev. Donc la notion de dérivée donnée par la formule (1) qui s'appelle dérivée faible, est plus générale que la notion classique, car il coïncide avec la dérivée classique lorsque elle existe et de plus elle garde la formule d'intégration par partie valable dans un espace plus vaste que $\mathcal{C}^1$, à savoir l'espace de Sobolev. Ce qui est important dans la résolution des équations aux dérivées partielles. De plus, ces espaces avec leurs normes associées forme des espaces de Banach séparables et réflexifs, contrairement aux espaces $\mathcal{C}^1$, et elle sont commode et serviable pour appliquer les différentes méthodes dans la résolutions des équations aux dérivées partielles comme les méthodes variationnelles (l'objet de chapitre III), la méthode de point fixe ...etc.

On précisera maintenant les définitions dans un cadre plus générale et on a :

Définition 2.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $u, \ v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

1. *On dit que v est la dérivée partielle faible de u par rapport à x_i, si*

$$\boxed{\int_\Omega v \ \varphi \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \ \partial_i \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{2.1}$$

   Autrement dit, si $v = \partial_i T_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. S'il n'y a pas de confusion, on écrira $\partial_i u$ au lieu de v ou $\partial_i T_u$.

2. *Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on dit que v est la dérivée faible de u d'ordre α si*

$$\boxed{\int_\Omega v \ \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \ \mathrm{D}^\alpha \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).} \tag{2.2}$$

   Autrement dit, si $v = \mathrm{D}^\alpha T_u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. La même chose, on écrira $\mathrm{D}^\alpha u$ au lieu de $\mathrm{D}^\alpha T_u = v$.

Remarque 2.1. *Rappelons que les distribution $\partial_i T_u$, $\mathrm{D}^\alpha T_u$ sont définies respectivement par*

$$\boxed{\langle \partial_i T_u, \varphi \rangle := -\int_\Omega u \ \partial_i \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).}$$

$$\boxed{\langle \mathrm{D}^\alpha T_u, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\ \mathrm{D}^\alpha\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).}$$

Définition 2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.*

1. *L'espace de Sobolev d'ordre 1 est l'ensemble*

$$\boxed{H^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mesurable } \mid \quad u, \partial_i u\in L^2(\Omega),\ i=1,...,N\}.} \tag{2.3}$$

2. *L'espace de Sobolev d'ordre $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, est l'ensemble*

$$\boxed{H^k(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mesurable } \mid \quad u, \mathrm{D}^\alpha u\in L^2(\Omega),\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha|\leq k\}.} \tag{2.4}$$

(Où $\partial_i u, \mathrm{D}^\alpha$ sont dans le sens de la définition 2.1).

Dans un cadre plus générale, on définit les espaces de Sobolev comme suivant

Définition 2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et Soit $1\leq p\leq+\infty$.*

1. *L'espace de Sobolev d'ordre 1 est l'ensemble*

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mesurable } \mid \quad u, \partial_i u\in L^p(\Omega),\ i=1,...,N\}.} \tag{2.5}$$

2. *L'espace de Sobolev d'ordre $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, est l'ensemble*

$$\boxed{W^{k,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R} \text{ mesurable } \mid \quad u, \mathrm{D}^\alpha u\in L^p(\Omega),\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha|\leq k\}.} \tag{2.6}$$

(Où $\partial_i u, \mathrm{D}^\alpha$ sont dans le sens de la définition 2.1).

Exercice 2.1. *Soit u la fonction définie sur $]-1,1[$ par $u(x)=|x|$. Montrer que $u\in H^1(-1,1)$.*

Solution. Il est claire que $u\in L^2(-1,1)$. Calculons sa dérivée faible v si elle existe. On a pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(-1,1)$:

$$\int_{-1}^1 v\varphi \mathrm{d}x := -\int_{-1}^1 |x|\varphi' \mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 \varphi \mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \varphi \mathrm{d}x \quad \text{(après intégration par partie).}$$

d'où

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x\in(-1,0[\\ 1 & \text{si} \quad x\in]0,+1) \end{cases}$$

et on a $u,v\in L^2(-1,1)$ (évident). Donc $u\in H^1(-1,1)$, mais elle n'est pas dans $\mathcal{C}^1(-1,1)$.

Remarque 2.2. *On peut montrer facilement que les fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux appartiennent aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.*

Exercice 2.2. *Trouver les valeurs de α de sorte que la fonction $u(x)=x^\alpha$ soit dans $H^1(0,1)$.*

Solution. On a

$$u \in L^2(0,1) \iff \int_0^1 x^{2\alpha}\mathrm{d}x < \infty \iff \alpha > -1/2$$

Soit v la dérivée faible (si elle existe). Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$:

$$\int_0^1 v\varphi \mathrm{d}x = -\int_0^1 u\varphi' \mathrm{d}x = \int_a^1 v\varphi \mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi \mathrm{d}x.$$

D'où $v(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$v \in L^2(0,1) \iff \int_0^1 x^{2(\alpha-1)}\mathrm{d}x < \infty \iff \alpha > 1/2$$

Donc $u \in H^1(0,1) \iff \alpha > 1/2$.

Exercice 2.3. *Soit $\Omega = B_1(0)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Considérons la fonction suivante*

$$\begin{array}{rcl} u:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & u(x) = |x|^\alpha. \end{array}$$

Trouver les valeurs de α telles que $u \in H^1(B_1(0))$.

Solution. On utilise le changement de variable polaire $x = rw$ où $0 < r < 1$ et $|w| = 1$. On a $\mathrm{d}x = r^{N-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}w$. D'où

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^{2\alpha}\mathrm{d}x = \int_{|w|=1} \mathrm{d}w \int_0^1 r^{2\alpha+N-1}\mathrm{d}r.$$

On a $\int_{|w|=1} \mathrm{d}w < \infty$ (car c'est le volume de la boule unité). Et on a

$$\int_0^1 r^{2\alpha+N-1}\mathrm{d}r < +\infty \iff \alpha > -N/2.$$

Donc $u \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > -N/2$. D'autre part, on a $\partial_i u(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x_i$ $\forall x \in \Omega \setminus \{0\}$. Donc

$$\begin{aligned}\big(\forall i : \partial_i u \in L^2(\Omega)\big) \quad &\iff \quad \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^2 \mathrm{d}x < \infty \iff \alpha \int_\Omega |x|^{2\alpha-2}\mathrm{d}x < \infty \\ &\iff \quad \alpha \int_{|w|=1} \mathrm{d}w \int_0^1 r^{2\alpha+N-3}\mathrm{d}r \iff \alpha > -\frac{N}{2} + 1.\end{aligned}$$

D'où $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $\alpha > 1 - N/2$.

Quant à la structure de ces espaces, on a les résultats suivants :

Théorème 2.1. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach avec la norme suivante*

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}.} \tag{2.7}$$

Remarque 2.3. *1. La norme définie ci-dessus est équivalente aux normes suivantee*

$$\|u\| = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\|u\| = \max\{\|u\|_{L^p(\Omega)}, \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}, i = 1, ..., N\}.$$

2. Si la suite $\{u_n\}_n$ est convergente vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. alors

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u_n - \partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \longrightarrow 0.$$

Ce qui implique que

$$\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \ \|\partial_i u_n - \partial_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Par conséquent

$$\boxed{(u_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega)) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} u_n & \longrightarrow & u \\ \partial_i u_n & \longrightarrow & \partial_i u, \quad \forall i \end{array} \right. \text{ dans } L^p(\Omega).}$$

Démonstration du Théorème 2.1

1. Montrons que $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ définit une norme sur $W^{1,p}(\Omega)$. La propriété de la séparation et de l'homogénéité sont évidentes. Pour l'inégalité triangulaire, appliquer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.8}$$

2. Montrons que $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace complet, c'est à dire toute suite de Cauchy est convergente. Soit $\{u_n\}_n$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0$:

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u_n - u_m\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u_n - \partial_i u_m\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

D'où $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0$:

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \text{ et } \|\partial_i u_n - \partial_i u_m\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., N.$$

Donc les suites $\{u_n\}_n$ et $\{\partial_i u_n\}_n$ sont de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ qui est complet, elles sont convergente respectivement vers u, $v_i \in L^p(\Omega)$ pour $i = 1, ..., N$. D'autre part, l'espace $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. On a donc

$$\begin{aligned}\left(u_n \xrightarrow{n} u \text{ dans } L^p(\Omega)\right) &\Longrightarrow \left(u_n \xrightarrow{n} u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)\\ &\Longrightarrow \left(\partial_i u_n \xrightarrow{n} \partial_i u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)\end{aligned}$$

et on a pour $i = 1, ..., N$.

$$\left(\partial_i u_n \xrightarrow{n} v_i \text{ dans } L^p(\Omega)\right) \Longrightarrow \left(\partial_i u_n \xrightarrow{n} v_i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right).$$

Par unicité de la limite, on en déduit que $\partial_i u = v_i$, pour tout $i = 1, ..., N$. Donc $\{u_n\}$ est convergente vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.2. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire suivant*

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega (uv + \nabla u.\nabla v)\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

La preuve est immédiate.

2.2 Densité sur $\mathbb{R}^N$

En pratique, beaucoup de formules et de résultats sont faciles à démontrer pour des fonctions régulières et peuvent être généralisés aux fonctions arbitraires grâce à l'argument de densité. Pour cela on va étudier la question d'approximation des fonctions de $W^{1,p}$ par des fonctions régulières. L'idée est d'utiliser les fonctions régularisantes pour l'approximation :

Définition 2.4. *Une fonction régularisante est une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ qui s'annule en dehors d'une boule et satisfait*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Un exemple important de ce type des fonctions est la fonction suivante

$$\rho(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1\\ 0 & \text{si } |x| \geq 1\end{cases} \tag{2.10}$$

où $c > 0$ est choisit de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$. Il est facile de vérifier que $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{supp}\rho = \overline{B}(0, 1)$. On accepte le résultat suivant concernant les espaces de Lebesgue Lp

Théorème 2.3. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $u \in L^p(\Omega)$, on a*

$$\boxed{\rho_n \star u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{et } \rho_n \star u \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega).}$$

Où

$$\boxed{\rho_n(x) := n^N\rho(nx), \quad et\ \rho_n\star u(x) := \int_{\mathbb{R}^N}\rho_n(x-y)u(y)\mathrm{d}y.}$$

Corollaire 2.3.1. *L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $1\le p<\infty$.*

Démonstration. Soit $u\in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Alors, d'après le théorème 2.3,

$$\boxed{\rho_n\star u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N), \quad \rho_n\star u\longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega).}$$

Et on a pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^N$, $|\alpha|\le k$

$$\boxed{\mathrm{D}^\alpha(\rho_n\star u)=\rho_n\star\mathrm{D}^\alpha u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N) \ \text{ et } \mathrm{D}^\alpha(\rho_n\star u)\longrightarrow u \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N).}$$

Par conséquent

$$\rho_n\star u\in W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \rho_n\star u\longrightarrow u \ \text{ dans } W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

□

Théorème 2.4. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $1\le p<\infty$.*

Démonstration. Il suffit de construire une suite de fonction $\{\phi_n\}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ converge vers u dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Considérons la fonction de troncature $\zeta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, qui vérifie

$$\zeta\equiv 1 \text{ sur } B(0,1),\ \text{supp}\zeta\subset B(0,2) \text{ et } 0\le\zeta\le 1.$$

On définit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_n par

$$\phi_n(x)=\zeta(x/n)(\rho_n\star u)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

D'après le corollaire précédente, on a

$$\rho_n\star u\longrightarrow u \text{ dans } \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N),$$

mais $\rho_n\star u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour conclure il suffit de montrer que

$$\rho_n\star u-\phi_n\longrightarrow 0 \text{ dans } \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\phi_n-\rho_n\star u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \underbrace{\int_{\{|x|<n\}}|\phi_n-\rho_n\star u|^p\mathrm{d}x}_{=0}+\int_{\{|x|>n\}}|\phi_n-\rho_n\star u|^p\mathrm{d}x\\
&= \int_{\{|x|>n\}}|\zeta(x/n)(\rho_n\star u)-\rho_n\star u|^p\mathrm{d}x\\
&\le \int_{\{|x|>n\}}|\rho_n\star u|^p\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n\star u|^p\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Il est claire que $\chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n \star u|^p \longrightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Et on a $\rho_n \star u \to u$ dans $L^p(\Omega)$, d'après le théorème de Lebesgue inverse, il existe sous-suite notée encore $\rho_n \star u$ et une fonction $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telles que $|\rho_n \star u| \leq g$ et par conséquent $\chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n \star u| \leq g$. D'où en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\{|x|>n\}}|\rho_n \star u|^p \mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\|\phi_n - \rho_n \star u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Par conséquent

$$\|\phi_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\phi_n - \rho_n \star u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n \star u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

De la même manière on montre que $\mathrm{D}^\alpha \phi_n \to \mathrm{D}^\alpha u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. $\square$

2.3 Densité sur un ouvert Ω

On essaye maintenant de généraliser le résultat de densité prouvé dans $\mathbb{R}^N$ à un ouvert quelconque Ω de $\mathbb{R}^n$. L'idée naturelle est de prolonger les fonctions définies sur Ω à $\mathbb{R}^N$ et d'appliquer la densité dans $\mathbb{R}^N$. Or le prolongent des fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ n'est pas toujours possible car il nécessite des conditions sur le bord de Ω. C'est l'objet de la section suivant.

Définition 2.5. *Soit $P : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ une application. On dit que P est un opérateur de prolongement de $W^{k,p}(\Omega)$ si elle linéaire et continue et satisfait*

$$Pu_{|\Omega} = u \text{ p.p. sur } \Omega, \quad \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

On a donc le résultat de densité suivant :

Théorème 2.5. *S'il existe un opérateur de prolongement de $W^{k,p}(\Omega)$, alors l'espace*

$$E := \{v \in W^{k,p}(\Omega) \mid \exists\, \overline{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : v = \overline{v}_{|\overline{\Omega}}\}$$

est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$. En particulier $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in W^{k,p}(\Omega)$. D'après l'hypothèse de théorème on a $Pu \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. D'après la preuve du théorème 2.4, on a

$$\zeta_n(\rho_n \star Pu) \longrightarrow Pu \text{ dans } W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

Par conséquent

$$\|\zeta_n(\rho_n \star Pu)_{|\Omega} - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|\zeta_n(\rho_n \star Pu) - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$$

Donc

$$u_n := \zeta_n(\rho_n \star Pu)_{|\Omega} \in E \text{ et } u_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{k,p}(\Omega).$$

Ce qui fini la preuve. $\square$

Remarque 2.4. *L'espace des fonction test $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{k,p}(\Omega)$ si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.*

Exercice 2.4. *Montrer que l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

2.4 Existence de l'opérateur de prolongement

Définition 2.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ . On dit que Γ (ou Ω) est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), si pour tout $x_0 \in \Gamma$, il existe une boule $B(x_0, r)$ et une application bijective de $B(x_0, r)$ dans un ouvert W telles que*

1. *$\psi : B(x_0, r) \longrightarrow W$ est un k-difféomorphisme (ψ et ψ^{-1} sont k fois différentiables).*
2. *$\psi(\Omega \cap B(x_0, r)) = W \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^N : x_n > 0\}$.*
3. *$\psi(\Gamma \cap B(x_0, r)) = W \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^N : x_n = 0\}$.*

Le résultat suivant donne un critère pour la prolongation dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe un opérateur de prolongement*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

2.5 Trace et formule de Green

2.5.1 Notion de trace

Si $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ alors la fonction Tu définie sur $\partial\Omega$ par $Tu := u_{|\partial\Omega}$ est bien défini et elle est dans $\mathcal{C}(\partial\Omega)$. Elle s'appelle la trace de la fonction u sur $\partial\Omega$. On a donc bien définit une application linéaire

$$T : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\Omega}).$$

qui est continue avec la norme L^∞. Maintenant si u appartient à $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ et n'appartient pas à $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors il est claire que $Tu := u_{|\Omega}$ n'est pas bien définie car $\partial\Omega$ est négligeable et on ne peut pas avoir des informations de u sur $\partial\Omega$. Mais en fait, on peut donner un sens à Tu si u appartient l'espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. En effet, on peut montrer que que l'application

$$T : (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \longrightarrow (L^p(\partial\Omega), \|.\|_{L^p(\partial\Omega)})$$

est continue et grâce à la densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut généraliser la définition de T à l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Et on a le théorème suivant :

Théorème 2.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe une application linéaire et continue $T : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ telle que*

$$Tu = u_{|\partial\Omega} \text{ si } u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$

($L^p(\partial\Omega)$ est muni de la mesure surfacique sur $\partial\Omega$).

Définition 2.7. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La fonction $Tu \in L^p(\partial\Omega)$ s'appelle trace de u sur $\partial\Omega$.*

Remarque 2.5. 1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors*

$$Tu = \lim_{n\to\infty} Tu_n := \lim_{n\to\infty} u_{n|\partial\Omega} \text{ où } u_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), u_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega).$$

En effet, grâce à la continuité de T, on a

$$\|Tu - Tu_n\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

2. *L'application T n'est pas surjective. C'est à dire l'image $T(W^{1,p}(\Omega))$ est un sous-ensemble strictement inclus dans $L^p(\partial\Omega)$.*

Définition 2.8. *L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est le rang de l'opérateur de trace*

$$T : H^1(\Omega) := W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Remarque 2.6. *L'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$ coïncide avec l'espace de Sobolev fractionnaire H^s avec $s = 1/2$. De plus l'opérateur de trace T est continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $H^{1/2}$ muni de la norme*

$$\|u\|_{H^{1/2}} := \|u\|_{L^2} + \int\int \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ce type des espaces de Sobolev fractionnaires n'est pas abordé dans ce cours.

2.5.2 Formule de Green

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ alors on a la formule d'intégration par partie suivante

$$\int_\Omega \partial_i uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\, n_i \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}x \;\forall i \in \{1, ..., N\}.$$

où $\overrightarrow{n} = (n_1, ..., n_N)$ est le vecteur unitaire de la normal extérieur à $\partial\Omega$. Grâce à la densité de $\mathcal{C}^1$ dans $H^1(\Omega)$ (Théorème 2.5) et la continuité de l'opérateur de trace T (Théorème 2.7), on peut généraliser la formule ci-dessus pour toutes les fonctions dans $H^1(\Omega)$ et on a la formule suivante qui s'appelle formule de Green

Théorème 2.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a*

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega \partial_i uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} TuTv\, n_i \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}x \;\forall i \in \{1, ..., N\}. \tag{2.11}$$

Remarque 2.7. *S'il n'y a pas de confusion on écrit*

$$\int_{\partial\Omega} uv\, n_i \mathrm{d}\sigma \text{ au lieu de } \int_{\partial\Omega} TuTv\, n_i \mathrm{d}\sigma.$$

Corollaire 2.8.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega \Delta uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} T\frac{\partial u}{\partial n} Tv \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} := \nabla u.\overrightarrow{n} \in H^1(\Omega)$. (Pour la simplicité, on écrit

$$\boxed{\int_\Omega \Delta uv \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x}).$$

Remarque 2.8. *La formule de Green reste valable pour des fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

2.6 Quelques propriétés utiles dans les espaces de Sobolev

Proposition 2.8.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Soit $H : U \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme (i.e. H est bijective et H, H^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$) telle que :*

$$\mathrm{Jac}H \in L^{\infty}(U), \ \mathrm{Jac}H^{-1} \in L^{\infty}(\Omega).$$

Alors $u \circ H \in W^{1,p}(U)$ et on a

$$\forall i : \frac{\partial(u \circ H)}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H(y)) \frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y), \quad x_j = H_j(y).$$

Démonstration. Pour $p < \infty$.

i) Par densité (Voir cours 2), Il existe une suite $\{u_n\}_n$ de $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \forall i : \partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \text{ dans } L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset U.$$

ii) Montrons que si $v \in L^p(\Omega)$ alors $v \circ H \in L^p(U)$. On a

$$\begin{aligned} \int_U |u \circ H(y)|^p \mathrm{d}y &= \int_{\Omega} |u(x)|^p |\mathrm{Jac}H^{-1}| \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_{\Omega} |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \quad (\text{car } \mathrm{Jac}H^{-1} \in L^{\infty}(U)) \end{aligned}$$

Donc $v \circ H \in L^p(U)$..

iii) Montrons que si $v_n \longrightarrow v$ dans $L^p(\Omega)$ alors $v_n \circ H \longrightarrow v \circ H$ dans $L^p(U)$. D'après le théorème de Lebesgue inverse, il existe une sous-suite $\{v_{n_k}\}$ telle que

$$v_{n_k} \longrightarrow v \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ et } |v_{n_k}| \leq g \in L^p(\Omega) \ \forall n.$$

Par conséquent

$$v_{n_k} \circ H \longrightarrow v \circ H \text{ p.p. } y \in U \text{ et } |v_{n_k} \circ H| \leq g \circ H \in L^p(U) \quad \forall k.$$

En appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient

$$v_{n_k} \circ H \longrightarrow v \circ H \text{ dans } L^p(U).$$

Montrons maintenant que $v_n \circ H \longrightarrow v \circ H$ dans $L^p(U)$. Par absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $\{v_{n_k} \circ H\}_k$ tels que

$$\|v_{n_k} \circ H - v \circ H\|_{L^p(U)} \geq \varepsilon. \tag{2.12}$$

Or, la suite $\{v_{n_k}\}_k$converge vers v dans $L^p(\Omega)$, elle admet donc une sous-suite notée $\{v_{\varphi(n_k)}\}$ telle que

$$\|v_{\varphi(n_k)} \circ H - v \circ H\|_{L^p(U)} \longrightarrow 0.$$

Ce qui contredit avec (2.12).

iv) On est prêt maintenant à montrer que que $u \circ H \in W^{1,p}(U)$. On a d'après i) $u_n \circ H \longrightarrow u \circ H$ dans $L^p(U)$. Comme u_n et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\forall i : \frac{\partial(u_n \circ H)}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H(y))\frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y). \tag{2.13}$$

D'autre part, d'après ii) on a pour tout compact $K \subset U$

$$\frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H) := \frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}} \circ H \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial_{x_j}} \circ H := \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H) \text{ dans } L^p(K)$$

et comme $\frac{\partial H}{\partial y_j} \in L^\infty(K)$ alors

$$\frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H)\frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H)\frac{\partial H_j}{\partial y_i},$$

D'où on peut passer à la limite au sens des distributions dans (2.13) et on obtient

$$\forall i : \frac{\partial(u_n \circ H)}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H)\frac{\partial H_j}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \circ H\frac{\partial H_j}{\partial y_i} \in L^p(U).$$

Pour $p = \infty$. Il est claire que $u \circ H \in L^\infty(\Omega)$. D'autre part, soit Ω' un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\Omega' \subset \Omega$. Alors $u \in W^{1,p}(\Omega')$ et on a d'après ce que précède :

$$\forall i : \frac{\partial(u \circ H)}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H(y))\frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y) \in L^\infty(\Omega).$$

Donc $u \circ H \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Ce qui finit la preuve. $\square$

Proposition 2.8.2. *Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(t)| \leq M$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{ et } \quad \partial_i(G \circ u) = G'(u)\partial_i u, \ \forall i.$$

Démonstration. Pour $p < \infty$, on a d'après le théorème des accroissement finis $|G(t)| \leq Mt$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Alors $|G \circ u| \leq Mu \in L^p(\Omega)$, et donc $G \circ u \in L^p(\Omega)$. D'autre part par densité, il existe une suite $\{u_n\}_n$ de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \forall i : \partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \text{ dans } L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset U.$$

Alors, comme G et u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\partial_i(G \circ u_n) = G'(u)\partial_i u_n \tag{2.14}$$

On montre comme dans la preuve précédente que

$$G \circ u_n \longrightarrow G \circ u \text{ dans } L^p(\Omega), \ G'(u)\partial_i u_n \longrightarrow G'(u)\partial_i u \text{ dans } L^p(K),$$

pour tout compact $K \subset \Omega$. D'où en passant à la limite au sens des distributions dans (2.14), on obtient

$$\partial_i(G \circ u) = G'(u)\partial_i u \in L^p(\Omega).$$

Pour $p = \infty$, On procède comme à la fin de la preuve précédente. $\square$

2.7 Injection de Sobolev

Théorème 2.9. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, on a les injections continues suivantes*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & si \quad p < N \\ L^q(\Omega), & si \quad p = N, \ \forall q \geq 1 \\ C^{\alpha}(\overline{\Omega}) & si \quad p > N, \end{cases} \tag{2.15}$$

où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (i.e. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$) et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, pour tout $p \geq 1$. En particulier, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a les inégalités suivants :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.16}$$

$$|u|_{\alpha} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.17}$$

où $C_1, \ C_2 > 0$, dépendent seulement de N, p et le diamètre de Ω.

En dimension 1, on a le résultat important suivant

Proposition 2.9.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$ L'espace $W^{1,p}(I)$ s'injecte de manière continue dans $\mathcal{C}(\overline{I})$. C'est-à-dire*

$$\begin{cases} \forall u \in W^{1,p}(I), \ \exists v \in \mathcal{C}(\overline{I}) : u = v \ p.p. \ sur \ I \\ \\ \exists C > 0, \ \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|v\|_{\mathcal{C}(\overline{I})} \end{cases} \tag{2.18}$$

Théorème 2.10 (de Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors on a les injections compactes suivantes*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \begin{cases} L^q(\Omega) & si \ p < N, \ \ pout \ tout \ 1 \leq q < p^* \\ L^q(\Omega) & si \ p = N, \ \ pout \ tout \ 1 \leq q < \infty \\ \mathcal{C}(\overline{\Omega}) & si \ p > N, \end{cases} \tag{2.19}$$

(où $p^* = \frac{Np}{N-p}$).

2.8 Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$

Définition 2.9. *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Notation 2.1. *Pour $p = 2$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ sera noté dorénavant par $H_0^1(\Omega)$.*

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un sous espace de $W^{1,p}(\Omega)$ et il est caractérisé par :

Théorème 2.11.

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow (u \in W^{1,p}(\Omega) \ \ et \ Tu \equiv 0). \tag{2.20}$$

En particulier, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ alors $u_{|\partial\Omega} \equiv 0$.

Un résultat important qui découle de théorème 2.10 est l'inégalité de Poincaré :

Théorème 2.12 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constant $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.21}$$

Corollaire 2.12.1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} \end{array}$$

définit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ noté par $\|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, équivalente à la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. De plus $(W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach.

Définition 2.10. *L'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Autrement dit un élément f de $W^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que*

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle f, v\rangle$$

et

$$\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Notation 2.2. *Pour $p = 2$ alors $p' = 2$. Alors l'espace $W^{-1,2}(\Omega)$ est le dual de l'espace $W_0^{1,2}(\Omega) := H_0^1(\Omega)$. Il sera noté par $H^{-1}(\Omega)$.*

Théorème 2.13. *(**Caractérisation de** $W^{-1,p'}(\Omega)$). Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors Il existe*

$$f^0, f^1, \ldots, f^N \quad \text{dans } L^p(\Omega),$$

tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^N f^i v_{x_i} \right) \mathrm{d}x \tag{2.22}$$

et

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^N |f^i|^p \right)^{1/p}. \tag{2.23}$$

En particulier si $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ alors

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

2.9 Exercices corrigés

Exercice 2.5. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ -x+2 & \text{si } x \in [1,4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. *Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$.*
2. *Est ce que $f \in H^1(\mathbb{R})$.*

Solution :

1. On a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_1^4 (-x+2)^2 \mathrm{d}x < \infty.$$
Donc $f \in L^2(\mathbb{R})$.
2. On calcule la dérivée v de f (au sens des distributions). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a
$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle := -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \mathrm{d}x &= -\int_0^1 x\varphi' \mathrm{d}x - \int_1^4 (-x+2)\varphi' \mathrm{d}x \\ &= -[x\varphi]_0^1 + \int_0^1 \varphi \mathrm{d}x - [(-x+2)\varphi]_1^4 - \int_1^4 \varphi \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \varphi \mathrm{d}x - \int_1^4 \varphi \mathrm{d}x + 2\varphi(4) \\ &= \langle w + 2\delta_4, \varphi \rangle \end{aligned}$$
où $w = 1$ sur $(0,1)$, $w = -1$ sur $(1,4)$, et $w = 0$ ailleurs. Donc $v = w - 2\delta_4 \notin L^2(\mathbb{R})$. D'où $f \notin H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.6. *Soit $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^\alpha$.*

1. *Montrer que $f \in L^1(0,1)$ si et seulement si $\alpha > -1$.*
2. *Montrer que $f \in H^1(0,1)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.*
3. *Montrer que $f \in H^{-1}(0,1)$ si et seulement si $\alpha > -3/2$.*

Solution :

1. On a
$$f \in L^1(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > -1.$$
car
$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 x^\alpha v \mathrm{d}x \right| &= \begin{cases} \frac{1}{|\alpha+1|} \left([x^{\alpha+1}]_0^1 \right)^{1/2} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ ([\ln x]_0^1)^{1/2} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < -1 \\ \frac{1}{|\alpha+1|} & \text{si } \alpha > -1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

2. On a
$$f \in L^2(0,1) \iff \int_0^1 x^{2\alpha}\mathrm{d}x < \infty \iff 2\alpha > -1 \iff \alpha > -1/2$$
Soit v la dérivée faible (si elle existe). Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$:
$$\langle v, \varphi\rangle := -\int_0^1 f\varphi'\mathrm{d}x = -[f\varphi]_0^1 + \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi\mathrm{d}x.$$
D'où $v(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
$$v \in L^2(0,1) \iff \int_0^1 x^{2(\alpha-1)}\mathrm{d}x < \infty \iff 2(\alpha-1) > -1 \iff \alpha > 1/2$$
Donc $u \in H^1(0,1) \iff \alpha > 1/2$.

3. On a d'après le théorème de Riesz
$$\begin{aligned}
\boxed{f \in H^{-1}(0,1)} &\iff \exists! w \in H_0^1(0,1) : \int_0^1 f\varphi\mathrm{d}x = \int_0^1 w'\varphi'\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,1)\\
&\iff \begin{cases} -w'' = f = x^\alpha \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1)\\ w \in H_0^1(0,1)\end{cases}\\
&\iff w \in H_0^1(0,1),\ w(x) = \begin{cases} -\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{x}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\ \forall x \in]0,1[& \text{si } \alpha \neq -1\\ x\ln x - x,\ \forall x \in]0,1[& \text{si } \alpha = -1\end{cases}\\
&\iff \alpha + 2 > 1/2 \iff \boxed{\alpha > -3/2}.
\end{aligned}$$

Exercice 2.7 (Primitive d'une fonction de L^1_{loc}). *Soit u une fonction de $L^1_{\text{loc}}(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $c \in I$ et v la fonction définie par*
$$v(x) = \int_c^x u(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in I.$$

1. *Montrer que la dérivée faible de v est égale à u, et que $v \in \mathcal{C}(I)$ (v s'appelle primitive de u).*
2. *Déduire que si I est borné et $u \in L^1(I)$, alors $v \in W^{1,1}(I)$.*
3. *Déduire que si $u \in W^{1,1}(I)$, il existe une fonction $\overline{u}$ continue sur $\overline{I}$ telle que $u = \overline{u}$ p.p. sur I.*

Solution :

1. On pose $I =]a,b[$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle v', \varphi\rangle := -\langle v, \varphi'\rangle &= -\int_a^b v(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b \left[\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^c \left[\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_c^b \left[\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^c \left[\int_t^a \varphi'(x)\mathrm{d}t\right]u(t)\mathrm{d}x - \int_c^b \left[\int_t^b \varphi'(x)\mathrm{d}t\right]u(t)\mathrm{d}x \text{ (par Fubini)} \\
&= -\int_a^c [\varphi(a) - \varphi(t)]\, u(t)\mathrm{d}x - \int_c^b [\varphi(b) - \varphi(t)]\, u(t)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t := \langle u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $v' = u$.

Pour la continuité, on a pour tout $x \in I$, $h \in \mathbb{R}$ assez petit :

$$|v(x+h) - v(x)| = \int_x^{x+h} u(t)\mathrm{d}t = \int_I \chi_{[x,x+h]}(t)\ u(t)\mathrm{d}t$$

(où χ est la fonction caractéristique). On a

$$\forall h : |\chi_{[x,x+h]}(t)u(t)| \leq u(t), \quad |\chi_{[x,x+h]}(t)\ u(t)| \to 0 \ \text{ p.p.} t \in I, \text{ quand } h \to 0.$$

D'où, d'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue

$$|v(x+h) - v(x)| = \int_I \chi_{[x,x+h]}(t)\ u(t)\mathrm{d}t \longrightarrow 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Donc v est continue sur I.

2. On a $v' = u \in L^1(I)$. Il reste à montrer que $v \in L^1(I)$. On a

$$\int_I |v|\mathrm{d}x = \int_I \left|\int_c^x u(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \leq \int_I\int_I |u(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^1(I)} \times |I| < \infty.$$

D'où $v \in L^1(I)$.

Par conséquent, la primitive d'une fonction de $L^1(I)$ est dans $W^{1,1}(I)$.

3. Comme $u \in W^{1,1}(I)$, alors $u' \in L^1(I)$. D'après la question 1), la fonction v définie sue $\overline{I}$ par

$$v(x) = \int_c^x u'(t)\mathrm{d}t, \ \forall x \in \overline{I}.$$

est dans $\mathcal{C}(\overline{I})$, et $v' = u'$ dans $\mathcal{D}'(I)$. (Notons que l'on peut prendre $x \in \overline{I}$ car $u' \in inL^1(I)$, contrairement à la réponse de question 1), où u est seulement dans L^1_{loc})). Donc $u = v + C$ p.p. sur I. Il suffit donc de choisir $\overline{u} = v + C \in \mathcal{C}(\overline{I})$. Ce qui donne

$$u(x) = \overline{u}(x) = \int_c^x u'(t)\mathrm{d}t + C \text{ p.p. } x \in I.$$

Exercice 2.8. *Montrer l'injection continue suivante*

$$H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1]).$$

Solution : D'après l'exercice (2.7) question 3, il existe $\overline{u} \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $u = \overline{u}$ p.p. et $\overline{u}(x) = \int_y^x u'(t)\mathrm{d}t + c$, $\forall x, y \in [0,1]$, et il est claire que $c = u(y)$. Alors, on a

$$\text{p.p. } x \in]0,1[: u(x) = \int_y^x u'(t)\mathrm{d}t + \overline{u}(y)$$

En intégrant par rapport à y sur $(0,1)$, on obtient

$$\text{p.p. } x \in]0,1[: |u(x)| = |\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \overline{u}(y)\mathrm{d}y| \leq \int_0^1 |u'|\mathrm{d}t + \int_0^1 |u|\mathrm{d}x$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\text{p.p. } x \in]0,1[: |u(x)| \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)} = \|u\|_{H^1(0,1)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}$$

ce qui donne l'injection continue de $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$.
(l'inclusion $H^1(0,1) \subset C([0,1])$ est dans le sens où si $u \in H^1(I)$, il existe une fonction $\overline{u} \in \mathcal{C}(\overline{I})$ telle que $u = \overline{u}$ p.p. sur I).

Exercice 2.9 (Prolongation dans $W^{1,1}$)**.** *Soient $p \geq 1$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)$ et Pu la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x > 0 \\ u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $P : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ est linéaire et continue.*

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |Pu|^p\mathrm{d}x = \int_0^\infty |u(x)|^p\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 |u(-x)|^p\mathrm{d}x &= \int_0^\infty |u(x)|^p\mathrm{d}x + \int_0^\infty |u(x)|^p\mathrm{d}x \\ &= 2\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)} < +\infty.\end{aligned}$$

Donc $Pu \in L^p(\mathbb{R})$. Montrons que la dérivée au sens des distributions de Pu appartient à $L^p(\mathbb{R})$. D'après la question 4) de l'exercice précédent, on a

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t + c_0, \ \textit{p.p. } x > 0,$$

et

$$u(-x) = \int_0^{-x} u'(t)\mathrm{d}t + c_0 = \int_0^{x} -u'(-t)\mathrm{d}t + c_0, \ p.p. \ x < 0.$$

Donc $Pu(x) = \int_0^x v(x)\mathrm{d}x + c_0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$, où

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $(Pu)' = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On peut vérifie aisément que $v \in L^p(\mathbb{R})$. D'où $(Pu)' = v \in L^p(\mathbb{R})$. Par conséquent $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

2. On a d'après la question 1), $\|Pu\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = 2\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)}$ et de la même façon on montre que

$$\|(Pu)'\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \|v\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = 2\|u'\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+)}.$$

Par conséquent

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \left(\|(Pu)'\|^p_{L^p(\mathbb{R})} + \|Pu\|^p_{L^p(\mathbb{R})}\right)^{1/p} = 2^{1/p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+)}.$$

Ce qui donne la continuité de P.

Exercice 2.10. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes*

1. $u \in (H^1_0(\Omega))^\perp$.
2. $-\Delta u + u = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
u \in (H^1_0(\Omega))^\perp \quad & \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} = 0, \ \forall v \in H^1_0(\Omega) \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = 0, \ \forall v \in H^1_0(\Omega) \right. \\
& \overset{\text{Par densité}}{\Longleftrightarrow} \quad \left. \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \right\} \\
& \Longleftrightarrow \quad \langle -\Delta u + u, v\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0, \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\
& \Longleftrightarrow \quad -\Delta u + u = 0, \ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{aligned}$$

Exercice 2.11. *Soit I un intervalle borné, $u \in \mathcal{D}(\Omega)$*

1. *Montrer que*

$$\int_{I\times I} (u(x) - u(y))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq |I|^3 \|u'\|^2_{L^2(I)}, \quad \text{où } |I| = mes(I).$$

2. *Déduire l'inégalité suivant :*

$$\int_I u(x)^2 \mathrm{d}x \leq \frac{|I|^2}{2}\int_I |u'(t)|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{|I|}\left(\int_I |u(x)|\mathrm{d}x\right)^2.$$

3. Est ce que cet inégalité est vérifié pour u dans $H^1(I)$?.

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}(u(x)-u(y))^2 = |\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t|^2 &\leq \left(\int_I |u'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \int_I 1^2\mathrm{d}t \int_I u'^2\mathrm{d}t \\ &= |I|\ \|u'\|^2_{L^2(I)}\end{aligned}$$

En intégrant sur I par rapport à x et y, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{I\times I}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leq \int_{I\times I}|I|\ \|u'\|^2_{L^2(I)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= |I|\ \|u'\|^2_{L^2(I)}\int_{I\times I}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |I|^3\ \|u'\|^2_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\int_{I\times I}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{I\times I}(u(x)^2+u(y)^2+-2u(x)u(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_I\left(\int_I u(x)^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_I\left(\int_I u(y)^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - 2\int_I u(x)\mathrm{d}x\int_I u(y)\mathrm{d}y \\ &= 2|I|\int_I u(x)^2\mathrm{d}x - 2\left(\int_I u(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

En substituant dans l'inégalité de la question 1), on obtient

$$2|I|\int_I u(x)^2\mathrm{d}x \leq |I|^3\ \|u'\|^2_{L^2(I)} + 2\left(\int_I u(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

en divisant sur $|I|$, on obtient le résultat.

3. Oui. En effet, d'après le théorème de densité (Voir cours 2 chapitre 2), l'espace $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ est dense dans $H(0,1)$. C'est à dire pour tout $u \in H(0,1)$, il existe une suite $(u_n)_n$ de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ telle que

$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{dans } H^1(0,1).$$

Ce qui implique que

$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{dans } L^2(0,1), \quad \text{et } u_n' \longrightarrow u, \quad \text{dans } L^2(0,1).$$

Et d'après la question 2), comme $u_n \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, alors elle satisfait l'inégalité

$$\int_I u_n^2\mathrm{d}x \leq \frac{|I|^2}{2}\int_I |u_n'|^2\mathrm{d}t + \frac{1}{|I|}\left(\int_I |u_n|\mathrm{d}x\right)^2.$$

En passant à la limite, on obtient l'inégalité pour $u \in H(0,1)$.

Exercice **2.12.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et connexe. Montrer l'inégalité de Poincaré*

$$\exists C > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}. \tag{2.24}$$

Solution : On a

$$(2.24) \Longleftrightarrow \exists C > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) : \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}} \leq C.$$

Par l'absurde, On suppose que : Il existe une suite $(u_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall n : \frac{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u_n\|_{(L^2(\Omega))^N}} \geq n. \tag{2.25}$$

On pose $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. Alors, on a

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{(L^2(\Omega))^N} := \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^N}} \leq \frac{1}{n}, \ \forall n. \tag{2.26}$$

Et on a

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} := \|v_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2, \ \forall n.$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est borné dans $H^1(\Omega)$ qui s'injecte dans $L^2(\Omega)$ de manière compacte. Alors On peut extraire une sous-suite de $(v_n)_n$, notée encore par $(v_n)_n$ telle que

$$v_n \longrightarrow v, \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, d'après (2.26), on a $\|v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et on a $\nabla v_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Donc

$$v_n \longrightarrow v \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } \nabla v_n \longrightarrow \nabla v = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

D'où Comme Ω est connexe alors $v = C$ dans Ω et $C \neq 0$ car $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Mais $v \in H_0^1(\Omega)$, alors la trace de v : $Tv := 0$ et comme $v = C$ dans Ω alors $v = \overline{v}$ p.p. dans Ω, où $\overline{v} = C$ dans $\overline{\Omega}$. D'où

$$Tv = T\overline{v} := \overline{v}_{|\partial\Omega} = C \text{ car } \overline{v} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$

Donc $C = 0$. D'où on obtient la contradiction.

Exercice **2.13.** *Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^1 par morceaux et à support borné dans Ω. Montrer que $f \in H^1(\Omega)$.*

Solution : Comme f est continue sur $\overline{\Omega}$, et à support compact, alors elle appartient à $L^2(\Omega)$. Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à support borné, par définition, il existe une famille finie d'ouverts $\{\Omega_i : i = 1, ..., m\}$ deux à deux disjoints, telle que $\cup_{i=1}^m \overline{\Omega}_i = supp f \subset$

Ω et $f = f_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $\overline{\Omega_i}$. Pour tout $i \neq j$, on pose $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, $n^i(x)$ est le vecteur normale unitaire extérieur en $x \in \partial\Omega_i$. On a

$$\forall x \in \Gamma_{ij} : n^i(x) = -n^j(x).$$

D'où, en posant $v := \partial_k f$ (au sens des distributions), pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle &:= -\int_\Omega f \ \partial_k \varphi \mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} f \ \partial_k \varphi \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^m \left(-\int_{\partial\Omega_i} f v n_k^i dS + \int_{\Omega_i} \partial_k f \ \varphi \mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega_i} f v n_k^i dS &= \sum_{i,j=1, i\neq j}^m \int_{\Gamma_{ij}} f v n_k^i dS \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \int_{\Gamma_{ij}} f v (n_k^i + n_k^j) dS = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\langle v, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} \partial_k f \ \varphi \mathrm{d}x.$$

Donc $v(x) = \partial_k f_{|\Omega_i}(x)$, $\forall x \in \Omega_i$, $i = 1, ..., m$. D'autre part, on a

$$\int_\Omega v^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} v^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} \partial_k f_{|\Omega_i}^2 \mathrm{d}x < \infty$$

D'où $v \in L^2(\Omega)$. Part conséquent $f \in H^1(\Omega)$.

3 Problèmes aux limites linéaires de seconde ordre

Notation 3.1. Si H est un espace de Hilbert alors on note par (u,v) le produit scalaire entre u et v dans H, et par $\langle f, v \rangle$ le produit de dualité entre $f \in H'$ et $v \in H$.

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

3.1 Quelques définitions

Nous nous intéressons à un problème d'EDP elliptique linéaire de second ordre suivant

$$Lu = f \text{ dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnu, $u := u(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, L est un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sous forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u} \tag{3.1}$$

ou sans forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u} \tag{3.2}$$

où les fonctions a^{ij}, b^i, c sont les coefficients de l'opérateur L.

Un opérateur important de ce type est l'opérateur Laplacien défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ (il suffit de prendre } a^{ij} = \delta^{ij}, b_i = c = 0).$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est l'inconnu, $u := u(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. La condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ s'appelle la condition au limite de Dirichlet.

Remarque 3.1. *Si les coefficients a^{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ sont de classe C^1 alors l'opérateur L donné par sa forme divergentielle peut être écris sans forme divergentielle et vice versa. En effet l'équation en forme divergence (3.1) devient*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x) u_{x_i} + c(x) u \tag{3.3}$$

où $\tilde{b^i} = b^i - \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}$, et cette équation est bien sans forme de divergence.

Dans ce qui suit on suppose que $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Définition 3.1. On dit que l'opérateur L est uniformément elliptique s'il existe $\theta > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j > \theta|\xi|^2 \tag{3.4}$$

pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

Remarque 3.2. *La condition d'ellipticité signifie que pour tout $x \in \Omega$, la matrice symétrique $A(x) = (a^{ij}(x))_{ij}$ est définie positive et ses valeurs propres sont plus grands que θ.*

Exercice 3.1. Montrer que les opérateurs suivant sont uniformément elliptiques :

1. L'opérateur Laplacien : $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
2. L'opérateur : $Lu = \operatorname{div}(a(x)\nabla u)$, où $a(x) \geq c_0 > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

3.2 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème suivant sert à démontrer l'existence de la solution pour les problèmes elliptiques linéaires.

Théorème 3.1 (Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$. Supposons que*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (forme bilinéaire), vérifiant les deux conditions suivantes

i) B est continue, c'est à dire :

$$\exists \alpha > 0 : |B(u, v)| \leq \alpha\|u\|\|v\|, \ \forall u, v \in H$$

ii) B est coercive (ou elliptique) sur H, c'est à dire

$$\exists \beta > 0 : B(u, u) \geq \beta\|u\|^2, \ \forall u \in H.$$

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue (i.e. $f \in H'$). Alors il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$B(u, v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H \tag{3.5}$$

Remarque 3.3. *Si le corps est $\mathbb{C}$, alors l'énoncé du théorème est comme suivant :*
Soit a est une forme sesquilinéaire sur H (i.e. linéaire par rapport la première variable et semiliniéaire par rapport la deuxième) et continue telle que

$$\exists \beta > 0 : Re B(u, u) \geq \beta\|u\|^2, \ \forall u \in H.$$

Alors pour tout $f \in H'$, il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$B(u, v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H \tag{3.6}$$

Preuve. Soit u un élément fixé de H. Il est claire que l'application $v \mapsto B(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément unique $w \in H$ (qui dépends de u) tel que $B(u,v) = (w,v),\ (\forall v \in H)$. Notons $Au = w$ alors,

$$B(u,v) = (Au, v),\ \forall v \in H. \tag{3.7}$$

On montre que l'application $A : H \to H$, qui à u associe Au est linéaire et continue. En effet, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u_1, u_2 \in H$, on a

$$\begin{aligned}
(A(\lambda u_1 + \mu u_2), v) &= B[\lambda u_1 + \mu u_2), v] \text{ par } (3.7) \\
&= \lambda B[u_1, v] + \mu B[u_2, v] \\
&= \lambda(Au_1, v) + \mu(Au_2, v) \text{ de nouveau par}(3.7) \\
&= (\lambda Au_1 + \mu Au_2, v)
\end{aligned}$$

Cette égalité est obtenu pour tout $v \in H$, d'où $A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda Au_1 + \mu Au_2$. Pour la continuité, on a

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \|Au\|.$$

Par conséquent $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$, pour tout $u \in H$. Donc A est continue. Maintenant, on montre que A est bijective. On commence par l'injectivité. Comme A est linéaire, il suffit de montrer que ($Au = 0 \Longrightarrow u = 0$). On a

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u,u) = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\|,$$

d'où $\beta \|u\| \leq \|Au\|$, il vient que si $Au = 0$ alors $u = 0$.

Montrons que A est surjective c'est à dire l'image de A : $Im(A) = H$. On montre d'abord que $Im(A)$ est fermé et puis on montre qu'il est dense dans H. Soit $(u_n)_n$ une suite dans H telle que $(Au_n)_n$ converge vers $w \in H$, alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta \|u_p - u_q\|^2 \leq B[u_p - u_q, u_p - u_q] = (A(u_p - u_q), u_p - u_q) \leq \|Au_p - Au_q\| \|u_p - u_q\|.$$

ce qui implique

$$\|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{\beta} \|Au_p - Au_q\|.$$

Comme $(Au_n)_n$ est convergente, on en déduit que $(u_n)_n$ est de Cauchy. D'où la suite $(u_n)_n$ converge vers un élément $u \in H$. On a par continuité de A,

$$\|Au - w\| = \lim_{n\to\infty} \|A(u - u_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} (\alpha \|u - u_n\|) = 0,$$

d'où $Au = w$ et donc $w \in Im(A)$.

On montre que $Im(A)$ est dense dans H. Il suffit de montrer que $(Im(A))^\perp = \{0\}$. Soit $v \in (Im(A))^\perp$. Alors $(Av, v) = 0$, ce qui implique que $\beta \|v\|^2 \leq B[v, v] = (Av, v) = 0$ et donc $v = 0$. Il vient que $(Im(A))^\perp = \{0\}$. Donc $Im(A)$ est dense dans H. L'image de A est fermé et dense dans H, d'où $Im(A) = H$ et la surjectivité de A.

Ensuite, d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $w \in H$ tel que

$$\langle f, v \rangle = (w, v),\ \forall v \in H.$$

Grâce à la bijectivité de A en en déduit qu'il existe un élément unique $u \in H$ tel que $Au = w$ et par conséquent

$$B(u, v) = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

Ce qui termine la preuve. □

Un résultat plus générale, est celui de Stampacchia

Théorème 3.2. *Soient H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$ et C un convexe fermé de H. a une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors pour tout $f \in H'$, il existe un élément unique $u \in C$ tel que*

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle, \ \forall v \in C. \tag{3.8}$$

Remarque 3.4. Si de plus C est un sous espace vectoriel, alors l'inégalité (3.8) est équivalent à

$$a(u, w) = \langle f, w\rangle, \ \forall w \in C.$$

Il suffit de prendre $v = \pm w + u \in C$. Dans le cas où $C = H$, on obtient le théorème de Lax-Milgram.

Démonstration. Comme $f \in H'$, alors d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $\phi \in H$ tel que

$$\langle f, v\rangle = (\phi, v), \ \forall v \in H.$$

(Rappelons que (,) désigne le produit scalaire sur H). Considérons l'opérateur $A : H \longrightarrow H$ défini par $(Au, v) = a(u, v), \forall v \in H$ (voir la preuve du théorème de Lax-Milgram (3.1)). Alors, l'inégalité (3.8) est équivalent à

$$(Au - \phi, v-u) \geq 0, \ \forall v \in C.$$

On a pour tout $\beta > 0$:

$$((Au - \phi, v-u) \geq 0, \ \forall v \in C) \Longleftrightarrow ((\beta(Au - \phi) + u - u, v-u) \geq 0, \ \forall v \in C)$$

C'est à dire u est la projection sur C de $\beta(Au - \phi) + u - u$. Autrement dit u est un point fixe de l'opérateur T défini sur H par

$$v \longmapsto T(v) := Pr_C(\beta(Au - \phi) + u - u).$$

Donc il suffit de montrer que T est contractante pour certaine valeur $\beta > 0$ (en exercice). Ce qui fini la preuve. □

Exercice 3.2.

1. Dans le théorème de Lax-Milgram, montrer que si en plus a est symétrique alors u est caractérisé par

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \text{ où } J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle.$$

2. Même question pour le théorème de Stampacchia avec le minimum sur C.

3.3 Existence pour le problèmes de Dirichlet

Le problème elliptique de Dirichlet est les problèmes aux limites suivant

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = \psi & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

où L est défini par défini sous forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u} \tag{3.10}$$

La condition aux limites $u = \psi$ sur $\partial\Omega$ s'appelle condition de Dirichlet sur le bord de Ω (homogène si $\psi \equiv 0$ et non non homogène si $\psi \neq 0$).

3.3.1 Formulation variationnelle et solution faible

On commence par le problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

Tout d'abord et dans tout la suit, on suppose que

$$a^{ij},\ b^i,\ c \in L^\infty(\Omega)\ (i, j = 1, \ldots, N) \tag{3.12}$$

Supposons que u est une solution du problème (3.11) appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $f \in L^2(\Omega)$.

En multipliant l'EDP $Lu = f$ par une fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\boxed{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v \mathrm{d}x + \int_\Omega cuv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x.} \tag{3.13}$$

Le terme au bord s'annule car $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$. Les termes de l'identité ci-dessus sont bien défini dès que $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^2(\Omega))^N$. C'est-à-dire $u \in H_0^1(\Omega)$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, cette identité reste valable pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Maintenant supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfait l'équation (3.13). Alors l'équation $Lu = f$ dans Ω est évidement satisfait seulement au sens des distributions (à vérifier en exercice), et la condition au bords $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est satisfait au sens de trace (i.e. $Tu = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$)) tenant en compte la régularité du domaine $\partial\Omega$. Dans ce cas, on dit que u est une solution faible du problème (3.11). De plus, si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ alors $u \equiv Tu$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et l'identité $Lu = v$ devient vrai pour tout $x \in \Omega$. dans ce cas u s'appelle solution forte (ou bien solution classique). Pour résumer on donne la définition suivant :

Définition 3.2. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.

1. L'identité

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a^{ij}u_{x_i}v_{x_j}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} b^{i}u_{x_i}v\mathrm{d}x+\int_{\Omega} cuv\mathrm{d}x=\langle f,v\rangle, \quad \text{pour tout } v\in H_0^1(\Omega).} \tag{3.14}$$

s'appelle formulation variationnelle associée au problème (3.11).

2. La forme bilinéaire associée à l'opérateur L est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\boxed{B(u,v):=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a^{ij}u_{x_i}v_{x_j}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} b^{i}u_{x_i}v\mathrm{d}x+\int_{\Omega} cuv\mathrm{d}x} \tag{3.15}$$

3. On dit que $u\in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (3.11) si elle satisfait la formulation variationnelle (3.13)

4. La solution faible $u\in H_0^1(\Omega)$ est dite solution forte (ou bien solution classique) si elle appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

3.3.2 Existence de la solution

On applique le théorème de Lax-Milgram pour avoir l'existence de la solution. On a le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Si L est uniformément elliptique et $a^{ij},b_i,c\in L^\infty(\Omega)$. avec $c\geq\mu>0$ où μ est un constant assez grand. Alors le problème de Dirichlet* (3.11) *admet une solution faible unique.*

Démonstration. La solution faible $u\in H_0^1(\Omega)$ -par définition- vérifie la formulation variationnelle

$$B(u,v)=\langle f,v\rangle, \text{ pour tout } v\in H_0^1(\Omega).$$

où B est la forme bilinéaire définie par

$$B(u,v):=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a^{ij}u_{x_i}v_{x_j}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} b^{i}u_{x_i}v\mathrm{d}x+\int_{\Omega} cuv\mathrm{d}x.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram (3.1). Pour cela, on démontre que B et continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

Commençons par la continuité : On a

$$|B(u,v)| \;\leq\; \int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}|a^{ij}u_{x_i}v_{x_j}|\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|b^{i}u_{x_i}v|\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|cuv|\mathrm{d}x$$

Commençons à majorer le premier terme

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}|a^{ij}|u_{x_i}||v_{x_j}|\mathrm{d}x\leq\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_i}v_{x_j}|\mathrm{d}x\leq C\int_{\Omega}|\nabla u||\nabla v|\mathrm{d}x$$

où $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{1\leq i,j\leq N} \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |a^{ij}||u_{x_i}||v_{x_j}|\mathrm{d}x \leq \; C_1 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = C_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pour le deuxième et le troisième termes, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et puis Poincaré :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i=1}^n |b^i u_{x_i} v|\mathrm{d}x &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i} v|\mathrm{d}x \leq C\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \nabla u||v|\mathrm{d}x \\ &\leq C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

(où $\|b\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{1\leq i\leq N} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$). Et on a

$$\int_\Omega |c||u||v|\mathrm{d}x \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}|B(u,v)| &\leq (C_1 + C_2 + C_3)\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Ce qui donne la continuité de B dans $H_0^1(\Omega)$. Montrons maintenant que B est coercive. i.e.

$$\exists \beta > 0 : B(u,u) \geq \beta\|u\|^2, \;\; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

On a d'après la condition d'ellipticité (3.4) :

$$\begin{aligned}\theta \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \mathrm{d}x \\ &= B(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} u \mathrm{d}x - \int_\Omega c u^2 \mathrm{d}x \\ &\leq B(u,u) + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u||u|\mathrm{d}x - \mu \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy (avec ε), on a

$$\int_\Omega |\nabla u||u|\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit de sorte que

$$\frac{\varepsilon}{2}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\theta}{2}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x &\leq B(u,u) + \left(\frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_{L^\infty(\Omega)} - \mu\right)\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x \\ &= B(u,u) + (C-\mu)\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Si on choisit $\mu \geq C$ alors, on obtient

$$B(u,u) \geq \frac{\theta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x := \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où la coercivité de B sur $H_0^1(\Omega)$. Comme $f \in H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un élément unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Donc u est l'unique solution faible du problème (3.11). □

Exemple 3.1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.16}$$

Alors, $Lu = -\Delta u + u$ et $a^{ij} = \delta^{ij}$, $b_i = 0$ et $c = 1$. la formulation variationnelle associée est

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x.$$

La forme bilinéaire associé est définie par

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \mathrm{d}x$$

On a B est continue car

$$\begin{aligned}|B(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \\ &= \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Pour la coercivité, on a

$$B(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \geq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Considérons maintenant le problème de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = \psi & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour la simplicité, on considère $Lu := -\Delta u + u$. Alors, on essaye de donner un sens à la solution du problème de Dirichlet non homogène (3.17). Si u est une solution appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors elle satisfait pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx.$$

cette équation à un sens pour $u \in H^1(\Omega)$. Inversement, si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie l'équation précédent, alors elle vérifie l'équation $Lu = f$ au sens des distributions et d'après le théorème de trace (voir cours de chapitre 2) la condition au bords a un sens si $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Supposons que $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors il existe une fonction $g \in H^1(\Omega)$ telle que $Tg = \psi$ dans $\partial\Omega$. Posons $w = u - g$. Alors le problème de Dirichlet (3.17) est équivalent au problème de Dirichlet homogène suivant

$$\begin{cases} Lw = f - Lg & \text{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.18}$$

et u est une solution de (3.17) si et seulement si w est une solution de (3.18).

Exercice 3.3. Montrer que si $f \in H^{-1}(\Omega)$ alors $f - Lg \in H^{-1}(\Omega)$.

On donc la définition suivante

Définition 3.3. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.

1. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (3.17) si $w \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (3.18).
2. La solution faible $u \in H^1(\Omega)$ est dite solution forte (ou bien solution classique) si elle appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Alors on conclut par le résultat d'existence suivant

Théorème 3.4. *Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\psi \in H^{1/2}(\Omega)$, le problème de Dirichlet non homogène* (3.17) *admet une solution faible unique $u \in H^1(\Omega)$.*

3.4 Problème de Neumann homogène

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Le problème de Neumann homogène est donné par

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

où L est défini par défini sous forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u} \tag{3.20}$$

et $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieur de u, c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \nabla u(x).\overrightarrow{n(x)}$ et $\overrightarrow{n(x)}$ et le vecteur unitaire de la normale extérieur à $\partial\Omega$ en x.

Dans la suite on va considérer le cas particulier où

$$Lu = -\Delta u + u$$

et on étudie la question d'existence du problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

Supposons que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (3.21) telle que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) := \{\overline{u}_{|\overline{\Omega}} : \overline{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)\}$ et supposons que $f \in L^2(\Omega)$. Soit $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) := \{\overline{v}_{|\overline{\Omega}} : \overline{v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)\}$. On multiplie l'équation de (3.21) par v et en intègre par partie, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, alors $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = 0$. D'où on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \tag{3.22}$$

Comme l'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, alors l'inégalité précédente est satisfaite pour tout $v \in H^1(\Omega)$ (à vérifier en exercice). On a donc u satisfait la formule suivante

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.23}$$

et cette équation à un sens dès que $u \in H^1(\Omega)$. inversement supposons que $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (3.23). Si de plus $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, alors d'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega -\Delta v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.24}$$

Si on choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors (3.24) devient

$$\int_\Omega -\Delta v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{3.25}$$

ce qui donne $-\Delta u + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. et cette dernier équation est satisfait p.p. dans Ω. D'où l'équation (3.24) implique que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $(H^{1/2}(\Omega))'$. Donc u satisfait le problème (3.21). On donne alors la définition suivante

Définition 3.4. *On dit que u est une solution faible de* (3.21) *si $u \in H^1(\Omega)$ et satisfait la formulation variationnelle* (3.23). *Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ alors u s'appelle solution classique.*

3.5 Problèmes aux limite mixtes

3.5.1 Conditions aux limites mêlées

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } I =]0,1[\\ u(0) = 0, \;\; u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Supposons que que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution de (3.26), alors en multiplions l'équation par $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, on obtient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x.$$

On a $u'(1) = 0$ et on choisit v telle que $v(0) = 0$, alors l'équation ci-dessus devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \;\; \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \;\; v(0) = 0. \tag{3.27}$$

On donne le résultat suivant

Proposition 3.4.1. *1. L'espace $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]) : v(0) = 0\}$ est dense dans l'espace*

$$H := \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = 0\}.$$

2. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. En exercice □

D'après la densité, l'équation (3.27) est équivalente à la formulation variationnelle suivante

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \;\; \forall v \in H. \tag{3.28}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution unique $u \in H$ de (3.28), qui est appelée solution faible de (3.26).

Exercice 3.4. *Si $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$ est une solution faible de (3.26). Montrer qu'elle est solution classique (i.e. u satisfait l'équation de (3.26) et les conditions aux limites).*

3.5.2 Condition aux limites périodiques

Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } I =]0,1[, \quad f \in L^2(0,1) \\ u(0) = u(1), \;\; u'(1) = u'(1) \end{cases} \tag{3.29}$$

Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$ une solution classique de (3.29). On a pour tout $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$:

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \;\; \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]) \tag{3.30}$$

Si on choisit v telle que $v(0) = v(1)$, alors

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = v(0)(u'(1) - u'(0)) = 0.$$

D'où l'équation (3.30) devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ v(0) = v(1). \tag{3.31}$$

Exercice 3.5. *1. Montrer que l'espace* $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ v(0) = v(1)\}$ *est dense dans l'espace*

$$H := \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1)\}.$$

2. Montrer que l'espace H est un espace de Hilbert.

D'après la question 1 de l'exercice, l'équation (3.31) est équivalent à

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H, \tag{3.32}$$

c'est la formulation variationnelle associée au problème (3.29).

Exercice 3.6. *Montrer que si $u \in H \cap \mathcal{C}^2([0,1])$ et satisfait* (3.32) *alors elle satisfait le problème* (3.29).

On donne alors la définition suivante

Définition 3.5. *On dit que u est une solution faible de* (3.21) *si $u \in H$ et satisfait la formulation variationnelle* (3.32). *Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ alors u s'appelle solution classique.*

3.6 Exercices corrigés

Rappel. Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ avec $0 \leq k \leq \infty$, l'espace

$$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) = \{\overline{u}_{|\overline{\Omega}} : \overline{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)\}.$$

Si Ω est borné et régulier alors $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et en particulier $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ et aussi dense danse dans $H^1(\Omega)$ pour tout $1 \leq k \leq \infty$. si Ω n'est pas borné alors $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 3.7. *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \ \text{dans } I =]0,1[, & f \in L^2(0,1) \\ u(0) = u(1), \ u'(1) = u'(1) \end{cases} \tag{3.33}$$

1. *Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$ une solution classique de* (3.33). *Donner la formulation variationnelle satisfait par u, (En acceptant que l'espace* $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ v(0) = v(1)\}$ *est dense dans l'espace*

$$H := \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1)\})$$

2. *Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible u (Solution de la formulation variationnelle).*
3. *Si la solution faible $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$, montrer qu'elle est solution classique de*(3.33)

Solution :

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ une solution classique de (3.33). On multiplie l'équation de(3.33) par $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]) \quad (3.34)$$

Si on choisit v telle que $v(0) = v(1)$, alors

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = v(0)(u'(1) - u'(0)) = 0.$$

D'où l'équation (3.34) devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1). \quad (3.35)$$

Grâce à la densité, l'équation (3.35) est équivalent à

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in H, \quad (3.36)$$

c'est la formulation variationnelle associée au problème (3.33).

2. On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire a définie sur H par

$$a(u,v) := \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x$$

et la forme linéaire ℓ définie par

$$\ell(v) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in H.$$

Pour la coercivité de a, on a

$$a(u,u) = \int_0^1 u'^2\mathrm{d}x + \int_0^1 u^2\mathrm{d}x = \|u\|^2_{H^1(0,1)}$$

Ce qui implique la coercivité. Pour la continuité, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans L^2 et puis dans $\mathbb{R}^2$, on obtient

$$\begin{aligned} a(u,v) &\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\leq \left(\|u'\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{L^2}\right)^{1/2}\left(\|v'\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2}\right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \end{aligned}$$

ce qui donne la continuité de la forme bilinéaire. Pour la continuité de la forme linéaire, on a

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1(0,1)} = C\|v\|_{H^1(0,1)}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution faible $u \in H$.

3. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap H$ une solution faible. Alors u vérifie l'équation (3.36). En choisissant $v \in \mathcal{D}(0,1)$ dans (3.36), et comme $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, en intégrant par partie, (3.36) devient
$$\int_0^1 (-u'' + u)v\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x$$
ce qui implique que $-u'' + u = f$ dans Ω. Maintenant, on choisit $v \in \mathcal{C}^1([0,1]$, $v(1) = v(0)$. et on intègre le premier terme dans (3.36) par partie, on obtient
$$-\int_0^1 u''v\mathrm{d}x + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x$$
Comme $-u'' + u = f$, alors on en déduit que $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$. Comme $v(0) = v(1)$, alors on obtient $u'(0) = u'(1)$. Donc u satisfait le problème (3.33).

Exercice 3.8. *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{dans } I =]0,1[\\ u'(0) - ku(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

avec $f \in L^2(0,1)$.

1. *Montrer que l'espace $H := \{w \in H^1(0,1) : w(1) = 0\}$ est un espace de Hilbert.*
2. *Si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution (classique) de (3.37), Montrer que*
$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1], v(1) = 0.$$
3. *Montrer que l'espace $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1] : v(1) = 0\}$ est dense dans H.*
4. *Déduire la formulation variationnelle du problème (3.37) :*
$$\boxed{\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H.} \tag{3.38}$$
5. *Pour $k \geq 0$, montrer que l'équation précédente admet une solution unique $u \in H$ (c'est la solution faible de (3.37)).*
6. *Si la solution faible $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, montrer qu'elle est classique (i.e. u satisfaite (3.37)).*

Solution :

1. Tout d'abord, on montre que H est un sous espace fermé de $H^1(0,1)$. On $H \subset H^1(0,1)$ (par définition). Soit $(u_n)_n$ une suite de H qui converge vers u dans $H^1(0,1)$. Montrons que $u \in H$. D'après l'injection continue $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1]$, on a $u_n, u \in \mathcal{C}([0,1]$

$$\|u_n - u\|_{\mathcal{C}([0,1]} \leq C\|u_n - u\|_{H^1(0,1)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

D'où $u_n \longrightarrow u$ uniformément dans $\overline{\Omega}$. Donc

$$\forall x \in [0,1] : u_(x) \longrightarrow u(x)$$

en particulier pour $x = 1$, on a $u_n(1) \longrightarrow u(1)$. Comme $u_n \in H$ alors $u_n(1) = 0$, donc $u(1) = 0$. D'où $u \in H$. Ce qui implique que H est fermé. Montrons que H est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy de $H \subset H^1(0,1)$ (par rapport la norme de $H^1(0,1)$) donc la suite est convergente dans $H^1(0,1)$, car $H^1(0,1)$ est complet, comme H est fermé, alors la limite de u_n est dans H. Donc la suite est convergent dans H. D'où H est complet avec la norme $\|.\|_{H^1(0,1)}$. Comme $(H^1(0,1), \|\|_{H^1(0,1)})$ est un espace de Hilbert, alors $(H, \|\|_{H^1(0,1)})$ est aussi.

2. On multiplie l'équation par $v \in \mathcal{C}^1([0,1] : v(1) = 0$, et on intègre par partie, on obtient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x - u'(1)v(1) + u(0)v(0) + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x.$$

Comme $v(1) = 0$ et $u'(0) = ku(0)$ alors on obtient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1], v(1) = 0.$$

3. Soit $w \in H$ alors $u \in H^1(0,1)$. Comme $\mathcal{C}^1([0,1])$ est dense dans $H^1(0,1)$, alors il existe une suite $(\phi_n)_n$ de $\mathcal{C}^1([0,1])$ telle que

$$\phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w, \quad \text{dans } H^1(0,1).$$

On pose $w_n = \phi_n \eta_n$, où $\eta_n \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ et la fonction de troncature définie par

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in]1 - 1/2n, 1] \\ \text{entre 0 et 1} & si \quad x \in [1 - 1/n, 1 - 1/2n] \\ 1 & si \quad x \in [0, 1 - 1/n] \end{cases} \tag{3.39}$$

Alors $w_n \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $w_n(1) = 0$, et on peut démontrer que $w_n \longrightarrow w$ dans $H^1(0,1)$ (Voir le cours de densité).

4. Soit $v \in H$, alors grâce à la densité, il existe une suite $v_n \in\in \mathcal{C}^1([0,1])$, $v_n(1) = 0$, convergente vers v dans $H^1(0,1)$. D'après la question 2, on a

$$\int_0^1 u'v_n'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv_n\mathrm{d}x + ku(0)v_n(0) = \int_0^1 fv_n\mathrm{d}x, \tag{3.40}$$

Comme $v_n \longrightarrow v$ dans $H^1(0,1)$, alors $v_n \longrightarrow v$ et $v_n' \longrightarrow v'$ dans $L^2(0,1)$ et grâce à l'injection de Sobolev $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$, $v_n(0) \longrightarrow v(0)$. On en déduite que

$$\begin{array}{rcl}\left|\int_0^1 u'v_n'\mathrm{d}x - \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x\right| & = & |\int_0^1 u'(v_n'-v')\mathrm{d}x| \\ & \leq & \int_0^1 |u'||v_n'-v'|\mathrm{d}x \\ & \overset{Cauchy-Schwartz}{\leq} & \|u'\|_{L^2}\underbrace{\|v_n'-v'\|_{L^2}}_{\to 0} \longrightarrow 0.\end{array}$$

D'où$\int_0^1 u'v_n'\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$. De la même manière on obtient

$$\int_0^1 uv_n\mathrm{d}x \to \int_0^1 uv\mathrm{d}x,\ \int_0^1 fv_n\mathrm{d}x - \int_0^1 fv\mathrm{d}x.$$

En passant donc à la limite dans (3.40), on obtient

$$\boxed{\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in H.} \tag{3.41}$$

5. On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire a définie sur H par

$$a(u,v) := \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0),\ \forall u,v \in H$$

et la forme linéaire ℓ définie par

$$\ell(v) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in H.$$

Pour la coercivité de a, on a

$$a(u,u) = \int_0^1 u'^2\mathrm{d}x + \int_0^1 u^2\mathrm{d}x + ku(0)^2 \geq \int_0^1 u'^2\mathrm{d}x + \int_0^1 u^2\mathrm{d}x = \|u\|_{H^1(0,1)}^2$$

($k \geq 0$). Pour la continuité, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans L^2 et puis dans $\mathbb{R}^2$ et on utilise l'injection $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} a(u,v) & \leq & \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + k|u(0)v(0)| \\ & \leq & \left(\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)^{1/2}\left(\|v'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right)^{1/2} + k\|u\|_{\mathcal{C}^0}\|u\|_{\mathcal{C}^0} \\ & \leq & \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} + k\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \\ & = & (1+k)\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \end{array}$$

ce qui donne la continuité de la forme bilinéaire. Pour la continuité de la forme linéaire, on a

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1(0,1)} = C\|v\|_{H^1(0,1)}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution faible $u \in H$.

6. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap H$ une solution faible. i.e. u satisfait l'équation (3.38). On choisissant $v \in \mathcal{D}(0,1)$, (3.38) devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

en intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^1 (-u'' + u)v\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

ce qui implique que $-u'' + u = f$ dans Ω. Maintenant, on choisit $v \in \mathcal{C}^1([0,1]$, $v(1) = 0$. et on intègre le premier terme dans (3.38) par partie, on obtient

$$-\int_0^1 u''v\mathrm{d}x + \underbrace{u'(1)v(1)}_{=0} - u'(0)v(0) + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

Comme $-u'' + u = f$, alors on en déduit que $-u'(0)v(0) + ku(0)v(0) = 0$. Comme $v(0)$ est quelconque, alors on obtient $u'(0) = ku(0)$. Donc u satisfait le problème (3.37).

Exercice 3.9. *Soit à résoudre le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u + V.\nabla u &= f \ \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.42}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, V est une fonction assez régulière à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $divV = 0$.

1. *Trouver la formulation variationnelle du problème* (3.42).
2. *Montrer l'existence de la solution faible.*
3. *Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$, montrer qu'elle vérifier le problème* (3.42) *dans un sens à préciser.*

Solution

1. Supposons que u est une solution assez régulière de (3.42). Alors on multiplie l'équation par $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}$ qui s'annule sur $\partial\Omega$, on obtient après intégration par partie :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

Comme l'espace $\{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} : v_{|\partial\Omega} = 0\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors l'équation précédente est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.43}$$

2. On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire définie sur $H_0^1(\Omega)$ par
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u v \mathrm{d}x$$
et la forme linéaire suivante
$$\ell(v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x.$$
On commence par la coercivité : On a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$
$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla u \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u u \mathrm{d}x.$$
On a en appliquant la formule de Green
$$\begin{aligned}\int_\Omega V.\nabla u u \mathrm{d}x = \int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \mathrm{div}(uV)u + \underbrace{\int_{\partial\Omega} u^2 V.n dS}_{=0} \\ &= -\int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega \mathrm{div} V u^2 \mathrm{d}x}_{=0} \\ &= -\int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x\end{aligned}$$
Ce qui implique que $\int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x = 0$ Donc $a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. D'où a est coercive. Pour la continuité, on a par l'inégalité de Cauchy Schwartz et de Poincaré
$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|V\|_\infty \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)} + C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq (1+C)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$
(Rappelons que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$) Pour la continuité de ℓ, on a
$$\ell(v) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$
D'où on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram et démontrer l'existence d'une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

3. Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$. Alors en appliquant la formule de Green dans la formulation variationnelle (3.43), on obtient
$$\int_\Omega -\Delta u v \mathrm{d}x + \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{d}x}_{=0} + \int_\Omega V.\nabla u v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.44}$$
Si on choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors on obtient
$$\int_\Omega -\Delta u v \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui implique que $-\Delta u + V.\nabla u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $\Delta u,\ \nabla u,\ f \in L^2(\Omega)$ alors $-\Delta u + V.\nabla u = f$ p.p. Ω. D'où u satisfait le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + V.\nabla u &= f \text{ p.p. dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.45}$$

Exercice 3.10. *Soit à résoudre le problème de Neumann suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.46}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in (H^{1/2}(\partial\Omega))' := H^{-1}(\Omega)$. Ω est borné et régulier.

1. *Donner la formulation variationnelle du problème* (3.46)*.*
2. *Montrer l'existence de la solution faible.*
3. *Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$, montrer qu'elle vérifier le problème* (3.46) *dans un sens à préciser.*
4. *Considérons le problème de Neumann suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.47}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in (H^{1/2}(\partial\Omega))' := H^{-1/2}(\Omega)$. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible u dans l'espace

$$H = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0\}$$

*(**Ind.** utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger suivant pour la coercivité de la forme bilinéaire).*

$$\exists C > 0,\ \forall u \in H^1(\Omega) : \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega u dx\right)^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Solution

1. Soit u une solution assez régulière de (3.46). On multiplie par $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et on intègre par partie, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx.$$

Grâce à la condition au bord, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv dS.$$

Comme l'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, alors on aura la formulation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx + \langle g, v\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))' \times H^{1/2}(\partial\Omega)},\quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{3.48}$$

2. On applique le théorème de Lax-Milgram : La forme bilinéaire associée est définie sur $H^1(\Omega)$ par
$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x+\int_\Omega uv\mathrm{d}x.$$
La forme linéaire est définie par
$$\ell(v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega} gvdS.$$
La coercivité et la continuité sont immédiat. Pour la continuité de ℓ, on a par l'inégalité de Cauchy Schwartz et de Poincaré :
$$\int_\Omega fv\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$
D'autre part, on a comme $g\in (H^{1/2}(\Omega))'$, alors d'après le théorème de trace, on a
$$|\langle g,v\rangle| \leq C\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$$
Par conséquent
$$|\ell(v)| \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$
3. Si $u\in H^2(\Omega)$, alors en intégrant par partie la formulation variationnelle (3.48), On obtient :
$$\int_\Omega -\Delta uv\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vdS+\int_\Omega uv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x+\langle g,v\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))'\times H^{1/2}(\partial\Omega)},\ \forall v\in H^1(\Omega) \tag{3.49}$$
On choisit $v\in\mathcal{D}(\Omega)$, (3.49), devient
$$\int_\Omega -\Delta uv\mathrm{d}x+\int_\Omega uv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\ \forall v\in\mathcal{D}(\Omega)$$
D'où $-\Delta u+u=f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $-\Delta u,u,f\in L^2(\Omega)$ alors $-\Delta u+u=f$ p.p. Ω. et par conséquent (3.49) devient
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vdS=\langle g,v\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))'\times H^{1/2}(\partial\Omega)},\quad \forall v\in H^1(\Omega).$$
Ce qui donne $\frac{\partial u}{\partial n}=g$ p.p. dans $\partial\Omega$.
4. C'est immédiat, de la même manière que ci-dessus, il faut juste montrer que l'espace H est un espace de Hilbert.